担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

広義固有空間

作成日：November 13, 2016 Updated：December 02, 2016 Version：1.0 実施日：December 08, 2016

今回と次回は行列の標準形を扱う。n 次複素正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})$ と書く。

問題 0. (プリント Y105 の問題 2(4)) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $A \sim B \iff$ 「ある正則行列 $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して $B = P^{-1}AP$」で定まる $\sim$ は同値関係であることを示せ。

$A \sim B$ のとき A と B は相似と呼ばれることがある。行列の標準形の問題は、与えられた $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して上記の同値関係による同値類 $[A]$ の中で（つまり A と相似な行列で）簡単な表示を持つ行列を見つけることである。

標準形について考える前に線形写像に関して幾つか復習しておこう。

線形写像の表現行列

V を n 次元複素ベクトル空間とし線形写像 $f : V \to V$ が与えられたとする。V の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ を固定すると、f の $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列が定義される。それは $f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$ と基底の線形結合で表した時の係数 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ からなる行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ のことであった。

問題 1. 線形写像 $f : V \to V$ の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列を A とする。任意の $x \in V$ を $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ と書き $f(x) = \sum_{i=1}^n y_i u_i$ とする．このとき二つのベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ の間に $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ が成り立つことを示せ。

問題 2. $V := \{p \in \mathbb{C}[x] \mid \deg(f) \le 3\}$ を 3 次以下の複素係数 1 変数多項式の全体のなす複素 4 次元線形空間とする。任意の $p \in \mathbb{C}[x]$ に対し関数 f_p を次のように定義する。

$$f_p(x) := e^x \frac{d}{dx}(e^{-x} p(x)).$$

(1) 任意の $p \in \mathbb{C}[x]$ に対して $f_p \in \mathbb{C}[x]$ でありまた $\deg(f_p) = \deg(p)$ であることを示せ。

(2) 設問 (1) より写像 $f : V \to V$ を $f(p) := f_p$ として定義出来るが、これが V 上の線形写像であることを示せ。

(3) $u_1 := 1$, $u_2 := x$, $u_3 := x^2$, $u_4 := x^3$ とする。線形写像 $f : V \to V$ の基底 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ に関する表現行列を求めよ。

問題 3. V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とし $\{u_1, \ldots, u_n\}$ を V の基底とする。線形写像 $f : V \to V$ が与えられており、f の $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列を A とする．また行列 A に対して $[A]$ で上記の同値関係 $\sim$ に関する同値類を表す。

(1) 別の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に関する f の表現行列を B とするとき $A \sim B$ を示せ。

(2) 任意の行列 $C \in [A]$ は f のある基底 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ に関する表現行列であることを示せ。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

部分空間の直和

以下では V は特に断らない限り $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とする。V 内の部分空間 $W_1,\dots,W_s$ に対して V の部分集合

$$W := \{u \in V \mid u = w_1 + \cdots + w_s \text{ となる } w_j \in W_j\,(j=1,\dots,s) \text{ が存在する}\}$$

は線形空間となる。これを $W_1,\dots,W_s$ の和と呼び $W = W_1 + \cdots + W_s$ と書く。また和 $W = W_1 + \cdots + W_s$ の任意の元 $u \in W$ が一意的に

$$u = w_1 + \cdots + w_s, \quad w_j \in W_j \ (j = 1,\dots,s)$$

と表されるとき、W は $W_1,\dots,W_s$ の直和であるといい $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ と書く。

問題 4.

(1) Λ を添字集合として任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して V の部分空間 W_λ が与えられているとする。このとき $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ は V の部分空間であることを示せ。

(2) V 内の二つの部分空間 W_1, W_2 に対してその和集合 $W_1 \cup W_2$ は必ずしも部分空間にならない。これを例を挙げて説明せよ.

(3) V 内の部分空間 $W_1,\dots,W_s$ に対して和 $W := W_1 + \cdots + W_s$ は $\bigcup_{j=1}^s W_j$ を含む最小の部分空間であることを示せ。

問題 5. W_1, W_2 を V の部分空間とし $W := W_1 + W_2$ とする。

(1) W が W_1, W_2 の直和 $\iff$ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ を示せ。

(2) 不等式 $\dim W \le \dim W_1 + \dim W_2$ を示せ。またこの不等式で等号が成り立つのは W が W_1, W_2 の直和のとき、かつそのときに限ることを示せ。

問題 6. $V = W_1 \oplus W_2$ だとし、また線形写像 $f : V \to V$ が $f(W_i) \subset W_i$ $(i = 1,2)$ を満たすとする。このとき f は次の形の表現行列 A を持つことを示せ。ただし $n_i := \dim W_i$ $(i=1,2)$ として $B_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ $(i=1,2)$ であり、また $\mathbf{0}$ は適当なサイズの 0 行列を表す。

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix}.$$

固有空間

これ以後 $V = \mathbb{C}^n$ として V 上の線形写像を (標準基底を用いて) 行列と同一視する。

行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ とは、ある 0 でない元 $u \in V$ が存在して $Au = \lambda u$ が成り立つもののことであった。A の固有値 λ に対し、V の部分空間 $\ker(A - \lambda E) = \{u \in V \mid Au = \lambda u\}$ を λ に対する固有空間、$\ker(A-\lambda E)$ の 0 でない元を λ に対する固有ベクトルと呼んだ（但し E は n 次単位行列）。任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $W(\lambda) := \ker(A - \lambda E)$ とおけば、次が成り立つ：「λ が A の固有値 $\iff$ $W(\lambda) \neq \{0\}$」

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ と行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ について次の問いに答えよ。

(1) λ が A の固有値であるためには、λ が行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x) = \det(xE - A)$ の根、つまり $\Phi_A(\lambda) = 0$ となることが必要十分であることを示せ。

(2) $P \in M_n(\mathbb{C})$ を正則行列とする。このとき $\Phi_{P^{-1}AP}(x) = \Phi_A(x)$ を示せ。

(3) $B \in M_n(\mathbb{C})$ が $A \sim B$ をみたすとき、A の固有値と B の固有値は重複度を込めて等しいことを示せ。但し A の固有値 λ の重複度とは、固有多項式 $\Phi_A(x)$ の根 (零点) としての重複度のことである。

つまり $[A]$ に属する行列は重複度を込めて同じ固有値を持つ。しかしこの逆対して $A \sim B$ は一般には成り立たない。

問題 8. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ とする。次の 2 つの行列 A, B で定まる $\mathbb{C}^3$ 上の線形写像を考える。

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(1) A と B の固有値は重複度を込めて等しいことを示せ。

(2) $A \not\sim B$ であることを示せ。

(3) $\lambda \neq \mu$ として A と B の固有空間と次元を求めよ。

$A \sim B$ となるための必要十分条件を与えるのが Jordan 標準形である。それに関して鍵となる「広義固有空間分解」を考える。

広義固有空間

$A \in M_n(\mathbb{C})$ と任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$V = \mathbb{C}^n$ の部分集合 $\widetilde{W}(\lambda)$ を次で定義する。

$$\widetilde{W}(\lambda) := \{u \in V \mid \text{ある自然数 } l \text{ が存在して } (A - \lambda E)^l u = 0\}.$$

問題 9. $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(1) $W(\lambda) \subset \widetilde{W}(\lambda)$ を示せ。

(2) $\widetilde{W}(\lambda)$ は V の部分空間であることを示せ。

(3) $\widetilde{W}(\lambda) \neq \{0\}$ であるためには $W(\lambda) \neq \{0\}$ であることが必要十分であることを示せ。

$\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値のとき $\widetilde{W}(\lambda)$ を λ の広義固有空間と呼ぶ。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10. $A \in M_n(\mathbb{C})$ と A の固有値 λ に対して次の問いに答えよ。

(1) 固有空間 $W(\lambda)$ は A の不変部分空間であること、即ち $u \in W(\lambda)$ ならば $Au \in W(\lambda)$) であることを示せ。

(2) 広義固有空間 $\widetilde{W}(\lambda)$ は A の不変部分空間であることを示せ。

広義固有空間について次が成り立つことが知られている。

定理 1. 任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ を取る。また A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ とし λ_j の重複度を n_j とする。このとき次が成り立つ。

(1) $\widetilde{W}(\lambda_j) = \ker((A - \lambda_j E)^{n_j}) \quad (j = 1, \dots, s)$.

(2) $\widetilde{W}(\lambda_1) + \cdots + \widetilde{W}(\lambda_s)$ は直和であり $\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_s)$.

(3) $\dim \widetilde{W}(\lambda_j) = n_j \quad (j = 1, \dots, s)$.

上記の定理を具体例で検証してみよう。

問題 11. 次のような 3 次正方行列 A を考える。また A の固有多項式を $\Phi_A(x)$ とする。

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\Phi_A(x) = (x-1)(x-2)^2$ を確認せよ。

(2) $\mathbb{C}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を次で定義すると $\dim W_1 = 1, \dim W_2 = 2$ となることを示せ。

$$W_1 := \ker(A - E), \quad W_2 := \ker\left((A - 2E)^2\right).$$

(3) $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$ を示せ。

(4) $W_1 = \widetilde{W}(1), W_2 = \widetilde{W}(2)$ を示せ。

問題 6 と定理 1 により A は次の型の行列と同値であることが分かる。

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_s \end{pmatrix}$$

ここで各 A_i は $n_j := \dim \widetilde{W}(\lambda_j)$ 次の正方行列。$(A - \lambda E)^{n_j}$ は $\widetilde{W}(\lambda_j)$ 上で $\mathbf{0}$ なので A_j の $\widetilde{W}(\lambda_j)$ での固有値は λ_j しかない。

従って行列 A と相似な行列で簡単な表示を持つものを見つけるという問題は、固有値が一つだけの行列に対して同様の問題を考えることに帰着されたことになる。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

その他の問題: 定理 1 の証明

定理 1 を証明してみよう。まず次の事実 (プリント Y104 問題 22) を思い出す：

> $f_1,\dots,f_s \in \mathbb{C}[x]$ が $\gcd(f_1,\dots,f_s)=1$ を満たすなら、ある $m_1,\dots,m_s \in \mathbb{C}[x]$ が存在して $f_1(x)m_1(x)+\cdots+f_s(x)m_s(x)=1$.

上記の性質を使って定理 1 を証明するためには更に 3 つの事実が必要である。1 つ目は Cayley-Hamilton の定理である。一般に行列 A と多項式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m \in \mathbb{C}[x]$ が与えられたとき、行列 $f(A)$ を次で定義する。

$$f(A) := a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m.$$

問題 12. 任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ と $f,g \in \mathbb{C}[x]$ に対して $f(A)g(A)=g(A)f(A)$ を示せ。

定理 2. (Cayley-Hamilton の定理) 任意の行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対しその固有多項式を $\Phi_A(x) := \det(xE-A)$ と書くと $\Phi_A(A)=\mathbf{0}$.

残りの 2 つの事実を以下の問題で扱おう。

問題 13. s 個の行列 $P_1,\dots,P_s \in M_n(\mathbb{C})$ が次の 3 つの条件を満たすとする。

(1) $\sum_{i=1}^{s} P_i = E$.　(2) $P_iP_j = \mathbf{0}$ $(i,j=1,\dots,s,\ i\neq j)$.　(3) $P_i^2=P_i$ $(i=1,\dots,s)$.

このとき $W_i := \mathrm{Im}(P_i)$ とすると和 $W_1+\cdots+W_s$ は直和であること、そして $\mathbb{C}^n = W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ が成り立つことを示せ。

問題 14. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし, 二つの多項式 $f,g \in \mathbb{C}[x]$ が $\gcd(f,g)=1$ を満たすとする. また $\Phi := fg \in \mathbb{C}[x]$ に対して $\Phi(A)=\mathbf{0}$ が成り立つと仮定する。

(1) $p,q \in \mathbb{C}[x]$ を $fp+gq=1$ となる多項式とする。このとき次が成り立つことを示せ (Cayley-Hamilton の定理は用いて良い):

$$f(A)g(A)=\mathbf{0}, \quad f(A)p(A)+g(A)q(A)=E.$$

(2) $P := f(A)p(A)$, $Q := g(A)q(A)$ とおくと次が成り立つことを示せ。

$$PQ=QP=\mathbf{0}, \quad P=P^2, \quad Q=Q^2.$$

(3) $\mathrm{Im}(P)=\ker(g(A))$, $\mathrm{Im}(Q)=\ker(f(A))$ を示せ。

(4) $\mathbb{C}^n = \ker(f(A))\oplus\ker(g(A))$ を示せ。

上記の問題から以下のように定理 1 が証明できる。まず λ を A の固有値、$n(\lambda)$ をその重複度とする。固有多項式 $\Phi_A(x)$ を $(x-\lambda)^{n(\lambda)}$ で割った商を $f_\lambda(x) \in \mathbb{C}[x]$ とする。

問題 15. 上の状況で以下の問いに答えよ。

(1) $\gcd(f_\lambda, (x-\lambda)^{n(\lambda)}) = 1$ を示せ。

(2) 設問 (1) より $p, q \in \mathbb{C}[x]$ があって $(x-\lambda)^{n(\lambda)}p(x) + f_\lambda(x)q(x) = 1$. このとき $\mathbb{C}^n = \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)}) \oplus \ker(f_\lambda(A))$ を示せ。

(3) $\ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)}) \subset \widetilde{W}(\lambda)$ を示せ。以下では $\widetilde{W}(\lambda) \subset \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)})$ を示すために $u \in \widetilde{W}(\lambda)$ として $l \in \mathbb{N}$ を $(A-\lambda E)^l u = 0$ となるものとする。

(4) $(x-\lambda)^l$ と $f_\lambda(x)q(x)$ の最大公約式は 1 であることを示せ。

(5) 上記の設問より $(x-\lambda)^l a(x) + f_\lambda(x)q(x)b(x) = 1$ となる $a, b \in \mathbb{C}[x]$ が存在する。$u = f_\lambda(A)q(A)b(A)u$ を示せ。

(6) 任意の $v \in \mathbb{C}^n$ に対して $f_\lambda(A)q(A)v \in \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)})$ を示せ。これから $\widetilde{W}(\lambda) \subset \ker((A-\lambda E)^{n(\lambda)})$ を導け。

次に A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ とし、λ_j の重複度を n_j とする。問題 15 より $\widetilde{W}(\lambda_j) = \ker((A-\lambda_j E)^{n_j})$ が成り立ち、定理 1(1) が成り立つことが分かる。次に定理 1(2) を示すため $f_j(x) := \Phi_A(x)/(x-\lambda_j)^{n_j}$ としよう。

問題 16. 上記の設定で次の問いに答えよ。

(1) $\gcd(f_1, \ldots, f_s) = 1$ を示せ。これからある $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{C}[x]$ が存在して $f_1(x)m_1(x) + \cdots + f_s(x)m_s(x) = 1$ となる。

(2) $P_i := f_i(A)m_i(A)$ とすると $P_1, \ldots, P_s$ は問題 13 の 3 つの条件を満たすことを示せ。

(3) $W_i := \mathrm{Im}(P_i)$ とすれば $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$. $W_i = \widetilde{W}(\lambda_i)$ となることを示せ。

従って定理 1(2) が証明された。定理 1(3) を示すために $d_j := \dim \widetilde{W}(\lambda_j)$ とおく。以下の問題では上記の問題 16 の記号を用いることにする。

問題 17. 任意の $i = 1, \ldots, s$ を固定する。問題 10 より A を $\ker((A-\lambda_i E)^{n_i}) = \widetilde{W}(\lambda_i)$ 上の線形写像と考える。$\widetilde{W}(\lambda_i)$ 上の線形写像としての A の ($\widetilde{W}(\lambda_i)$ のある基底についての) 表現行列を A_i とする。

(1) $(A_i - \lambda_i E_i)^{n_i} = \mathbf{0}$ を示せ。ただし E_i は $d_i = \dim \widetilde{W}(\lambda_i)$ 次の単位行列を表す。

(2) A_i の固有値は λ_i のみであることを示せ。

(3) $\Phi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} \Phi_{A_i}(x)$ を示せ。

(4) 任意の $i = 1, \ldots, s$ に対して $n_i = d_i$ を示せ。

これで定理 1 の証明が終わったことになる。