担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (広義固有空間)

作成日：December 13, 2016　Version：0.1

問題 0. 前回の問題 2 の (5) の解答を参照。

問題 1. $A=(a_{ij})$ のとき $f(u_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}u_i$ である。従って $x=\sum_{j=1}^n x_j u_j$ とすると $f(x)=\sum_{j=1}^n x_j f(u_j)=\sum_{i,j=1}^n x_j a_{ij}u_i=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)u_i$. これが $y=\sum_{i=1}^n y_i u_i$ と等しいから $y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ が任意の $i=1,\dots,n$ に対し成立。これから $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ が分かる。

問題 2. (1) $p\in\mathbb{C}[x]$ とする。このとき $f_p=-p+p'$ である。よって $f_p\in\mathbb{C}[x]$. また $\deg(p')\le\deg(p)$ だから $\deg(f_p)=\deg(p)$ となる。

(2) 微分の線形性や $e^{\pm x}$ を掛けるという操作の線形性から従う。

(3) $f(u_1)=-u_1$, $f(u_2)=-u_2+u_1$, $f(u_3)=-u_3+2u_2$, $f(u_4)=-u_4+3u_3$ より

$$\begin{aligned}f[u_1,u_2,u_3,u_4]&=[-u_1,u_1-u_2,2u_2-u_3,3u_3-u_4]\\&=[u_1,u_2,u_3,u_4]\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

問題 3. (1) $\{v_1,\dots,v_n\}$ に関する f の表現行列を $B=(b_{ij})$ とすると $f(v_j)=\sum_{i=1}^n b_{ij}v_i$. また $\{u_1,\dots,u_n\}$ と $\{v_1,\dots,v_n\}$ は両方とも V の基底だから $v_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}u_i$, $u_j=\sum_{i=1}^n q_{ij}v_i$, $p_{ij},q_{ij}\in\mathbb{C}$ と書ける。上の第二式を第一式に代入すると

$$v_j=\sum_{i,k=1}^n p_{ij}q_{ki}v_k=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n q_{ki}p_{ij}\right)v_k.$$

つまり $\sum_{i=1}^n q_{ki}p_{ij}$ は $k=j$ のとき 1, $k\neq j$ のとき 0 となる。よって $P=(p_{ij})$, $Q=(q_{ij})$ とおくと $QP=E$, つまり $Q=P^{-1}$ が分かる。また

$$f(v_j)=\sum_{i=1}^n b_{ij}v_i=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n p_{ki}b_{ij}\right)u_k,\quad f(v_j)=\sum_{i=1}^n p_{ij}f(u_i)=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}p_{ij}\right)u_k$$

だから、任意の $k,j=1,\dots,n$ に対し $\sum_{i=1}^n p_{ki}b_{ij}=\sum_{i=1}^n a_{ki}p_{ij}$. つまり $PB=AP$ が成り立つから $A\sim B$ となる.

(2) $C\in[A]$ とすると $C=P^{-1}AP$ と書ける。$P=(p_{ij})$ とする。そして各 $j=1,\dots,n$ に対して $w_j:=\sum_{i=1}^n p_{ij}u_i$ とおく。P は正則だから $\{w_1,\dots,w_n\}$ は V の基底。また $P^{-1}=(q_{ij})$ とおくと $u_j=\sum_{i=1}^n q_{ij}w_i$. 基底 $\{w_1,\dots,w_n\}$ に関する f の表現行列を $B=(b_{ij})$ とすると, $f(w_j)=\sum_{i=1}^n b_{ij}w_i$. このとき

$$f(w_j)=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n p_{ki}b_{ij}\right)u_k,\quad f(w_j)=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}p_{ij}\right)u_k$$

となるから $PB=AP$, つまり $B=P^{-1}AP=C$ となる。従って C は基底 $\{w_1,\dots,w_n\}$ に関する表現行列である。

問題 4. (1) $W := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ とおく。任意の $u,v\in W$, $a,b\in\mathbb{C}$ を取る。すると任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $u,v\in W_\lambda$ である。W_λ は部分空間だから $au+bv\in W_\lambda$. これが任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して成り立つから $au+bv\in W$ となる。従って W は V の部分空間である。

(2) $V := \mathbb{C}^2 = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{C}\}$ と $W_1 := \{(x,0) \mid x\in\mathbb{C}\}$ 及び $W_2 := \{(0,y) \mid y\in\mathbb{C}\}$ について、W_1 と W_2 は V の部分空間だが $(1,0)\in W_1$ と $(0,1)\in W_2$ の V での和 $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ は $W_1\cup W_2$ に含まれない。

(3) W は部分空間である。実際 $x,y\in W$, $a,b\in\mathbb{C}$ として x,y を $x=v_1+\cdots+v_s$, $y=w_1+\cdots+w_s$ $(v_j,w_j\in W_j,\ j=1,\dots,s)$ と表示すると

$$ax+by=(av_1+bw_1)+\cdots+(av_s+bw_s),\quad av_j+bw_j\in W_j\quad (j=1,\dots,s).$$

従って $ax+by\in W$ だから W は部分空間である。また $W_j\subset W$ より $\bigcup_{j=1}^s W_j\subset W$. 次に $\bigcup_{j=1}^s W_j\subset X$ となる V の部分空間 X をとる。任意の $w_j\in W_j$ $(j=1,\dots,s)$ に対し $w_j\in X$ だから $w_1+\cdots+w_s\in X$. 従って $W\subset X$. よって W は $\bigcup_{j=1}^s W_j$ を含む最小の部分空間である。

問題 5. まず s 個の部分空間 $W_1,\dots,W_s$ の和 $W=W_1+\cdots+W_s$ が直和となるための条件を求めておく。

> $W=W_1+\cdots+W_s$ が直和であるためには，「$w_j\in W_j$ $(j=1,\dots,s)$ が $w_1+\cdots+w_s=0$ を満たせば $w_j=0$ $(j=1,\dots,s)$ となる」という主張が成り立つことが必要十分である。

実際、$W=W_1+\cdots+W_s$ が直和であるとし $w_1+\cdots+w_s=0$ を満たす $w_j\in W_j$ があったとする。この時 $0=0+\cdots+0$ だから直和の定義の「一意的に表せる」という条件より $w_j=0$ が必要。次に上記の「」の主張が成り立つと仮定し、$u\in W$ が二つの表現

$$u=w_1+\cdots+w_s=v_1+\cdots+v_s,\quad w_j,v_j\in W_j,\quad (j=1,\dots,s)$$

が成り立つと仮定する。このとき

$$(w_1-v_1)+\cdots+(w_s-v_s)=0,\quad (w_j-v_j)\in W_j,\quad (j=1,\dots,s)$$

だから「」の主張から $w_j=v_j$ $(j=1,\dots,s)$. 従って $u\in W$ の上記のような表示は一意的だから W は $W_1,\dots,W_s$ の直和である。

(1) まず $W=W_1+W_2$ が直和であると仮定し $u\in W_1\cap W_2$ とする。このとき $0=u+(-u)$, $u\in W_1$, $-u\in W_2$. 従って $u=-u=0$. よって $W_1\cap W_2=\{0\}$. 逆に $W_1\cap W_2=\{0\}$ と仮定し $u\in W=W_1+W_2$ とする。u を二通りに $u=w_1+w_2=w_1'+w_2'$, $w_i,w_i'\in W_i$ $(i=1,2)$ と書くと $v:=(w_1-w_1')=-(w_2-w_2')$. ここで $v\in W_1\cap W_2$ だから仮定から $v=0$. つまり $w_i=w_i'$ $(i=1,2)$ が成り立つ。従って u の表示が一意的なので W は直和。

(2) $d_i:=\dim W_i$ $(i=1,2)$, $k:=\dim(W_1\cap W_2)$, $d:=\dim(W_1+W_2)$ とおく。$W_1\cap W_2$ の基底 $\{u_1,\dots,u_k\}$ を取る。またこれを含む W_1,W_2 の基底をそれぞれ $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{d_1-k}\}$, $\{u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_{d_2-k}\}$ とする。このとき $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{d_1-k},w_1,\dots,w_{d_2-k}\}$ が $W=W_1+W_2$ の基底となる。実際 $x\in W$ を $x=x_1+x_2$, $x_i\in W_i$ $(i=1,2)$ とすると

$$x_1=\sum_{i=1}^k a_iu_i+\sum_{j=1}^{d_1-k} b_jv_j,\quad x_2=\sum_{i=1}^k c_iu_i+\sum_{j=1}^{d_2-k} d_jw_j$$

と書けるから

$$x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{k}(a_i + c_i)u_i + \sum_{j=1}^{d_1-k} b_j v_j + \sum_{j=1}^{d_2-k} d_j w_j.$$

また $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{j=1}^{d_1-k} b_i v_i + \sum_{j=1}^{d_2-k} d_i w_i = 0$ が成り立つと仮定し $x = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$, $x_1 = \sum_{j=1}^{d_1-k} b_j v_j$, $x_2 = \sum_{j=1}^{d_2-k} d_j w_j$ とおく。$x + x_1 + x_2 = 0$ であり、また $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$, $x \in W_1 \cap W_2$. 特に $x_1 = -x - x_2 \in W_2$ だから $x_1 \in W_1 \cap W_2$. $x_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i u_i$ と表せる。ところがこのとき

$$0 = x_1 - \sum_{i=1}^{k} p_i u_i = \sum_{i=1}^{k}(-p_i)u_i + \sum_{j=1}^{d_1-k} b_i v_i$$

であるが、$\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{d_1-k}\}$ は W_1 の基底だから $p_i = 0$ かつ $b_i = 0$. よって $x_1 = 0$. また $x_2 + x = 0$ となるが、このとき $a_i = 0$, $d_j = 0$. これは $u_1, \dots, u_k$, $v_1, \dots, v_{d_1-k}$, $w_1, \dots, w_{d_2-k}$ 達が $W = W_1 + W_2$ の基底をなすことを示している。よって

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) = k + (d_1 - k) + (d_2 - k) &= d_1 + d_2 - k \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ &\le \dim W_1 + \dim W_2.\end{aligned}$$

特に等号成立は $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, つまり $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ の時かつその時のみ成り立つ。

問題 6. W_1 の基底を $\{u_1, \dots, u_{n_1}\}$, W_2 の基底を $\{v_1, \dots, v_{n_2}\}$ とする。このとき問題 5 の解答と同様にして $\{u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}\}$ が $V = W_1 \oplus W_2$ の基底であることが分かる。この基底についての f の表現行列が問題にある行列の形になることを示す。$f(W_i) \subset W_i$ $(i = 1, 2)$ であるから $f(u_j) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} u_i$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n_2} b_{ij} v_i$ と書ける。特に基底 $\{u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}\}$ に関する f の表現行列は、$B_1 = (a_{ij})$, $B_2 = (b_{ij})$ とおくと

$$\begin{aligned} f[u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}] &= [u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}] \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1 1} & \cdots & a_{n_1 n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n_2 1} & \cdots & b_{n_2 n_2} \end{pmatrix} \\ &= [u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}] \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから上式の行列が f の表現行列となる。

問題 7. (1) λ が A の固有値なら $\ker(\lambda E - A) \neq \{0\}$, 特に $0 = \det(\lambda E - A) = \Phi_A(\lambda)$ である。逆に $\Phi_A(\lambda) = 0$ なら $(\lambda E - A)$ の行列式が 0 であることから $\ker(\lambda E - A) \neq \{0\}$.

(2) $\Phi_{P^{-1}AP}(x) = \det(xE - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xE - A)P) = \det(P^{-1})\det(xE - A)\det(P) = \Phi_A(x)$.

(3) $A \sim B$ なら $B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在する。従って前問より $\Phi_A(x) = \Phi_B(x)$. 固有方程式が一致するので A と B の固有値は重複度を込めて等しい。

問題 8. (1) $\Phi_A(x)=\Phi_B(x)=(x-\lambda)^2(x-\mu)$ なので A,B の固有値は重複度を込めて等しく、$\lambda=\mu$ ならば固有値は λ のみで重複度は 3 である。$\lambda\neq\mu$ ならば固有値は λ (重複度 2) と μ (重複度 1) である。

(2) $a:=\mu-\lambda$ とおく。このとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&a\end{pmatrix},\quad B-\lambda E=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&a\end{pmatrix}.$$

$a=0$ のとき $A-\lambda E=\mathbf{0}\neq B-\lambda E$. また $a\neq0$ ならば $\mathrm{rank}(A-\lambda E)=1\neq\mathrm{rank}(B-\lambda E)=2$. そこで $B=P^{-1}AP$ となる正則行列が存在したと仮定する。このとき、もし $a=0$ ならば $\mathbf{0}=P^{-1}(A-\lambda E)P=B-\lambda E$ となり矛盾。また $a\neq0$ ならば $1=\mathrm{rank}(A-\lambda E)=\mathrm{rank}(P^{-1}(A-\lambda E)P)=\mathrm{rank}(B-\lambda E)=2$ となり、いずれにしても矛盾する。

(3) $\lambda=\mu$ のとき、A の固有値 λ の固有空間は $\mathbb{C}^3$ 全体だから 3 次元。e_1,e_2,e_3 を $\mathbb{C}^3$ の標準基底とすると B の固有値 λ の固有空間は $\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_3$ で 2 次元。

次に $\lambda\neq\mu$ のとき、A の固有値 λ の固有空間は $\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2$ で 2 次元。固有値 μ の固有空間は $\mathbb{C}e_3$ で 1 次元。また B の固有値 λ の固有空間は $\mathbb{C}e_1$ で 1 次元。固有値 μ の固有空間は $\mathbb{C}e_3$ で 1 次元。(なおこの問題の結果からも前問 (2) の解答が得られる。)

問題 9. (1) $u\in W(\lambda)=\ker(A-\lambda E)$ とすると $(A-\lambda E)u=0$ だから $l=1$ として $(A-\lambda E)^l u=0$. よって $u\in\widetilde{W}(\lambda)$.

(2) $u,v\in\widetilde{W}(\lambda)$, $a,b\in\mathbb{C}$ とする。$(A-\lambda E)^l u=0$, $(A-\lambda E)^k v=0$ となる自然数 k,l が取れる。$n:=\max\{k,l\}$ とすると $(A-\lambda E)^n u=(A-\lambda E)^n v=0$. よって $(A-\lambda E)^n(au+bv)=a(A-\lambda E)^n u+b(A-\lambda E)^n v=0$ となるから $au+bv\in\widetilde{W}(\lambda)$. よって $\widetilde{W}(\lambda)$ は部分空間。

(3) $W(\lambda)\subset\widetilde{W}(\lambda)$ だから $W(\lambda)\neq\{0\}$ なら $\widetilde{W}(\lambda)\neq\{0\}$ である。逆に $\widetilde{W}(\lambda)\neq\{0\}$ と仮定する。$0\neq u\in\widetilde{W}(\lambda)$ を取る。この時自然数 l で $(A-\lambda E)^l u=0$ となるものが存在する。そのような l で最小なものを n とする。$v:=(A-\lambda E)^{n-1}u$ とすると $v\neq0$ であり $(A-\lambda E)v=0$ だから $v\in W(\lambda)\neq\{0\}$ である。

問題 10. (1) $u\in W(\lambda)$ とすると $Au=\lambda u\in W(\lambda)$. よって $W(\lambda)$ は不変部分空間である。

(2) $u\in\widetilde{W}(\lambda)$ とする。$(A-\lambda E)^l u=0$ となる自然数 l を取る。ここで任意の自然数 k に対して $A(A-\lambda E)^k=(A-\lambda E)^k A$ である。いま $(A-\lambda E)^l u=0$ であったから $0=A(A-\lambda E)^l u=(A-\lambda E)^l Au$ となる. 従って $Au\in\widetilde{W}(\lambda)$ となるから $\widetilde{W}(\lambda)$ は A の不変部分空間である.

問題 11. (1) $xE-A$ は次のような行列になる。

$$xE-A=\begin{pmatrix}x&1&-1\\0&x-2&0\\2&0&x-3\end{pmatrix}$$

従って $\Phi_A(x)=\det(xE-A)=x(x-2)(x-3)+2(x-2)=(x-2)^2(x-1)$.

(2) $A-E$, $A-2E$, $(A-2E)^2$ はそれぞれ次のようになる。

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix},\quad A-2E=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\0&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix},\quad (A-2E)^2=\begin{pmatrix}2&2&-1\\0&0&0\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

よって $\{e_1, e_2, e_3\}$ を $\mathbb{C}^3$ の標準基底とすると

$$W_1 = \mathbb{C}(e_1 + e_3), \quad W_2 = \mathbb{C}(e_1 + 2e_3) \oplus \mathbb{C}(e_2 + 2e_3).$$

但し後者について、$a(e_1 + 2e_3) + b(e_2 + 2e_3) = 0$ とすると $ae_1 + be_2 + 2(a+b)e_3 = 0$ より $a = b = 0$. つまり $e_1 + 2e_3$ と $e_2 + 2e_3$ は一次独立だから W_2 の上の表示は直和である。またこれから $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ となる。

(3) $W_1 + W_2$ が直和であることを示す。実際 $u \in W_1 \cap W_2$ とすると $u = a(e_1 + e_3) = b(e_1 + 2e_3) + c(e_2 + 2e_3)$ を満たす $a, b, c \in \mathbb{C}$ が取れる。特に $b = a = 2b + 2c$, $c = 0$ となるから $b = 0$, $a = 0$ が分かる。従って $u = 0$ で $W := W_1 + W_2$ は直和。前問から $W = W_1 \oplus W_2$ の次元は 3 であるが、これは全体 $\mathbb{C}^3$ の次元と一致する。よって $W = \mathbb{C}^3$ となる。

(4) 定義から $W_1 \subset \widetilde{W}(1)$, $W_2 \subset \widetilde{W}(2)$ が分かる。逆の包含関係を示す。

まず $0 \neq u \in \widetilde{W}(1)$ を取り、$(A - E)^l u = 0$ となる自然数 l で最小のものを n とする。この時 $v := (A - E)^{n-1} u \neq 0$, $(A - E)^n u = 0$ となっている。ここで $n \geq 2$ と仮定すると $w = (A - E)^{n-2} u \neq 0$ で $v = (A - E)w$, $(A - E)v = 0$ となっている。特に $v \in W_1 = \mathbb{C}(e_1 + e_3)$ より $v = a(e_1 + e_3)$ とおける。$w = pe_1 + qe_2 + re_3$ とおくと $v = (A - E)w$ より $-p - q + r = a$, $q = 0$, $-2p - 2r = a$ となるが、これから $p = r$ が分かり $w = p(e_1 + e_3) \in W_1$ となって $(A - E)w = 0$. これは $v \neq 0$ に矛盾。以上より $n = 1$ である。よって $u \in W_1$. 従って $W_1 = \widetilde{W}(1)$ となる。

次に $0 \neq u \in \widetilde{W}(2)$ として $(A - 2E)^l u = 0$ となる自然数 l で最小のものを n とする。$n = 1, 2$ なら $u \in W_2$. そこで $n \geq 3$ と仮定し $w = (A - 2E)^{n-3} u$, $x := (A - 2E)^{n-2} u$, $v = (A - 2E)^{n-1} u$ とおく。このとき $w, x, v \neq 0$ であり $(A - 2E)w = x$, $(A - 2E)x = v$, $(A - 2E)v = 0$ となっている。また $u_1 := e_1 + 2e_3$, $u_2 := e_2 + 2e_3$ とおくと $(A - 2E)u_1 = 0$, $(A - 2E)u_2 = u_1$. また $A - 2E$ の具体的な形から $\ker(A - 2E) = \mathbb{C}u_1$ が分かる。そこで $v \in \ker(A - 2E)$, $x \in \ker((A - 2E)^2) = W_2 = \mathbb{C}u_1 \oplus \mathbb{C}u_2$ より $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$,$x = b_1 u_1 + b_2 u_2$,$v = cu_1$ とおく。このとき $(A - 2E)u_2 = u_1$, $(A - 2E)x = v$ より $b_2 = c$. また $(A - 2E)w = x$ を具体的に計算して $c = 0$ が分かる。すると $v = 0$ となり矛盾が生じる。従って $n \leq 2$ であり $u \in W_2$ となる。従って $W_2 = \widetilde{W}(2)$ が成り立つ。

((4) の別解) $\widetilde{W}(2) \subset W_2$ の別証明を与える。$f_1(x) := (x - 2)^2$, $f_2(x) := (x - 1)$ とおく. このとき $\Phi_A(x) = f_1(x) f_2(x)$, $\gcd(f_1, f_2) = 1$ が成り立つ。従って $f_1 m_1 + f_2 m_2 = 1$ となる多項式 $m_1, m_2 \in \mathbb{C}[x]$ が存在する。また $\Phi_A(A) = 0$ が成り立つ (Cayley-Hamilton の定理)。$u \in \widetilde{W}(2)$ とすると $(A - 2E)^l u = 0$ となる自然数 l を取ることが出来る。このとき多項式 $(x - 2)^l$ と多項式 $f_2 m_2$ の最大公約式は 1 である。実際、もし最大公約式の次数が正ならば、最大公約式は $(x - 2)^l$ を割るから $(x - 2)$ は最大公約式を割る。従って $f_2 m_2$ も $(x - 2)$ で割れる。ところが $f_1 m_1 = (x - 2)^2 m_1$ も $(x - 2)$ で割れるから $\gcd(f_1, f_2) = 1$ に矛盾する。従って $p, q \in \mathbb{C}[x]$ で $(x - 2)^l p(x) + f_2(x) m_2(x) q(x) = 1$ となるものが存在する。以上より次が成り立つ。

$$E = (A - 2E)^l p(A) + f_2(A) m_2(A) q(A) = f_1(A) m_1(A) + f_2(A) m_2(A),$$
$$f_1(A) f_2(A) = \Phi_A(A) = \mathbf{0}.$$

上記に現れた行列は全て可換であるから $(A - 2E)^l p(A) u = p(A)(A - 2E)^l u = 0$. 従って $u = f_2(A) m_2(A) q(A) u$ が成り立つ。ところが $f_1(A) = (A - 2E)^2$ だから上式下段より

$$(A - 2E)^2 u = f_1(A) u = f_1(A) f_2(A) m_2(A) q(A) u = 0$$

となる。従って $u \in W_2$ となる。

問題 12. $f=0$ または $g=0$ ならば $f(A)=0$ または $g(A)=0$ だから与式は正しい。そこで $f \neq 0, g \neq 0$ として $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$, $a_m \neq 0$, $b_k \neq 0$ と書く。この時 $f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ と A は可換。従って任意の j について $f(A)$ と A^j は可換。よって $g(A)=b_0E+b_1A+\cdots+b_kA^k$ は $f(A)$ と可換である。

問題 13. $W := W_1+\cdots+W_s$ とおく。任意の $u \in \mathbb{C}^n$ を取る。このとき (1) より $E = P_1+\cdots+P_s$ より $u=P_1u+\cdots+P_su$ であり $P_ju \in W_j = \mathrm{Im}(P_j)$ だから $\mathbb{C}^n = W$. つまり $\mathbb{C}^n = W_1+\cdots+W_s$ である。次にこれが直和であることを示す. そのために $w_j = P_ju_j \in W_j$ $(j=1,\ldots,s)$ が $w_1+\cdots+w_s=0$ を満たすとする。これは $P_1u_1+\cdots+P_su_s=0$ を意味するが、各 $i=1,\ldots,s$ についてこの式の左から P_i を掛けると

$$0 = P_i(P_1u_1+\cdots+P_iu_i+\cdots+P_su_s) = P_iP_1u_1+\cdots+P_i^2u_i+\cdots+P_iP_su_s.$$

条件 (2) より $j \neq i$ なら $P_iP_ju_j=0$ であり、条件 (3) より $P_i^2u_i = P_iu_i$. よって $w_i = P_iu_i = 0$ が各 $i=1,\ldots,s$ に対して成り立つから $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.

問題 14. (1) $\Phi(A) = \mathbf{0}$ と仮定しているから $f(A)g(A) = \Phi(A) = \mathbf{0}$. また $f(x)p(x)+g(x)q(x)=1$ であり、1 という多項式に A を代入すると定義から E であるから $p(A)f(A)+q(A)g(A)=E$ が成り立つ。

(2) $PQ = f(A)p(A)g(A)q(A) = f(A)g(A)p(A)q(A) = \mathbf{0}$. $QP=\mathbf{0}$ も同様。また設問 (1) より $P+Q=E$ であり、これに P を掛け $PQ=\mathbf{0}$ を用いると $P^2=P$. $Q^2=Q$ も同様。

(3) 任意の $u \in \mathbb{C}^n$ に対して $g(A)Pu = g(A)f(A)p(A)u = 0$ が設問 (1) から成り立つ。よって $\mathrm{Im}(P) \subset \ker(g(A))$. 次に $g(A)u=0$ とする。このとき $Qu=0$. よって $E=P+Q$ を u に施して $u=Pu$. つまり $u \in \mathrm{Im}(P)$ となり $\mathrm{Im}(P) = \ker(g(A))$ が成り立つ。$\mathrm{Im}(Q) = \ker(f(A))$ も同様。

(4) 問題 13 より $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Im}(Q)$ となり、設問 (3) より $\mathbb{C}^n = \ker(f(A)) \oplus \ker(g(A))$.

問題 15. (1) f_λ は λ を根としない。実際、もし λ が f_λ の根なら $\Phi_A(x) = f_\lambda(x)(x-\lambda)^{n(\lambda)}$ より λ の重複度が $n(\lambda)+1$ 以上となってしまう。よって f_λ と $(x-\lambda)^{n(\lambda)}$ の両方を割る多項式は定数のみ。従ってこれらの最大公約式は 1 である。

(2) 問題 14(4) で $f(x)=(x-\lambda)^{n(\lambda)}$, $g(x)=f_\lambda(x)$ とすればよい。

(3) $u \in \ker((A-\lambda)^{n(\lambda)})$ は $(A-\lambda)^{n(\lambda)}u=0$ を満たす。特に $u \in \widetilde{W}(\lambda)$ である。

(4) $f_\lambda(x)q(x)$ が $(x-\lambda)$ で割れると仮定すると, $(x-\lambda)^{n(\lambda)}p(x)+f_\lambda(x)q(x)=1$ も $(x-\lambda)$ で割れることになり矛盾する。

(5) $(A-\lambda E)^l a(A) + f_\lambda(A)q(A)b(A) = E$ である。これを u に施して $(A-\lambda E)^l u = 0$ を用いると $f_\lambda(A)q(A)b(A)u = u$ となる。

(6) $(x-\lambda)^{n(\lambda)}f_\lambda(x) = \Phi_A(x)$ だから Cayley-Hamilton の定理より $(A-\lambda E)^{n(\lambda)}f_\lambda(A) = \mathbf{0}$. よって $v \in \mathbb{C}^n$ に対して $(A-\lambda E)^{n(\lambda)}f_\lambda(A)q(A)v = 0$ だから $f_\lambda(A)q(A)v \in \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)})$. 特に $v=b(A)u$ として設問 (5) より $u \in \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)})$ となる。従って $\widetilde{W}(\lambda) = \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)})$ である。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 16. (1) $f_1,\dots,f_s$ 全てを割る定数でない多項式 g があったとするとそれは $\Phi_A(x)$ を割る。従ってある固有値 λ が存在し g は $(x-\lambda)$ で割れる。$\lambda=\lambda_1$ として一般性を失わない。ところが $f_1(x)$ は $(x-\lambda_1)$ では割れず矛盾である。

(2) $\sum_{j=1}^s f_j m_j = 1$ より $P_1+\dots+P_s=E$. また $i\neq j$ とすると $(x-\lambda_i)^{n_i}f_i(x)=(x-\lambda_j)^{n_j}f_j(x)=\Phi_A(x)$ より

$$f_i(x)f_j(x)=\Phi_A(x)\frac{\Phi_A(x)}{(x-\lambda_i)^{n_i}(x-\lambda_j)^{n_j}}$$

となるが、この式の分数で表示された項は $i\neq j$ より多項式である。よって $\Phi_A(A)=\mathbf{0}$ より $f_i(A)f_j(A)=\mathbf{0}$. 従って $P_iP_j=\mathbf{0}$ が成り立つ。最後に $P_1+\dots+P_s=E$ に P_i を掛けると $P_i^2=P_i$ が分かる。

(3) まず問題 15 より $\widetilde{W}(\lambda_j)=\ker((A-\lambda_jE)^{n_j})$ に注意しておく。$u\in \mathrm{Im}(P_i)$ として $u=P_iv=m_i(A)f_i(A)v$ と書く。このとき $(A-\lambda_iE)^{n_i}f_i(A)=\Phi_A(A)=\mathbf{0}$ に注意すると $(A-\lambda_iE)^{n_i}u=(A-\lambda_iE)^{n_i}f_i(A)m_i(A)v=0$ となる。よって $u\in\widetilde{W}(\lambda_i)$ となる。

逆に $u\in\widetilde{W}(\lambda_i)$ とする。$u\in\mathrm{Im}(P_i)$ を示すために次に注意する: $j\neq i$ のとき $f_j(x)$ は $(x-\lambda_i)^{n_i}$ で割れる。実際 $\Phi_A(x)=\prod_{l=1}^s(x-\lambda_l)^{n_l}$ だから $f_j(x)=\prod_{l\neq j}(x-\lambda_l)^{n_l}$ となる。この表示において $j\neq i$ なら $l=i$ の項が積の中にある。よって $f_j(x)$ は $(x-\lambda_i)^{n_i}$ で割れる。

そこで $j\neq i$ に対して $f_j(x)=g_{ij}(x)(x-\lambda_i)^{n_i}$ とおく。$j\neq i$ のとき $f_j(A)u=g_{ij}(A)(A-\lambda_iE)^{n_i}u=0$ となる。特に $P_ju=m_j(A)f_j(A)u=0$ が $i\neq j$ に対して成り立つ。よって $u=\sum_{j=1}^s P_ju=P_iu$ となり $u\in\mathrm{Im}(P_i)=W_i$ となる。

問題 17. (1) A を $\mathbb{C}^n$ 上の線形写像と考える。$\widetilde{W}(\lambda_i)=\ker((A-\lambda_iE)^{n_i})$ であった。これは A の不変部分空間であり、$(A-\lambda_iE)^{n_i}$ を $\widetilde{W}(\lambda_i)$ に制限して得られる線形写像は $\mathbf{0}$ である。従ってその表現行列は基底の取り方によらず $\mathbf{0}$. いま $A-\lambda_iE$ の $\widetilde{W}(\lambda_i)$ への制限の表現行列は $A_i-\lambda_iE_i$ であるから $(A_i-\lambda_iE_i)^{n_i}=\mathbf{0}$.

(2) $(A_i-\mu E_i)u=0$ となる $0\neq u\in\widetilde{W}(\lambda_i)$ があったとする。この時 $(A_i-\lambda_iE)u=(\mu-\lambda_i)u$. これを繰り返すと $0=(A_i-\lambda_iE)^{n_i}u=(\mu-\lambda_i)^{n_i}u$. $u\neq 0$ だから $\mu=\lambda_i$.

(3) 問題 6 を用いる。つまり各 $\widetilde{W}(\lambda_i)$ の基底をとりそれらを順に並べると $\mathbb{C}^n=\widetilde{W}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\widetilde{W}(\lambda_s)$ となるからこれは $\mathbb{C}^n$ の基底である。$\widetilde{W}(\lambda_i)$ は A の不変部分空間だから問題 6 により A の表現行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$$

よって $xE-A$ の表現行列は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} xE_1-A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & xE_s-A_s \end{pmatrix}$$

この行列式は $\prod_{i=1}^s\det(xE_i-A_i)=\prod_{i=1}^s\Phi_{A_i}(x)$ であり $\Phi_A(x)$ と一致する。

(4) 問題 (2) より $\Phi_{A_i}(x)=(x-\lambda_i)^{d_i}$. よって問題 (3) より $\Phi_A(x)=\prod_{i=1}^s(x-\lambda_i)^{d_i}$. これより $d_i=n_i$ となる。