担当教員: 柳田　伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (11/24) 解答

作成日: 11/24/2016　更新日: 11/30/2016　Version: 1.0　配布日: 12/01/2016

学生番号 ________________ 名前 ________________

問題 1. a_1, a_2, a_3, a_4 を相異なる四つの複素数であってどれも絶対値が 1 未満のものとする。C を複素数平面の中心が 0, 半径が 1 の円周に反時計回りに向きを付けた積分路とする。このとき次の線積分を計算せよ。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}.$$

解答. $f(z) := 1/(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$ は有理関数だから極 $z = a_1, \ldots, a_4$ を除き正則関数。従って留数定理を適用できる。C の囲む領域に全ての極が含まれるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z).$$

ここで例えば

$$\operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) = \lim_{z\to a_1}(z-a_1)f(z) = \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$

だから

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z) &= \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} + \frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} \\ &\quad + \frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} + \frac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}.\end{aligned} \tag{1}$$

これは 0 に等しい。よって求める積分は 0.

10 点満点で採点しました。式 (1) までの解答は 7 点です。平均点は 4.2 点でした。
最後の $= 0$ は直接計算でも確認できますが、次のような議論からも従います：
(1) の右辺を a_1 の有理関数と思って $g(a_1)$ と書く。有理関数 $g(z)$ の $\mathbb{C}$ 内の極の候補は a_2, a_3, a_4 に限られるが、例えば a_2 での留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=a_2} g(z) = \frac{1}{(a_2-a_3)(a_2-a_4)} + \frac{-1}{(a_2-a_3)(a_2-a_4)} + 0 + 0 = 0.$$

同様に a_3 や a_4 での留数も 0. また無限遠点 $z=\infty$ は $w = 1/z$ と変数変換してみれば分かるように $g(z)$ の極でないこともわかる。よって $g(z)$ は極を持たない有理型関数なので定数。その値は $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ より 0 である。

(小テスト中にヒントとして言及しましたが) この問題の積分はセット Y109 の問題 3(4) に似たものです。上の議論の仕方を真似ると、もっと一般に次のことが言えます：
$n \geq 2$ とする。$a_1, \ldots, a_n$ を相異なる複素数、C をそれらを全て囲む積分路とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)} = 0.$$