担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (Jordan 標準形)

作成日：December 10, 2016　Version：0.1

問題 1. まず (1) を仮定すると $A^m = \mathbf{0}$ となる自然数 m がとれる．そこで λ を A の固有値として $Au = \lambda u$ となる $0 \neq u \in \mathbb{C}^n$ をとる。このとき $A^2u = \lambda^2 u$ なので $0 = A^m u = \lambda^m u$ となるが、$u \neq 0$ だから $\lambda^m = 0$, つまり $\lambda = 0$ となり (2) が成り立つ。

次に (2) を仮定する。このとき A の固有多項式 Φ_A は 0 以外に根を持たない。Φ_A の次数は n で最高次の係数は 1 だから $\Phi_A(x) = x^n$ となり (3) が成り立つ。

(3) を仮定すると、Cayley-Hamilton の定理から $\mathbf{0} = \Phi_A(A) = A^n$ であり (4) が成り立つ。

(4) を仮定すると、定義から $(m = n$ として$)A^m = \mathbf{0}$ が成り立つから (1) が成り立つ。

問題 2.

(1) $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $N^3 = \mathbf{0}$ が分かる。

(2) $u = {}^t(1, 0, 0)$ と取れば良い。

(3) $\{u_1, u_2, u_3\}$ が一次独立であることを示せば良い。$a_1u_1 + a_2 + u_2 + a_3u_3 = 0$ とすると $a_1N^2u_3 + a_2Nu_3 + a_3u_3 = 0$. これに N^2 を施して $N^3 = \mathbf{0}$ を用いると $a_3N^2u_3 = 0$. $N^2u_3 \neq 0$ だから $a_3 = 0$. よって $a_1N^2u_3 + a_2Nu_3 = 0$. これに N を施すと $a_2N^2u_3 = 0$ だから $a_2 = 0$. よって $a_1 = 0$. つまり $\{u_1, u_2, u_3\}$ は一次独立。

(4) $NP = [Nu_1, Nu_2, Nu_3] = [0, u_1, u_2] = [u_1, u_2, u_3] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから、この行列が $P^{-1}NP$ である。

問題 3.

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_j u_j = 0$ とする。このとき $0 = \sum_{j=1}^{n} a_j N^{n-j}u$ である．この式に N^{n-1} を施し $N^n = \mathbf{0}$ を用いると $a_n u = 0$ が分かる。よって $a_n = 0$. 次に $\sum_{j=1}^{n-1} a_j N^{n-j} u = 0$ に N^{n-2} を施すと $a_{n-1} = 0$ が分かる。一般に $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$ が分かったとすると $\sum_{j=1}^{n-k} a_j N^{n-j} u = 0$ であるが、これに N^{n-k-1} を施すと $a_{n-k} = 0$ が分かる。従って帰納法より全ての j について $a_j = 0$ が分かる。よって $\{u_1, \ldots, u_n\}$ は一次独立。$\mathbb{C}^n$ は n 次元だからこれは基底である。

(2) 設問 (1) より P は正則行列である。問題文にある行列を J とすると $NP = [Nu_1, \ldots, Nu_n] = [0, u_1, \ldots, u_{n-1}] = [u_1, \ldots, u_n]J$ となるから $P^{-1}NP = J$.

問題 4. $J := J(0, m)$ とおく。$e_1, \ldots, e_m$ を $\mathbb{C}^m$ の標準基底とする。$Je_1 = 0$, $Je_j = e_{j-1}$ $(j \geq 2)$ となっている。よって $J^2e_1 = J^2e_2 = 0$, $J^2e_j = e_{j-2}$ $(j \geq 3)$ である。これを繰り返すと一般に $i = 1, \ldots, m$ に対して $J^ie_j = 0$ $(1 \leq j \leq i)$, $J^ie_j = e_{j-i}$ $(j \geq i+1)$ が分かる。よって特に $\operatorname{rank} J^i = m - i$ となる。

担当教員： 柳田 伸太郎　研究室： A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. $a_1u_1 + \cdots + a_su_s = 0$ とする。$(A - \lambda_sE)u_j = (\lambda_j - \lambda_s)u_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ であるから $0 = (A - \lambda_sE)(a_1u_1 + \cdots + a_su_s) = a_1(\lambda_1 - \lambda_s)u_2 + \cdots + a_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)u_s$ となる。次に $(A - \lambda_{s-1}E)$ をこれに施すと $\sum_{j=1}^{s-2} a_j(\lambda_j - \lambda_s)(\lambda_j - \lambda_{s-1})u_j = 0$ となる。これを繰り返す。つまり $(A - \lambda_2E)\cdots(A - \lambda_sE)$ を最初の式に施すと $a_1(\lambda_1 - \lambda_2)\cdots(\lambda_1 - \lambda_s)u_1 = 0$ が分かる。$\lambda_1 \neq \lambda_j$ $(j = 2, \ldots, s)$ だから $a_1 = 0$. 繰り返して $a_1 = \cdots = a_s = 0$ を得る。

問題 6. A の Jordan 標準形を J とし $\{J(\alpha_1, m_1), \ldots, J(\alpha_k, m_k)\}$ を J に現れる Jordan 細胞とする。

(1) 一般に Jordan 細胞 $J(\alpha, m)$ の固有多項式は $(x - \alpha)^m$ である。A の Jordan 標準形 J は対角線上に Jordan 細胞 $\{J(\alpha_1, m_1), \ldots, J(\alpha_k, m_k)\}$ が並んだ形であるから、その固有多項式 $\Phi_J(x) = \Phi_A(x)$ は $\Phi_A(x) = \prod_{l=1}^{k}(x - \alpha_l)^{m_l}$ となる。つまり Φ_A の根は $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. よってこの集合は A の固有値の集合と一致する。

(2) 設問 (1) より $\Phi_A(x) = \prod_{l=1}^{k}(x - \alpha_l)^{m_l}$ であるが、A の全ての相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ としてこれを書き換えると

$$\Phi_A(x) = \prod_{j=1}^{s} \prod_{l \in L(\lambda_j)} (x - \alpha_l)^{m_l} = \prod_{j=1}^{s} \prod_{l \in L(\lambda_j)} (x - \lambda_j)^{m_l}$$

となる。この式で根 λ_j の重複度は $\sum_{l \in L(\lambda_j)} m_l$ だから、これは $n(\lambda_j)$ と一致する。

(3) λ を A の固有値として $l \in L(\lambda)$ とする。$A - \lambda E$ の Jordan 標準形は $J - \lambda E$ である。また $l \in L(\lambda)$ に対して $A - \lambda E$ の Jordan 細胞 $J(0, m_l)$ のランクは $m_l - 1$. 従って m_l 次元空間での線形写像としての $J(0, m_l)$ の核の次元は 1. A の別の固有値 μ $(\mu \neq \lambda)$ に対して $A - \lambda E$ の Jordan 細胞は $J(\mu - \lambda, m_i)$ の形のものが現れるが、これは $\mu - \lambda \neq 0$ より正則である。従って $A - \lambda E$ の核 $\ker(A - \lambda E)$ の次元は $L(\lambda)$ の個数に等しい。

問題 7. $A \sim J$ よりある正則行列 P で $J = P^{-1}AP$ となるものが取れる。この時 $P^{-1}(A - \lambda E)^iP = [P^{-1}(A - \lambda E)P]^i = [P^{-1}AP - \lambda E]^i = (J - \lambda E)^i$. よって $(A - \lambda E)^i \sim (J - \lambda E)^i$.

後半の主張は、一般に $A \sim B$ なら $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ を示せば良い。$A \sim B$ を仮定すると正則行列 P で $B = P^{-1}AP$ となるものが取れる。$\operatorname{rank} A = r$, $\dim\ker(A) = k$ とし、$w_1, \ldots, w_r$ を $\operatorname{Im}(A)$ の基底とする。このとき $Av_j = w_j$ となる v_j $(j = 1, \ldots, r)$ が取れる。また $\{u_1, \ldots, u_k\}$ を $\ker(A)$ の基底とする。このとき $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots u_k\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底となることを示す。

実際 $x \in \mathbb{C}^n$ とすると $Ax \in \operatorname{Im}(A)$ より $Ax = \sum_{j=1}^{r} a_jw_j$ と書ける。但し $a_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, \ldots, r)$ である。そこで $y = \sum_{j=1}^{r} a_jv_j$ とすると $Ay = \sum_{j=1}^{r} a_jAv_j = \sum_{j=1}^{r} a_jw_j = Ax$ だから $A(x - y) = 0$, つまり $x - y \in \ker(A)$ となる。よって $x - y = \sum_{j=1}^{k} b_ju_j$ $(b_j \in \mathbb{C})$ と書ける。従って $x = \sum_{j=1}^{r} a_jv_j + \sum_{j=1}^{k} b_ju_j$ となり、任意の $x \in \mathbb{C}$ が $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots u_k\}$ の一次結合で書けることが分かった。

次に $\sum_{j=1}^{r} a_jv_j + \sum_{j=1}^{k} b_ju_j = 0$ とする。これに A を施すと $\sum_{j=1}^{r} a_jw_j = 0$. $\{w_1, \ldots, w_r\}$ は $\operatorname{Im}(A)$ の基底であったから $a_j = 0$ となり、従って $\sum_{j=1}^{k} b_ju_j = 0$ となる。ところが $\{u_1, \ldots, u_k\}$ は $\ker(A)$ の基底だから $b_j = 0$. 従って $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots u_k\}$ は一次独立。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

以上より $\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots u_k\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底となる。

さて、$x_j := P^{-1}u_j$ $(j=1,\dots,k)$, $y_j := P^{-1}v_j$ $(j=1,\dots,r)$ とおく。P は正則だから $\{x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_r\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底であり、$Bx_j = P^{-1}APx_j = P^{-1}Au_j = 0$ $(j = 1,\dots,k)$, $By_j = P^{-1}APy_j = P^{-1}Av_j = P^{-1}w_j$ となる。ところが $\{P^{-1}w_1,\dots,P^{-1}w_r\}$ は一次独立である。さらに任意の $x\in\mathbb{C}^n$ を取り $x=\sum_{j=1}^k a_jx_j+\sum_{j=1}^r b_jy_j$ とすると、これに B を施して $Bx=\sum_{j=1}^r b_jP^{-1}w_j$ となる。よって $\{P^{-1}w_1,\dots,P^{-1}w_r\}$ は $\mathrm{Im}(B)$ の基底となり、$\mathrm{rank}(B)=r$ となる。

問題 8.

(1) A,B の固有値はともに λ のみである。

(2) $A-\lambda E=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから $(A-\lambda E)^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ であり、従って $\mathrm{rank}(A-\lambda E)=2$, $\mathrm{rank}(A-\lambda E)^2=1$, $\mathrm{rank}(A-\lambda E)^i=0$ $(i\ge 3)$.

また $B-\lambda E=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから $(B-\lambda E)^2=\mathbf{0}$ となる。従って $\mathrm{rank}(B-\lambda E)=2$, $\mathrm{rank}(B-\lambda E)^i=0$ $(i\ge 2)$.

問題 9.

(1) 行列式の簡単な計算で確認できるので省略する。

(2) $A-2E=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&2&0&1\\2&2&0&0\end{pmatrix}$ となる。これを二乗すればよい。

(3) $\mathrm{rank}(A-2E)=2$ と設問 (2) より A の Jordan 標準形は $J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

(4) $P=[u_1,u_2,u_3,u_4]$ とおくと、$P^{-1}AP=J$ となるための必要十分条件は P が正則かつ $AP=PJ$ となることである。$AP=PJ$ は $Au_1=2u_1$, $Au_2=u_1+2u_2$, $Au_3=2u_3$, $Au_4=u_3+2u_4$ と同値。つまり $N:=A-2E$ とおくと $Nu_1=Nu_3=0$, $Nu_2=u_1$, $Nu_4=u_3$ となるものを見つける必要がある。
$u_1:={}^t(1,-1,0,2)$, $u_3:={}^t(0,0,1,0)$ とおくと $u_1,u_3\in\ker(N)$ であり、u_1,u_3 は一次独立。$Nu_2=u_1$ を解くと、例えば $u_2:={}^t(1,0,0,0)$ は解である。また $Nu_4=u_3$ を消去法で解くと、例えば $u_4:={}^t(-1,1,0,-1)$ は解。これで

$$P=[u_1,u_2,u_3,u_4]=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\-1&0&0&1\\0&0&1&0\\2&0&0&-1\end{pmatrix}$$

と求まる。$\det P=1$ だから P は正則である。従ってこの P が求めるもの (の一例) である。

担当教員： 柳田 伸太郎 研究室： A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について。

固有多項式は $(x-2)^4$ であり固有値は 2 のみ。$N := A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $\mathrm{rank}(N) = 2$. また $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank}(N^2) = 1$. 更に $N^3 = \mathbf{0}$ が計算で分かる。従って N の Jordan 標準形は $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$P = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ とおくと、$P^{-1}NP = J$ が成り立つためには P が正則で $NP = PJ$ となることが必要十分。これを満たす u_1, u_2, u_3, u_4 を探す。

$NP = [Nu_1, Nu_2, Nu_3, Nu_4]$ であり $PJ = [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0, u_1, u_2, 0]$.

従って $Nu_1 = 0, Nu_2 = u_1, Nu_3 = u_2, Nu_4 = 0$ が必要。特に $N^2u_3 \neq 0$ である必要がある。そこで $u_3 := {}^t(0, 0, 1, 0)$ とすると $N^2u_3 = {}^t(1, -1, 0, 2) \neq 0$. 次に $u_2 := Nu_3 = {}^t(1, 0, 1, 0)$, $u_1 := N^2u_3 = {}^t(1, -1, 0, 2)$ とおく。$u_1 \in \ker(N)$, $Nu_2 = u_1$ に注意する。また $u_4 := {}^t(1, -1, 0, -1)$ とおくと $Nu_4 = 0$.
以上より

$$P = [u_1, u_2, u_3, u_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと $\mathrm{rank}(P) = 4$ より P は正則行列であり、また上の議論より $NP = PJ$. 従って $J = P^{-1}NP = P^{-1}(A - 2E)P = P^{-1}AP - 2E$. つまり A の Jordan 標準形は

$$P^{-1}AP = J + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について。

固有多項式は $(x-2)^4$ で固有値は 2 のみ。$N := A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $\mathrm{rank}(N) = 3$. よって N の Jordan 標準形は $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$P=[u_1,u_2,u_3,u_4]$ とおくと $NP=PJ$ となるための条件は $Nu_1=0$, $Nu_2=u_1$, $Nu_3=u_2$, $Nu_4=u_3$. 特に $N^3u_4\neq 0$ である必要がある。$N^3=\begin{pmatrix}0&2&0&1\\0&-2&0&-1\\0&0&0&0\\0&4&0&2\end{pmatrix}$ が直接計算で分かる。特に $\operatorname{rank}(N^3)=1$. また $N^4=\mathbf{0}$ も計算で分かる。そこで $u_4:={}^t(0,0,0,1)$ とおくと $u_1:=N^3u_4\neq 0$. 次に $u_2:=N^2u_4$, $u_3:=Nu_4$ とおくと $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ は一次独立である (問題 3 より)。よって

$$P=[u_1,u_2,u_3,u_4]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$$

は正則行列であり, $NP=[Nu_1,Nu_2,Nu_3,Nu_4]=[0,u_1,u_2,u_3]=[u_1,u_2,u_3,u_4]J=PJ$ となるから $P^{-1}NP=J$. 従って A の Jordan 標準形は

$$P^{-1}AP=P^{-1}(N+2E)P=J+2E=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

- $A=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\-1&1&0&0\\-1&-1&3&0\\2&4&0&3\end{pmatrix}$ について。

固有多項式は $(x-3)(x-2)^3$ で固有値は 3(重複度 1) と 2(重複度 3). $u_4:={}^t(0,0,0,1)$ とすると $Au_4=3u_4$. また $A-2E=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&-1&0&0\\-1&-1&1&0\\2&4&0&1\end{pmatrix}$ だから $\operatorname{rank}(A-2E)=3$.

よって A の Jordan 標準形は $J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

以下 $P^{-1}AP=J$ なる P を求める。$N:=A-2E$ とおく. N の固有値は 1(重複度 1) と 0(重複度 3) なので N の Jordan 標準形は $J'=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. $J'+2E=J$ に注意すると、$NP=PJ'$ なる正則行列 P を求めればよいことが分かる。また $Nu_4=u_4$ なので、$P=[u_1,u_2,u_3,u_4]$ とおくと $NP=PJ'$ となるためには $Nu_1=0$, $Nu_2=u_1$, $Nu_3=u_2$ が必要十分。

$u_1:={}^t(1,-1,0,2)$ とおくと $Nu_1=0$. $Nu_2=u_1$ を解くと、解は例えば $u_2={}^t(1,0,1,0)$. 次に $Nu_3=u_2$ を解くと、解は例えば $u_3={}^t(0,0,1,0)$.

以上より例えば以下のように P を取れば、$\det P=1$ より P は正則で、$NP=[0,u_1,u_2,u_4]=[u_1,u_2,u_3,u_4]J'=PJ'$ より $P^{-1}AP=P^{-1}(N+2E)P=J'+2E=J$ となる。

$$P=[u_1,u_2,u_3,u_4]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}.$$

担当教員： 柳田 伸太郎 研究室： A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 11. まず問題 5 より $\{u_1, u_2, u_3\}$ は一次独立なので $\mathbb{C}^3$ の基底であることに注意する。よって $P = [u_1, u_2, u_3]$ は正則行列。このとき

$$AP = A[u_1, u_2, u_3] = [\lambda u_1, \mu u_2, \nu u_3] = [u_1, u_2, u_3]\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

だから $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ となる。

問題 12.

(1) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ だとする。これに $(A - \lambda E)$ を施すと、$0 \neq u_3 \in \ker(A - \mu E)$ より $(A - \lambda E)u_3 = (\mu - \lambda)u_3$ を得る。$u_1, u_2 \in \ker(A - \lambda E)$ だから $0 = (A - \lambda E)(au_1 + bu_2 + cu_3) = c(\lambda - \mu)u_3$ となるが $\lambda \neq \mu$ だから $c = 0$. すると $\{u_1, u_2\}$ は $\ker(A - \lambda E)$ の基底だから $a = b = 0$. つまり $\{u_1, u_2, u_3\}$ は一次独立だから $\mathbb{C}^3$ の基底である。よって $P = [u_1, u_2, u_3]$ は正則行列であり,

$$AP = [Au_1, Au_2, Au_3] = [\lambda u_1, \lambda u_2, \mu u_3] = [u_1, u_2, u_3]\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる。従って $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

(2) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ とする。$(A - \lambda E)^2$ を施すと $(A - \lambda E)^2 u_1 = (A - \lambda E)^2 u_2 = 0$ より $0 = (A - \lambda E)^2(au_1 + bu_2 + cu_3) = c(A - \lambda E)^2 u_3 = c(\lambda - \mu)^2 u_3$. よって $c = 0$. u_2, u_3 は $\ker(A - \lambda E)$ の基底だから $b = c = 0$. よって $\{u_1, u_2, u_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底。また $u_1 = (A - \lambda E)u_2$ より $Au_2 = u_1 + \lambda u_2$. そして $u_1 \in \ker(A - \lambda E)$ だから

$$AP = [\lambda u_1, u_1 + \lambda u_2, \mu u_3] = [u_1, u_2, u_3]\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

従って $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

問題 13.

(A) (1) $\dim\ker(N) = 1$ と仮定して矛盾を導く。$0 \neq w \in \ker(N)$ とすると $\ker(N) = \mathbb{C}w$. そこで $\{u, v, w\}$ が $\mathbb{C}^3$ の基底となるように u, v を取る。すると $N^2 = \mathbf{0}$ より $Nu, Nv \in \ker(N)$. この時 Nu, Nv が一次独立であることを示す。$aNu + bNv = 0$ となる $a, b \in \mathbb{C}$ があったとする。この時 $N(au + bv) = 0$ だから $au + bv \in \ker(N)$. $\ker(N) = \mathbb{C}w$ だから $au + bv = cw$ となる $c \in \mathbb{C}$ がある。ところが $\{u, v, w\}$ は一次独立だから $a = b = c = 0$. よって $\{Nu, Nv\}$ は一次独立。ところがこれらは $\ker(N)$ の元であり $\dim\ker(N) = 1$ と矛盾する。よって $\dim\ker(N) \neq 1$. いま設定から $1 \leq \dim\ker(N) \leq 2$ であるから $\dim\ker(N) = 2$ となる。

担当教員： 柳田 伸太郎　研究室： A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $\dim\ker(N) = 2$ だから $u_2 \in \mathbb{C}^3$ を $u_2 \notin \ker(N)$ となるように取れる。特に $u_2 \neq 0$. このとき $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}u_2 \oplus \ker(N)$ となる。実際、$\{u, v\}$ を $\ker(N)$ の任意の基底とし $au_2 + bu + cv = 0$ とすると、N を施して $0 = aNu_2$ であるが、$u_2 \notin \ker(N)$ より $Nu_2 \neq 0$. よって $a = 0$. 従って $b = c = 0$ となり $\{u_2, u, v\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底となるからである。

そこで $u_1 := Nu_2$ とおく。これは 0 でないから、$u_3 \in \ker(N)$ を $\{u_1, u_3\}$ が $\ker(N)$ の基底となるように取れる。$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}u_2 \oplus \ker(N)$ だから $\{u_1, u_2, u_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底となり、従って $P = [u_1, u_2, u_3]$ は正則行列。さらに

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)P &= NP = [Nu_1, Nu_2, Nu_3] = [0, u_1, 0] \\ &= [u_1, u_2, u_3]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。従って

$$P^{-1}AP = P^{-1}(A - \lambda E)P + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(B) (1) $N^2u_3 \neq 0$, $u_1 = N^2u_3$, $u_2 = Nu_3$ とおいている. $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ となる $a, b, c \in \mathbb{C}$ があったとする。これに N^2 を施すと、$N^3 = \mathbf{0}$ より $0 = aN^2u_1 + bN^2u_2 + cN^2u_3 = aN^4u_3 + bN^3u_3 + cN^2u_3 = cN^2u_3$. よって $c = 0$. 次に N を $au_1 + bu_2 = 0$ に施すと $0 = aNu_1 + bNu_2 = aN^3u_3 + bN^2u_3 = bN^2u_3$. よって $b = 0$. 従って $0 = au_1 = aN^2u_3$ だから $a = 0$. よって $\{u_1, u_2, u_3\}$ は一次独立であり、従って $\mathbb{C}^3$ の基底となる。

(2) $(A - \lambda E)P = NP = [Nu_1, Nu_2, Nu_3] = [0, u_1, u_2] = [u_1, u_2, u_3]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので $P^{-1}AP = P^{-1}(A - \lambda E)P + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

問題 14. 詳細な解答は省略する。ここでは概略だけ述べる。
A の固有値は高々四つである。相異なる固有値の個数で場合分けする。場合分けは重複度を並べて表すことができる。例えば 4 つ全て異なる固有値がある場合は $(1, 1, 1, 1)$、重複度が 3 のものと 1 のものが各々一つずつある場合は $(3, 1)$ と書くことにすると、

$$(4),\ (3, 1),\ (2, 2),\ (2, 1, 1),\ (1, 1, 1, 1)$$

の 5 通りがある。また最初の (4) 以外の場合は 3 次以下の場合に帰着できる。結果だけ述べると、上の場合分けに応じて、Jordan 標準形は以下の形になる。但し $\oplus$ は Jordan 細胞を対角線上に並べることを意味している。また λ_i 達は A の異なる固有値である。

(4) : $J(\lambda_1, 4)$, $J(\lambda_1, 3) \oplus J(\lambda_1, 1)$, $J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_1, 2)$, $J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_1, 1)$,
$J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_1, 1)$.

(3, 1) : $J(\lambda_1, 3) \oplus J(\lambda_2, 1)$, $J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_2, 1)$,
$J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_1, 1) \oplus J(\lambda_2, 1)$,

$$
\begin{aligned}
(2,2):\quad & J(\lambda_1,2)\oplus J(\lambda_2,2),\quad J(\lambda_1,2)\oplus J(\lambda_2,1)\oplus J(\lambda_2,1),\\
& J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_2,2),\quad J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_2,1)\oplus J(\lambda_2,1).\\
(2,1,1):\quad & J(\lambda_1,2)\oplus J(\lambda_2,1)\oplus J(\lambda_3,1),\\
& J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_2,1)\oplus J(\lambda_3,1),\\
(1,1,1,1):\quad & J(\lambda_1,1)\oplus J(\lambda_2,1)\oplus J(\lambda_3,1)\oplus J(\lambda_4,1).
\end{aligned}
$$

問題 15. まず次の事実に注意する: A, B をそれぞれ n_1 次、n_2 次の正方行列とするとき

$$
\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{n_2} \\ E_{n_1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{n_1} \\ E_{n_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.
$$

但し E_{n_1}, E_{n_2} はそれぞれ n_1 次及び n_2 次の単位行列。つまり $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix}$ が成り立つ。また $A, B \in M_r(\mathbb{C})$ が $A \sim B$ であるとし、正則行列 $P \in M_r(\mathbb{C})$ で $B = P^{-1}AP$ となっていたとする。この時 $n = n_1 + \cdots + n_k + r$ とし $T_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ を任意の行列とすると

$$
\begin{pmatrix} E_{n_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_{n_k} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & T_k \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} E_{n_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_{n_k} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & T_k \end{pmatrix}.
$$

つまり上記の二つの行列は同値である。これらを用いる。
一般に $J \in M_n(\mathbb{C})$ を次のような行列とする。

$$
J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}.
$$

但し $J_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ とし $n = n_1 + \cdots + n_k$ とする。また上記のような形の行列 J と任意の k 次の置換 σ に対して

$$
J_\sigma := \begin{pmatrix} J_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\sigma(k)} \end{pmatrix}
$$

とおく。任意の k 次の置換 σ と μ に対して $J_{\sigma\mu} = (J_\sigma)_\mu$ が成り立つ。また先の注意から $\begin{pmatrix} J_i & \\ & J_{i+1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} J_{i+1} & \\ & J_i \end{pmatrix}$ だから、任意の互換 $\tau = (i, i+1)$ に対して $J \sim J_\tau$ となる。任意の置換 σ は互換の積に分解できるから、例えば $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ と分解すると以下が成り立つ。

$$
J_\sigma = J_{\tau_1\cdots\tau_r} \sim (J_{\tau_1\cdots\tau_{r-1}})_{\tau_r} \sim J_{\tau_1\cdots\tau_{r-1}} \sim \cdots \sim J_{\tau_1} \sim J
$$

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 16. A の rank は同値な行列をとっても変化しないから、A はあらかじめ $A_1,\dots,A_k$ を対角線に並べた行列であると仮定して rank を計算すればよい。そこで $r_i := \operatorname{rank}(A_i)$ とおくと、ある正則行列 $P_i, Q_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ が存在して $Q_iA_iP_i = \begin{pmatrix} E_{r_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. 従って P, Q を それぞれ $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_k \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_k \end{pmatrix}$ とすると

$$QAP = \begin{pmatrix} E_{r_1} & \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & \\ & & E_{r_2} & \mathbf{0} & & & \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & E_{r_k} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

最後の行列のランクは $r_1 + \cdots + r_k$ であり、これが rank A と一致する。

問題 17. $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値 λ を取り固定する。そして A の Jordan 標準形を λ に対する Jordan 細胞が左上にすべて集まるようにし、さらに λ に対する Jordan 細胞のうち最大のものの次数を m とする。すると $A - \lambda E$ は次の方の行列と同値となる。

$$A - \lambda E \sim \begin{pmatrix} J(0,m) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J(0,m) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & J(0,1) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & J(0,1) & \\ & & & & & & & B \end{pmatrix}.$$

但し B の部分は λ 以外の他の固有値に対する Jordan 細胞が現れる部分であり、例えば固有値 μ の Jordan 細胞が現れたら λE を引いてあるから $\mu - \lambda$ の形の複素数が対角線上に並ぶ。特に B は正則行列である。また上式で $J(0,i)$ は p_i 個並んでいる $(i = 1,\dots,m)$. さらに固有値 λ の重複度を $n(\lambda)$ とすると、上記右辺の行列に λE を足したもの (つまり A の Jordan 標準形そのもの) の固有値 λ の重複度も $n(\lambda)$ であるから、

$$\sum_{j=1}^{m} jp_j = n(\lambda) \tag{$\star$}$$

が成り立つ。特に $\operatorname{rank}(B) = n - n(\lambda)$ となる。B は正則な $n - n(\lambda)$ 次正方行列であるから、任意の自然数 i に対して $\operatorname{rank}(B^i) = n - n(\lambda)$ となる。また

$$(A - \lambda E)^i \sim \begin{pmatrix} J(0,m)^i & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J(0,m)^i & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & J(0,1)^i & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & J(0,1)^i & \\ & & & & & & & B^i \end{pmatrix}$$

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

が成り立つことに注意する。問題 4 より $\mathrm{rank}(J(0,j)^i) = j-i$ $(0 \le i \le j)$ であり $\mathrm{rank}(J(0,j)^j) = \mathbf{0}$ だから、問題 17 より $1 \le i \le m$ に対して

$$\mathrm{rank}(A-\lambda E)^i = \sum_{j=i}^{m} p_j \,\mathrm{rank}(J(0,j)^i) + \mathrm{rank}(B^i) = \sum_{j=i}^{m}(j-i)p_j + n - n(\lambda) \qquad (\star\star)$$

となる。特に $i=1$ のとき

$$\sum_{j=1}^{m}(j-1)p_j + n - n(\lambda) = \mathrm{rank}(A-\lambda E) = n - \ell(\lambda)$$

となる。但し $\ell(\lambda) := \dim W(\lambda)$. よって式 $(\star)$ より $\sum_{j=1}^{m} p_j = \ell(\lambda)$ (これは問題 7(3) の解答でもある). さて式 $(\star)$ と $(\star\star)$ より $i=1$ のときは

$$\begin{aligned}
&n - 2\,\mathrm{rank}(A-\lambda E) + \mathrm{rank}(A-\lambda E)^2 \\
&\quad = n - 2\left(\sum_{j=1}^{m}(j-1)p_j + n - n(\lambda)\right) + \sum_{j=2}^{m}(j-2)p_j + n - n(\lambda) \\
&\quad = -2\sum_{j=1}^{m} jp_j + 2\sum_{j=1}^{m} p_j + n(\lambda) + \sum_{j=1}^{m} jp_j - p_1 - 2\sum_{j=1}^{m} p_j + 2p_1 = p_1
\end{aligned}$$

となる。$i \ge 2$ のときも同様に以下の等式が成立する。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rank}(A-\lambda E)^{i+1} - 2\,\mathrm{rank}(A-\lambda E)^i + \mathrm{rank}(A-\lambda E)^{i-1} \\
&\quad = \sum_{j=i+1}^{m} jp_j - (i+1)\sum_{j=i+1}^{m} p_j - 2\sum_{j=i}^{m} jp_j + 2i\sum_{j=i}^{m} p_j + \sum_{j=i-1}^{m} jp_j - (i-1)\sum_{j=i-1}^{m} p_j \\
&\quad = p_i.
\end{aligned}$$

問題 18. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ の Jordan 標準形を J_A, J_B とする。まず J_A と J_B の Jordan 細胞が (適当に順序を並べ替えると) 全て等しいとする。このとき問題 16 より $J_A \sim J_B$ である。よって $A \sim J_A \sim J_B \sim B$ だから A と B は同値である。
逆に A と B が同値であると仮定する。このとき A と B の固有値は重複度を込めて全て等しい。また λ を A, B 双方の固有値とすると、問題 8 より $\mathrm{rank}(A-\lambda E)^i = \mathrm{rank}\, B - \lambda E)^i$ が任意の自然数 i に対して成り立つ。よって特に問題 18 より、J_A と J_B に現れる固有値 λ に対する i 次 Jordan 細胞の個数は等しい。これが任意の自然数 i と任意の固有値 λ について成り立つから、J_A と J_B に現れる Jordan 細胞は順序を並べ替えると全て等しくなる。