担当教員：柳田　伸太郎　研究室：A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト解答 (12/08)

作成日：December 13, 2016　Version：1.0　　実施日：December 08, 2016

学生番号 ________________ 名前 ________________

問題 1. (1) 複素数 z に対する $\sin z$ の定義を述べよ。
(2) $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に対し

$$\frac{1}{\sin\zeta} = \frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{\zeta - n\pi} + \frac{1}{\zeta + n\pi}\right)$$

が成立することを、以下の複素積分を使って示せ：
非負整数 n に対し、原点を中心とする 1 辺の長さ $(2n+1)\pi$ の正方形を考える。この正方形の周に反時計回り (正の向き) に向き付けを入れたものを C_n として

$$\int_{C_n} \frac{1}{\sin z}\frac{1}{z-\zeta}\,dz.$$

解答 (1) $\sin z := (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i)$.
(2) まず $|\zeta| < n\pi$ となる $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を取って問題の複素積分を考える。
C_n が囲む正方形領域で被積分関数 $f(z)$ は $z = \zeta, m\pi$ $(m = -n, -(n-1), \ldots, n-1, n)$ を除いて正則。またこれらは全て 1 位の極である。実際、$z = \zeta$ については明らかで、$z = m\pi$ についてはそれらが $\sin z$ の 1 位の零点であることから分かる。また各々の留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=\zeta} f(z) = \frac{1}{\sin\zeta}, \quad \operatorname*{Res}_{z=m\pi} f(z) = \frac{1}{\cos m\pi}\frac{1}{m\pi - \zeta} = \frac{(-1)^m}{m\pi - \zeta}.$$

留数定理により $\int_{C_n} f(z)\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_{z=\zeta} f(z) + \sum_{m=-n}^{n} \operatorname{Res}_{z=m\pi} f(z))$ なので

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} f(z)\,dz = \frac{1}{\sin\zeta} - \frac{1}{\zeta} - \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{(-1)^m}{\zeta - m\pi} + \frac{(-1)^m}{\zeta + m\pi}\right). \qquad (\heartsuit)$$

あとは $n \to \infty$ でこの等式の左辺が 0 に収束することが分かれば示したい等式が従う。そこで $(\heartsuit)$ の左辺の極限を考える。C_n の上辺 U では $z = x + n\pi i$ と書けて

$$\begin{aligned} |\sin z| &= |e^{-n\pi}e^{ix} - e^{n\pi}e^{-ix}|/2 = \left|(e^{-n\pi} - e^{n\pi})\cos x + i(e^{-n\pi} + e^{n\pi})\sin x\right|/2 \\ &\geq \frac{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}{2} \geq n\pi. \end{aligned}$$

また $|z - \zeta| \geq |z| - |\zeta| \geq n\pi - |\zeta|$ だから

$$\begin{aligned} \left|\int_U f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{n\pi}^{-n\pi} f(x + n\pi i)\,dx\right| \leq \int_{-n\pi}^{n\pi} |f(x + n\pi i)|\,dx \\ &\leq \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{1}{n\pi(n\pi - |\zeta|)}\,dx = \frac{2}{n\pi - |\zeta|}. \end{aligned}$$

C_n の下辺 D でも $n \mapsto -n$ として同様の議論により $\left|\int_D f(z)\,dz\right| \leq 2/(n\pi - |\zeta|)$ が成立する。C_n の左辺や右辺も同様で積分が $O(n^{-1})$ の式で抑えられる。結局 $n \to \infty$ で積分が 0 に収束する。これで証明が終わった。
(1) を 2 点、(2) を 8 点満点で採点しました。平均点は 2.3 点でした。
Cauchy の積分定理や留数定理を正しく使えるようにしましょう。解答のような議論を自力で出来るようになれば 2 年生の関数論については大丈夫だと思います。