担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (12/01) 解答

作成日：November 30, 2016 Version：1.0 実施日：December 08, 2016

学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1. (1) U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、f を U 上の実数値関数とする。「f が U において C^k 級である」とはどういう意味か (つまり多変数関数の C^k 級の定義) を説明せよ。
(2) $\mathbb{R}^3$ の座標を (x,y,z) と書くことにする。$r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく。また a を正の実数とする。このとき次式で定義される $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ 上の関数 u は C^1 級であることを示せ。

$$u(x,y,z) := \begin{cases} 2\pi a^2 - \dfrac{2\pi r^2}{3} & (r < a) \\ \dfrac{4\pi a^3}{3r} & (r \geq a) \end{cases}.$$

(3) 前問の u が次の等式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -4\pi & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}.$$

解答
(1) 全ての k 階偏導関数が存在しそれらが連続であるとき f は C^k 級であると呼ばれる。
(2) $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ と略記する。$u(x,y,z)$ は r のみに依存している。$\lim_{r\to a\pm 0} u = 4\pi a^2/3$ と定義式から u は r に関して連続関数である。また $r = r(x,y,z)$ は明らかに U 上の連続関数。連続関数の合成は連続だから、$u(x,y,z)$ は U 上の連続関数だと分かる。
次に

$$\partial r/\partial x = x/r, \quad \partial r/\partial y = y/r, \quad \partial r/\partial z = z/r$$

より $r(x,y,z)$ は U 上で C^1 級。$\partial_x u = \partial_x r \cdot \partial_r u$ は $r \neq a$ で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{4\pi r}{3}\partial r/\partial x = -4\pi x/3 & (r < a) \\ -\frac{4\pi a^3}{3r^2}\partial r/\partial x = -4\pi a^3 x/3r^3 & (r > a) \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

となる。y, z についても同様。これらから $r \neq a$ で $u(x,y,z)$ が C^1 級であることが直ちに従う。$r = a$ では $\lim_{r\to a\pm 0} \partial u/\partial r = -4\pi a/3$ より u は r に関して C^1 級。これと r が x, y, z それぞれについて C^1 級であることから、$u(x,y,z)$ が $r = a$ でも C^1 級だと分かる。
(3) $(\spadesuit)$ を更に偏微分すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \begin{cases} -4\pi/3 & (r < a) \\ -4\pi a^3/3r^3 + 4\pi a^3 x^2/r^5 & (r > a) \end{cases}.$$

y, z についても同様。これらを加えて $x^2+y^2+z^2 = r^2$ を使うと示すべき等式を得る。
(1) は 3 点、(2) は 4 点、(3) は 3 点で採点しました。平均点は 6.9 点でした。
(1) では f が多変数関数なので「偏微分」と「(全) 微分」では意味が違うことに注意して下さい。また k 階偏導関数は $\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_n}^{k_n} f(x)$ $(k_1+\cdots+k_n = k)$ という形のものなので、一変数の時の記号 $f^{(k)}(x) := \partial_x^k f(x)$ を用いてはいけません。