担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

Jordan 標準形

作成日：December 09, 2016 Version：0.1 実施日：December 15, 2016

前回に引き続き正方行列の標準形について考える。行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の各固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、広義固有空間 $\widetilde{W}(\lambda)$ は A の不変部分空間で、$\widetilde{W}(\lambda)$ 上では $(A-\lambda E)^{n(\lambda)} = \mathbf{0}$ となってた。ここで $n(\lambda)$ は λ の重複度。そこで一般に行列 N で $N^m = \mathbf{0}$ となる行列の標準形を復習しよう。なお以下では、n 個のベクトル $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}^n$ に対し、これらを縦ベクトルとして順に並べて出来る行列を $[u_1, \ldots, u_n]$ と表す。

ベキ零行列

行列 $N \in M_n(\mathbb{C})$ はある自然数 m が存在して $N^m = \mathbf{0}$ となる時ベキ零行列と呼ばれる。

問題 1. $N \in M_n(\mathbb{C})$ に対して次の四つの条件は同値であることを示せ。

(1) N はベキ零行列。
(2) N の固有値は 0 のみ。
(3) N の固有多項式は x^n.
(4) $N^n = \mathbf{0}$.

問題 2. 次の 3 次正方行列 N を考える。

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) N^2 を計算せよ。さらに $N^3 = \mathbf{0}$ を示せ。

(2) $N^2 u \neq 0$ となる $u \in \mathbb{C}^3$ を一つ求めよ。

(3) 設問 (2) で求めた u を u_3 と書く。また $u_2 = Nu_3,\ u_1 = N^2 u_3$ とする。このとき $\{u_1, u_2, u_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底であることを示せ。

(4) $P := [u_1, u_2, u_3]$ とおくとき $P^{-1}NP$ を計算せよ.

ベキ零行列に対しては、上記の問題のような手法がそのまま一般の場合にも適用できる。

問題 3. $N \in M_n(\mathbb{C})$ を $N^n = \mathbf{0},\ N^{n-1} \neq \mathbf{0}$ を満たすベキ零行列とする。また $u \in \mathbb{C}^n$ を $N^{n-1}u \neq 0$ となるベクトルとする。

(1) $u_1 := N^{n-1}u, u_2 := N^{n-2}u, \ldots, u_{n-1} = Nu, u_n := u$ とおく。このとき $\{u_1, \ldots, u_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底であることを示せ。

(2) $P := [u_1, \ldots, u_n]$ とおくとき次を示せ。

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

担当教員： 柳田 伸太郎　研究室： A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ と自然数 m に対して、次のような m 次正方行列 $J(\lambda, m)$ を λ に対する m 次 Jordan 細胞、Jordan 因子、Jordan ブロックなどと呼ぶ。

$$J(\lambda, m) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \mathbf{0} \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

但し $m = 1$ のときは $J(\lambda, 1) := (\lambda)$ (1 次正方行列) で定義する。例えば問題 3(2) の行列 N について $P^{-1}NP = J(0, n)$ である。Jordan 細胞については次の事実が基本的である。

問題 4. m を自然数とする。任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して $\operatorname{rank}(J(0, m)^i) = m - i$ を示せ。

次の問題は Jordan 標準形に変換する際に頻繁に用いられる。

問題 5. $A \in M_n(\mathbb{C})$ の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ に対して λ_j の固有ベクトル u_j を取る。このとき $\{u_1, \ldots, u_s\}$ は一次独立であることを示せ。

ベキ零行列の標準形については、次の定理に述べるように $\lambda = 0$ に対する Jordan 細胞 $J(0, m)$ が対角線の部分に並んだものになる。以下の定理の証明は省略する。

定理 1. $N \in M_n(\mathbb{C})$ をベキ零行列とするとき、N は次の形の行列と同値である。

$$N \sim \begin{pmatrix} J(0, m_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J(0, m_k) \end{pmatrix}.$$

但し $m_1 + \cdots + m_k = n$. また自然数の組 $(m_1, \ldots, m_k)$ は (順序を除き)N から一意に定まる。

Jordan 標準形

定理 1 のベキ零行列に対する標準形定理と前回の広義固有空間の分解定理を用いると、次の Jordan 標準形定理が証明できる。

定理 2. 任意の複素 n 次正方行列 A に対して、ある正則行列 P が存在して、$P^{-1}AP$ は次のような形の行列になる。

$$J := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\alpha_1, m_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J(\alpha_k, m_k) \end{pmatrix}.$$

但し複素数の組 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ や自然数の組 $\{m_1, \ldots m_k\}$ は行列 A に対して一意的に定まる。上記の形の行列 J を A の Jordan 標準形と呼ぶ。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の Jordan 標準形に現れる Jordan 細胞を全て並べて $\{J(\alpha_1, m_1), \ldots, J(\alpha_k, m_k)\}$ とする。但し α_j は複素数、m_j は自然数 $(j = 1, \ldots, k)$ である。

(1) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ は (重複を除いて)A の固有値全体の集合と一致することを示せ。

(2) A の任意の固有値 λ に対して自然数の部分集合 $L(\lambda)$ を $L(\lambda) := \{l \in \mathbb{N} \mid \alpha_l = \lambda\}$ で定める。この時 $\sum_{l \in L(\lambda)} m_l = n(\lambda)$ を示せ。但し $n(\lambda)$ は固有値 λ の重複度である。

(3) A の固有値 λ に対して $\ell(\lambda)$ を $L(\lambda)$ の個数とする。この時 $\ell(\lambda) = \dim W(\lambda)$ を示せ。但し $W(\lambda) := \ker(A - \lambda E)$ は λ の固有空間である。

つまり行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の Jordan 標準形において、各 Jordan 細胞 $J(\lambda, m_j)$ は λ が A の固有値のときに現れ、さらに A の固有値 λ に対して、λ に対する Jordan 細胞の個数はちょうど λ の固有空間 $\ker(A - \lambda E)$ の次元に等しいことが分かった。

しばしば「次の行列の Jordan 標準形を求めよ」とか「次の行列を Jordan 標準形に変換する行列を求めよ」という問題に直面します。この場合 Jordan 標準形に変換する行列」とは「$P^{-1}AP$ が A の Jordan 標準形になるような行列 P」のことである。与えられた行列 A を Jordan 標準形にする正則行列 P を求める方法は、例えば

(1) A の固有値とその重複度を求める。

(2) A の各固有値 λ と自然数 i に対して $\mathrm{rank}((A - \lambda E)^i)$ を求める。

というステップを踏むと良い。

例えば $\mathrm{rank}(A - \lambda E) = n - \dim\ker(A - \lambda E)$ を求めると λ に対応した Jordan 細胞の個数が分かる。固有値 λ に対応する Jordan 細胞の個数が分かっても、i 次 Jordan 細胞が幾つ出て来るか特定しなくては A の Jordan 標準形を求めることはできない (これについては後ほど問題形式で公式を与える)。

問題 7. $A, J \in M_n(\mathbb{C})$ が同値だと仮定する。このとき任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と任意の自然数 i に対して $(A - \lambda E)^i \sim (J - \lambda E)^i$ を示せ。また $\mathrm{rank}((A - \lambda E)^i) = \mathrm{rank}((J - \lambda E)^i)$ を示せ。

問題 8. $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。このとき以下で与えられる行列 A, B を考える。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(1) A, B の固有値を求めよ。

(2) $\mathrm{rank}((A - \lambda E)^i)$, $\mathrm{rank}((B - \lambda E)^i)$ を全ての自然数 i に対して求めよ。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

この問題のように、異なる Jordan 標準形になっている二つの行列 A, B に対しては $\mathrm{rank}((A-\lambda E)^i)$ と $\mathrm{rank}((B-\lambda E)^i)$ に違いが出てくる。Jordan 標準形に変換するための一つの方法として、逆にこの違いを利用して $\mathrm{rank}((A-\lambda E)^i)$ から A の Jordan 標準形を特定し、そしてそれから逆に変換行列 P を求める方法がある。

問題 9. 次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ が $\Phi_A(x) = (x-2)^4$ となることを確かめよ。

(2) $A-2E$ を計算し $(A-2E)^2 = \mathbf{0}$ を確かめよ。

(3) A の Jordan 標準形 J を求めよ。

(4) $P = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ とおいて $P^{-1}AP = J$ となるような $\mathbb{C}^4$ の基底 u_1, u_2, u_3, u_4 を一組求めよ。

問題 10. 次の行列 A の Jordan 標準形 J を求め、$J = P^{-1}AP$ となる正則行列 P を一つ与えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 次正方行列の Jordan 標準形

与えられた行列の Jordan 標準形と標準形に変換する正則行列の求め方を理解するために、ここでは 3 次正方行列の標準形について考える。以下しばらく、A は複素 3 次正方行列とする。A の相異なる固有値の個数は $1, 2, 3$ の場合がある。それぞれの場合に Jordan 標準形と変換行列の作り方を考える。まず相異なる固有値が三つの場合を考えよう。

問題 11. 3 次正方行列 A の相異なる固有値が 3 個であるとし、それらを λ, μ, ν とする。対応する固有ベクトルを u_1, u_2, u_3 とし、$P := [u_1, u_2, u_3]$ とおく。このとき次の等式を示せ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

次に相異なる固有値がの二つの場合を考る。

問題 12. 3 次正方行列 A の固有値が 2 個であるとし、それらを λ, μ とする。また λ, μ の重複度がそれぞれ 2, 1 であったとする。このとき広義固有空間分解

$$\mathbb{C}^3 = \ker((A-\lambda E)^2) \oplus \ker((A-\mu)), \quad \dim\ker((A-\lambda E)^2) = 2,\ \dim\ker((A-\mu E)) = 1$$

が成り立っていた。$0 \neq u_3 \in \ker((A-\mu E))$ とする。

(1) $\dim\ker((A-\lambda E)) = 2$ のとき u_1, u_2 を $\ker((A-\lambda E))$ の基底とする。このとき $P := [u_1, u_2, u_3]$ は正則行列であること、また次が成り立つことを示せ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(2) $\dim\ker((A-\lambda E)) = 1$ のとき $u_2 \in \ker((A-\lambda E)^2)$ を $u_2 \notin \ker((A-\lambda E))$ となるように取る。そして $u_1 := (A-\lambda E)u_2$ とおく。このとき $P := [u_1, u_2, u_3]$ が正則行列であり、また次が成り立つことを示せ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

最後に固有値が唯一つ (重複度が 3) の場合を考える。

問題 13. 3 次正方行列 A の固有値が唯一つ λ(重複度 3) であったとし、$N := A - \lambda E$ とおく。このとき $N^3 = 0$ である。また $\dim\ker(N) = 3$ であることと $N = \mathbf{0}$, つまり $A = \lambda E$ とは同値であるから、$\dim\ker(N) = 1$ または 2 と仮定する。

(A) $N^2 = \mathbf{0}$ と仮定する。

(1) $\dim\ker(N) = 2$ を示せ。

(2) $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}u_2 \oplus \ker(N)$ となる u_2 を取り $u_1 := Nu_2$ とおく。u_1, u_3 が $\ker(N)$ の基底となるような u_3 を取る。また $P := [u_1, u_2, u_3]$ とおく。この時 P は正則行列で次が成り立つことを示せ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(B) (問題 3 参照) $N^2 \neq \mathbf{0}$ と仮定する

(1) $u_3 \in \mathbb{C}^3$ を $N^2u_3 \neq 0$ となるものとし $u_1 := N^2u_3$, $u_2 := Nu_3$ とおく。このとき $\{u_1, u_2, u_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底であることを示せ。

(2) $P := [u_1, u_2, u_3]$ とおくと次が成り立つことを示せ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 14. 4 次行列 A に対して可能な Jordan 標準形を全て求めよ。またどのように Jordan 標準形に変換する正則行列を作れば良いか説明せよ。

補足: 二つの行列が同値になるための条件

Jordan 標準形定理 (定理 2) の証明の詳細は省略するが、以下の一連の問題は、Jordan 標準形定理に現れる Jordan 細胞の現れ方が理解でき、また定理の意味が分かるように設問してある。

問題 15. $m_1, \dots, m_k$ を自然数で $n = m_1 + \cdots + m_k$ を満たすものとし、$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ とする。また σ を k 次の置換、つまり集合 $\{1, \dots, k\}$ 上の全単射とする。このとき次の二つの行列は同値であることを示せ。

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1, m_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J(\alpha_k, m_k) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} J(\alpha_{\sigma(1)}, m_{\sigma(1)}) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J(\alpha_{\sigma(k)}, m_{\sigma(k)}) \end{pmatrix}$$

上記の問題により、一般に Jordan 標準形において、その Jordan 細胞の順序を入れ替えたものは全て同値であることが分かった。与えられた行列に対してその Jordan 標準形を確定するには、一つ固有値 λ を固定したとき i 次の Jordan 細胞 $J(\lambda, i)$ が幾つ現れるかを特定する必要がある。そのために、まず次の問題を考えてみよう。

問題 16. 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が次の形の行列と同値であったと仮定する。

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix}.$$

但し $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ かつ $(n = n_1 + \cdots + n_k)$. このとき $\operatorname{rank}(A) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}(A_i)$ を示せ。

上記の問題を用いると次を示すことができる。

問題 17. $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値 λ を一つ固定する。また A の Jordan 標準形に現れる λ に関する i 次 Jordan 細胞 $J(\lambda, i)$ の個数を p_i とする。このとき次の等式を示せ。

$$\begin{aligned} p_1 &= n - 2\operatorname{rank}(A - \lambda E) + \operatorname{rank}((A - \lambda E)^2), \\ p_i &= \operatorname{rank}((A - \lambda E)^{i-1}) - 2\operatorname{rank}((A - \lambda E)^i) + \operatorname{rank}((A - \lambda E)^{i+1}) \quad (i \geq 2). \end{aligned}$$

これを用いると次が分かる。

問題 18. 二つの行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ が同値であるためには、A と B の Jordan 標準形に現れる Jordan 細胞が (適当に順序を並べ替えると) 全て等しいことが必要十分であることを示せ。