担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (同値関係と商集合)

作成日: 12/05/2016　更新日: 12/18/2016　Version: 0.2

問題 1. $x \sim y$ ならば $y \sim x$ であるが、$x \in X$ に対して $x \sim y$ となる y が存在するかどうか分からない。ここが議論の間違いの部分である。
対称律と推移律が成り立ち反射律の成り立たない例は、$X; = [0,1]$ として $x, y \in X$ に対し「$x \sim y \iff 1/2 \le x \le 1$ かつ $1/2 \le y \le 1$」で定まる二項関係が挙げられる。実際 $x = 0$ に対して $x \sim x$ は成り立たない。また $x \sim y$ なら $1/2 \le y \le 1$ かつ $1/2 \le x \le 1$ だから $y \sim x$. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $1/2 \le x \le 1$ かつ $1/2 \le y \le 1$ であり、$1/2 \le y \le 1$ かつ $1/2 \le z \le 1$ だから特に $1/2 \le x \le 1$ かつ $1/2 \le z \le 1$. つまり $x \sim z$.

問題 2.

(1) 任意の $x \in X$ に対して $0 = x - x \in V$ より $x \sim x$. また $x \sim y$ なら $x - y \in V$ だから $y - x = -(x-y) \in V$ となり $y \sim x$. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $x - z = (x-y) + (y-z) \in V$ だから $x \sim z$. よって $\sim$ は X 上の同値関係.

(2) $x \in \mathbb{Z}$ に対して $0 = x - x = 0n$ だから $x \sim x$. $x \sim y$ なら $x - y = na$ となる $a \in \mathbb{Z}$ を取れる。このとき $y - x = n(-a)$ だから $y \sim x$. また $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $x - y = na$, $y - z = nb$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$ を取れる。このとき $x - z = x - y + y - z = n(a+b) \in n\mathbb{Z}$ より $x \sim z$ となるから $\sim$ は同値関係。

(3) $x \in X$ に対して $x = x$ だから $x \sim x$. また $x \sim y$ ならば $x = y$ または $x, y \in A$ であるが、いずれにしても $y \sim x$. 次に $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする。$x = y$ のとき $y = z$ なら $x = z$ であるから $x \sim z$. また $y, z \in A$ なら $x \in A$ だから $x \sim z$. 次に $x, y \in A$ とする. このとき $y = z$ なら $z \in A$ だから、$x \sim z$ かつ $y, z \in A$ なら $x, z \in A$ だから $x \sim z$. よって $\sim$ は同値関係。

(4) $A \in X$ に対して $P = E$(E は n 次単位行列) とすると $A = P^{-1}AP$ だから $A \sim A$. また $A \sim B$ とするとある正則行列 $P \in X$ が存在して $B = P^{-1}AP$ であるが、$Q := P^{-1}$ とすると $A = Q^{-1}BQ$ となるから $B \sim A$. さらに $A \sim B$ かつ $B \sim C$ とするとある正則行列 $P, Q \in X$ を用いて $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$ となる。特に $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$ であり PQ は正則行列だから $A \sim C$. 従って $\sim$ は同値関係である。

(5) $u \in X$ に対して $u = 1 \cdot u$ だから $u \sim u$. $u \sim v$ とすると $v = cu$ となる $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在する。特に $1/c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ であり $u = (1/c)v$ だから $v \sim u$. また $u \sim v$ かつ $v \sim w$ とすると $v = cu$, $w = dv$ となる $c, d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在する。従って $w = dcu$ で $dc \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ だから $u \sim w$ となり $\sim$ は同値関係である。

(6) $\{x_n\} \in X$ に対して $x_n - x_n = 0$ だから $\{x_n\} \sim \{x_n\}$. また一般に $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であるためには $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ であることが必要十分である。$\{x_n\} \sim \{y_n\}$ なら $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = -\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ だから $\{y_n\} \sim \{x_n\}$. 最後に $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $\{y_n\} \sim \{z_n\}$ とすると $|x_n - z_n| \le |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$ であり、この右辺は 0 に収束するから $\{x_n\} \sim \{z_n\}$. よって $\sim$ は同値関係である。

問題 3.

(1) $x \in X$ とすると $x \in [x]$ だから $[x] \neq \emptyset$.

(2) 任意の $a \in X$ に対して $a \in [a] \subset \cup\{[x] \mid x \in X\}$.

(3) $[x] = [y]$ とすると $y \in [y] = [x]$ より $y \sim x$ だから $x \sim y$. 逆に $x \sim y$ として $z \in [y]$ とする。このとき $y \sim z$ だから $x \sim z$. よって $z \in [x]$. つまり $[y] \subset [x]$. また $z \in [x]$ とすると $x \sim z$ だから $y \sim z$ となる。よって $z \in [y]$. 以上より $[x] = [y]$.

(4) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ とする。このとき $z \in [x] \cap [y]$ となる $z \in X$ が存在する。つまり $x \sim z$, $y \sim z$ だから $z \sim y$ であり $x \sim y$ となる。よって上の問題 (3) より $[x] = [y]$ となる。

問題 4. $a \sim b$ ならば $f(a) = f(b)$ と仮定する。このとき $[a] = [b]$ ならば $a \sim b$ だから $f(a) = f(b)$ である。よって $F([a]) := f(a)$ と定義するとこれは同値類 $[a]$ の代表元の取り方によらずに定まっている。従って写像 $F : X/{\sim} \to Y$ が定まる。

問題 5.

(1) $u \sim u'$ かつ $v \sim v'$ とすると $(u + v) - (u' + v') = (u - u') + (v - v') \in V$ だから $u + v \sim u' + v'$ となる。従って $[u] + [v]$ は $[u]$ や $[v]$ の代表元の取り方によらずに定まっている。同様に $a \in \mathbb{K}$ に対して $au - au' = a(u - u') \in V$ だから $au \sim au'$ である。よって $a[u]$ は $[u]$ の代表元の取り方によらずに定まっている。よって和とスカラー積は well-defined である。また $X/{\sim}$ が線形空間になることは定義に戻り確かめれば良い (詳細は省略する)。

(2) $f, g \in V^{\perp}$, $a \in \mathbb{K}$ とする。任意の $v \in V$ に対して $(f + g)(v) = f(v) + g(v) = 0$, $(af)(v) = af(v) = 0$ だから $V^{\perp}$ は X^* の部分空間である。次に $u, u' \in X$ $u \sim u'$ とする。$f \in V^{\perp}$ は X 上の線形関数だから $f(u) - f(u') = f(u - u')$. さらに $u - u' \in V$ だから $f(u - u') = 0$, つまり $f(u) = f(u')$ となる。よって $\varphi_f : X/V \to \mathbb{K}$ は写像として well-defined. φ_f が線形写像であることは、f が線形であることを用いて X/V の和やスカラー積の定義に戻って考えれば示せる (詳細は省略)。

(3) $\varphi(f) := \varphi_f$ とすると $\varphi : V^{\perp} \to (X/V)^*$ は写像である。また $F \in (X/V)^*$ に対して $\psi(F)(u) := F([u])$, $u \in X$ と定義する。$u, v \in X$, $a \in \mathbb{K}$ に対して $\psi(F)(u + v) = F([u]+[v]) = F([u])+F([v])$, $\psi(F)(au) = F(a[u]) = aF([u])$ となるので $\psi(F) \in X^*$. よって写像 $\psi : (X/V)^* \to X^*$ が定義される。また $\psi(F + G)(u) = (F + G)([u]) = F([u])+G([u])$ より $\psi(F+G) = \psi(F)+\psi(G)$. スカラー積についても同様の議論ができるので、$\psi : (X/V)^* \to X^*$ は線形写像であることが分かる。さらに $\psi(F) \in V^{\perp}$ が任意の $F \in (X/V)^*$ に対して成り立つ。実際任意の $u \in V$ に対して $[u] = 0$ が X/V で成り立つので $\psi(F)(u) = F([u]) = F(0) = 0$. よって $\psi(F) \in V^{\perp}$. 次に任意の $u \in X$ を取る。このとき $\psi(\varphi(f))(u) = \varphi(f)([u]) = f(u)$, $\varphi(\psi(F))([u]) = \psi(F)(u) = F([u])$ だから $\psi(\varphi(f)) = f$, $\varphi(\psi(F)) = F$ が任意の $f \in V^{\perp}$, $F \in (X/V)^*$ に対して成り立ち、$\varphi : V^{\perp} \to (X/V)^*$ が同型写像だとが分かる。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6.

(1) $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ が $a \sim a'$, $b \sim b'$ を満たすとする。このときある $c, d \in \mathbb{Z}$ が存在して $a - a' = nc$, $b - b' = nd$ が成り立つ。よって $(a+b) - (a'+b') = n(c+d) \in n\mathbb{Z}$, $ab = (a'+nc)(b'+nd) = a'b' + n(a'd + b'c + ncd)$ となるから $[a+b] = [a'+b']$, $[ab] = [a'b']$. よって和と積は well-defined である。

(2) $a \in \mathbb{Z}$ に対して $[a][b] = [1]$ となる $b \in \mathbb{Z}$ が存在したと仮定する。このとき $[ab] = [1]$ より $ab \sim 1$, よって $ab - 1 \in n\mathbb{Z}$ だから、ある $c \in \mathbb{Z}$ が存在して $ab - 1 = nc$, つまり $ab - cn = 1$. 従って $\gcd(a, n) = 1$. 逆に $\gcd(a, n) = 1$ と仮定すると $b, c \in \mathbb{Z}$ で $ab + cn = 1$ となるものが存在する。よって特に $ab \sim 1$ だから $[a][b] = [1]$.

(3) n が素数だと仮定し、$a \in \mathbb{Z}$, $a \notin n\mathbb{Z}$ とする。$a = qn + r$ となる $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < n$ が取れる。$a \notin n\mathbb{Z}$ だから $r \ge 1$. n が素数で $1 \le r \le n-1$ より $1 = \gcd(n, r) = \gcd(a, n)$ となる。従って問題 (2) より $[a]$ は逆元を持つ ($[a] = [0]$ は $a \in n\mathbb{Z}$ と同値であることに注意)。次に任意の $[a] \neq [0]$ が逆元を持つと仮定する。任意の $r \in \mathbb{Z}$, $1 \le r \le n-1$ に対して $[r]$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で逆元をもつから、問題 (2) より $\gcd(r, n) = 1$ である。これは n が素数であることを意味している。

問題 7.

(1) 任意の $z \in S^1$ は $z = e^{2\pi i s}$, $s \in \mathbb{R}$ と書ける。このような $s \in \mathbb{R}$ を一つ固定し $t := s - \lfloor s \rfloor$ とおく。但し $\lfloor s \rfloor$ は s 以下の最大の整数。すると $z = e^{2\pi i t}$ であり $0 \le t < 1$ だから $f(t) = z$ となり、$f : X \to S^1$ は全射である。

(2) $a, a' \in X$ が $a \sim a'$ だとする。$a = a'$ なら $f(a) = f(a')$ である。また $a, a' \in A$ なら a, a' は 0 または 1. 従って $e^{2\pi i a} = e^{2\pi i a'} = 1$. 何れにしても $f(a) = f(a')$ だから問題 4 より $F : X/{\sim} \to S^1$, $F([t]) := f(t)$ は well-defined.

f が全射だから任意の $z \in S^1$ に対して $f(t) = z$ となる $t \in X$ がある。よって $F([t]) = z$ となるから F は全射である。

次に $F([s]) = F([t])$, $s, t \in X$ とする。このとき $e^{2\pi i s} = e^{2\pi i t}$. よって $e^{2\pi i (s-t)} = 1$ となり $s - t \in \mathbb{Z}$. ところが $s, t \in X = [0, 1]$ だから $-1 \le s - t \le 1$, つまり $s - t = -1, 0, 1$ の何れかである。ここで $s - t = -1$ のときは $(s, t) = (0, 1)$. $s - t = 0$ のときは $s = t$. $s - t = 1$ のときは $(s, t) = (1, 0)$ だから何れにしても $s \sim t$ となる。よって $[s] = [t]$ となり F は単射である。

問題 8.

(1) $f, g \in I$, $a \in \mathbb{R}$ とする。$x \in [0, 1]$ に対して $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$, $(af)(x) = af(x) = 0$ であり、$f + g$ と af は $[0, 2]$ 上の実数値連続関数だから $f + g, af \in I$ となる。よって I は $C([0, 2])$ の部分空間である。

(2) 任意の $f \in C([0, 2])$ に対して f は $[0, 2]$ 上連続。従って特に $[0, 1]$ 上でも連続。よって $\varphi_f \in C([0, 1])$. また $\varphi : C([0, 2]) \ni f \mapsto \varphi_f \in C([0, 1])$ が線形であることは、二つの関数の和やスカラー積の定義から容易に従う (詳細は省略する)。

(3) 任意の $g \in C([0,1])$ をとる。そして $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & (x \in [0,1] \text{ のとき}) \\ g(1) & (x \in [1,2] \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと $f \in C([0,2])$. すると定義から $\varphi(f) = g$ が成り立つ。つまり φ は全射である。

以下、上で定めた f が連続であることを示す。$x = 1$ で連続かどうかを確認すれば良い。g が $[0,1]$ で連続だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in [0,1]$, $|1-x| < \delta$ に対して $|g(1) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つ。必要なら $\delta > 0$ を小さく取り直して $\delta < 1$ と仮定する。$x \in [0,2]$ が $|1-x| < \delta$, つまり $1 - \delta < x < 1 + \delta$ を満たすとする。もし $1 - \delta < x \le 1$ なら $|f(1) - f(x)| = |g(1) - g(x)| < \varepsilon$. また $1 < x < 1 + \delta$ なら $|f(1) - f(x)| = |g(1) - g(1)| = 0$. よって f は $x = 1$ で連続。

(4) $f \sim g$ とする。これは $f - g \in I$, つまり $f(x) = g(x)$ が任意の $x \in [0,1]$ に対して成り立つことを表す。従って $\varphi_f = \varphi_g$ が成り立つから、問題 4 より写像 $F : C([0,2])/\!\sim \to C([0,1])$ は well-defined.

全射であることは問題 (3) から直ちに従うので、単射性だけ示す。$F([f]) = F([g])$ であったとする。これは f と g が $[0,1]$ 上で等しいことを表している。従って $f \sim g$, つまり $[f] = [g]$ だから F は単射である。

問題 9.

(1) 任意の $a \in X$ に対して $f(a) = f(a)$ だから $a \sim a$. また $a \sim b$ なら $f(a) = f(b)$, 特に $f(b) = f(a)$ だから $b \sim a$. さらに $a \sim b$ かつ $b \sim c$ なら $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(c)$ より $f(a) = f(c)$. 従って $a \sim c$ だから $\sim$ は同値関係となる。

(2) $x, y \in X$ が $x \sim y$ を満たすとする。このとき定義から $f(x) = f(y)$. よって問題 4 より $F : X/\!\sim \to Y$ は well-defined である。

(3) $f : X \to Y$ が全射なので任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が取れる。このとき $F([x]) = f(x) = y$ だから F は全射である。また $F([x]) = F([z])$, $x, z \in X$ と仮定すると $f(x) = f(z)$ だから $x \sim z$. よって $[x] = [z]$ だから F は単射である。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10. 問題 2 (5) の解答を参照のこと。

問題 11. $\{x_n\} \in X$ とすると $\{x_n\}$ は Cauchy 列なので、$\varepsilon = 1 \in \mathbb{Q}$ に対してある自然数 N が存在し、任意の自然数 n に対して $n \geq N$ ならば $|x_n - x_N| < 1$. 特に $|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N|$ だから、$n \geq N$ なら $|x_n| < 1 + |x_N|$ となる。そこで $C := \max\{1 + |x_N|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$ とおけば $C \in \mathbb{Q}$ であり、$|x_n| \leq C$ が任意の自然数 n に対して成り立つ。

問題 12. $a \in \mathbb{Q}$ を取る。任意の自然数 n に対して $x_n := a$ として出来る有理数列 $\{x_n\}$ は、$|x_n - x_m| = 0$ が任意の n, m に対して成り立つため Cauchy 列である。よって $\{a\} \in X$. この同値類を $[a]$ とする。$[a] = [b]$, $a, b \in Q$ とすると $\{a\} \sim \{b\}$, つまり $a - b$ が 0 に収束する数列になるから $a = b$. よって $a \mapsto [a]$ は単射である。

問題 13. $\{x_n\}, \{x'_n\}, \{y_n\}, \{y'_n\}$ を X の元で $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ と仮定する。このとき $|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$ で右辺は $n, m \to \infty$ のとき 0 に収束する。よって $\{x_n + y_n\}$ は Cauchy 列、つまり $\{x_n + y_n\} \in X$. 同様に $\{x'_n + y'_n\}$ も Cauchy 列。また $|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|$ で右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。よって $\{x_n + y_n\} \sim \{x'_n + y'_n\}$ となる。
また問題 11 より $|x_n| \leq A$, $|y_n| \leq B$ が任意の n に対して成り立つような正の有理数 A, B を取れる。このとき $|x_n y_n - x_m y_m| \leq B|x_n - x_m| + A|y_n - y_m|$ で右辺は $n, m \to \infty$ のとき 0 に収束する。よって $\{x_n y_n\} \in X$. 同様に $\{x'_n y'_n\} \in X$ である。また $|y'_n| \leq B'$ となる正の有理数 B' をとると $|x_n y_n - x'_n y'_n| \leq A|y_n - y'_n| + B'|x_n - x'_n|$ で右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。よって $\{x_n y_n\} \sim \{x'_n y'_n\}$ となる。
以上によって和と積は well-defined である.

問題 14. $\{x_n\} \in X$, $\{x_n\} \not\sim \{0\}$ とする。このとき $\{x_n\}$ は 0 に収束しないから、ある有理数 $\delta > 0$ が存在して、任意の自然数 j に対してある自然数 $n(j)$ が存在し、$n(j) \geq j$ かつ $|x_{n(j)}| \geq \delta$ となる。一方 $\{x_n\}$ は Cauchy 列だから、$\varepsilon = \delta/2 \in \mathbb{Q}$ に対してある自然数 N が存在して、$n, m \geq N$ ならば $|x_n - x_m| < \delta/2$ が成り立つ。特に $n \geq N$ なら $\delta/2 \leq |x_{n(N)}| - \delta/2 < |x_n|$ となる。
次にある有理数 $\delta > 0$ とある自然数 n_0 が存在して $n \geq n_0$ ならば $|x_n| > \delta$ だと仮定すると、有理数列 $\{x_n\}$ は 0 に収束しない。従って $\{x_n\} \not\sim \{0\}$ である。

問題 15. $[x_n] \in R$, $[x_n] \neq [0]$ とする。このとき $\{x_n\} \not\sim \{0\}$ である。よってある自然数 N とある有理数 $\delta > 0$ が存在して、$n \geq N$ なら $|x_n| > \delta$ となる (問題 14)。そこで y_n を $y_n = 0$ $(n \leq N-1)$, $y_n = 1/x_n$ $(n \geq N)$ とおく。数列 $\{y_n\}$ は有理数列である。また $n, m \geq N$ なら $|y_n - y_m| \leq |x_n - x_m|/\delta^2$ であるが、右辺は $n, m \to \infty$ のとき 0 に収束するから $\{y_n\} \in X$ となる。$n \geq N$ のとき $x_n y_n - 1 = 0$ だから $[x_n][y_n] = [1]$ となる。

問題 16. $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$ が $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ を満たすとする。このとき次を示せば良い:

> ある正の有理数 δ_1 とある自然数 n_1 が存在して、$n \geq n_1$ に対して $x_n > \delta_1$ が成り立つとする。このときある正の有理数 δ_2 とある自然数 n_2 が存在して、$n \geq n_2$ ならば $y_n > \delta_2$ が成り立つ。

$\{x_n\} \sim \{y_n\}$ より $\varepsilon = \delta_1/2$ に対してある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $|x_n - y_n| < \delta_1/2$ が成り立つ。特に $n \geq \max\{N, n_1\}$ なら $\delta_1/2 < |x_n| - \delta_1/2 < |y_n|$ となるから、$\delta_2 := \delta_1/2$, $n_2 := \max\{N, n_1\}$ と取れば良い。

問題 17. $a, b \in \mathbb{Q}$ とする。$\mathbb{Q}$ の通常の意味で $a < b$ と仮定する。$\delta := (b-a)/2 \in \mathbb{Q}$ とおくと $\delta > 0$ であり $\delta < b - a$ となる。従って $[a] < [b]$ である。
逆に $[a] < [b]$ とすると、ある有理数 $\delta > 0$ が存在して $b - a > \delta$ となるから $b > a$ である。

問題 18. $r, s, t \in R$ とする。

(1) $r = r$ だから $r \leq r$ が成り立つ。

また $r \leq s$, $s \leq r$ と仮定し $r = [x_n]$, $s = [y_n]$ とおく。仮定から $r = s$ または $r < s$ だが、もし $r < s$ ならある有理数 $\delta > 0$ とある自然数 N が存在し、$n \geq N$ ならば $\delta < y_n - x_n$ となる。従って特に $n \geq N$ なら $x_n - y_n \leq 0$ であるから $s \not< r$. 仮定から $s \leq r$ だから $s = r$ となる。

次に $r \leq s$, $s \leq t$ と仮定し $t = [z_n]$ とする。$s = t$ なら $r \leq t$ だから $s \neq t$ と仮定する。このとき $s < t$ である。また $r = s$ なら $s = r < t$ だから $s \neq r$ と仮定して良い。すると $r < s$ である。このときある正の有理数 δ とある自然数 N が存在して、$n \geq N$ のとき $\delta < y_n - x_n$, $\delta < z_n - x_n$ が成り立つ。従って $n \geq N$ のとき $z_n - x_n = z_n - y_n + y_n - x_n > 2\delta$ となるから $r < t$. 何れにしても $r \leq t$ である。

(2) $r \leq s$ と仮定し $r = [x_n]$, $s = [y_n]$, $t = [z_n]$ とおく。
$r = s$ と仮定する。このとき $r + t = [x_n + z_n]$, $s + t = [y_n + z_n]$ だが $r = s$ より $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. つまり $|x_n - y_n|$ は 0 に収束する。よって $|(x_n + z_n) - (y_n + z_n)| = |x_n - y_n|$ も 0 に収束する。つまり $r + t = s + t$ となる。
次に $r < s$ と仮定する. このときある正の有理数 δ とある自然数 N が存在して、$n \geq N$ のとき $\delta < y_n - x_n = (y_n + z_n) - (x_n + z_n)$ となる。つまり $r + t < s + t$ となる。

(3) $0 \leq r, 0 \leq s$ と仮定し $r = [x_n]$, $s = [y_n]$ とする。$\{x_n\}, \{y_n\}$ は有理数からなる Cauchy 列だから、ある有理数 $C > 0$ が存在して任意の n に対して $|x_n| \leq C$, $|y_n| \leq C$ が成り立つ。$r = 0$ または $s = 0$ なら $\{x_n\}$ または $\{y_n\}$ が 0 に収束するから $|x_n y_n| \leq C|x_n|$ または $|x_n y_n| \leq C|y_n|$ であり、右辺は 0 に収束する。従って $\{x_n y_n\} \sim \{0\}$ である。つまり $rs = 0$ となる。
そこで $r > 0$, $s > 0$ と仮定する。このときある有理数 $\delta > 0$ とある自然数 N が存在して、$x_n > \delta$, $y_n > \delta$ が $n \geq N$ に対して成り立つ。特に $n \geq N$ なら $x_n y_n > \delta^2$ で δ^2 は有理数だから $rs > 0$ となる。

(4) $r, s \in R$ とし $r = [x_n]$, $s = [y_n]$ とおく。もし $r < s$ ならある有理数 $\delta > 0$ とある自然数 N が存在して、$y_n - x_n > \delta$ が任意の $n \geq N$ に対して成り立つ。特に $y_n - x_n$ は 0 に収束し得ないから $\{x_n\} \not\sim \{y_n\}$, つまり $r \neq s$ である。また $y_n - x_n > 0$ が $n \geq N$ に対して成り立つため $s \not< r$ である。つまり $r < s$ のみが成り立つ。その他の場合も同様である. つまり $r = s$, $r < s$, $s < r$ のうち、成り立つとするならどれか一つ

のみであることが分かる。
次に $r \neq s$ と仮定する。このとき $|y_n - x_n|$ は 0 に収束しない。よってある有理数 $\delta > 0$ が存在して、任意の自然数 j に対してある自然数 $n(j) \geq j$ が存在し $|y_{n(j)} - x_{n(j)}| \geq \delta$ が成り立つ。一方 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が Cauchy 列であるため、$\varepsilon = \delta/3 > 0$ に対してある自然数 N が存在して、$n, m \geq N$ ならば $|x_n - y_m|, |y_n - y_m| < \delta/3$ が成り立つ。そこで $y_{n(N)} \geq x_{n(N)}$ だと仮定すると $y_{n(N)} - x_{n(N)} \geq \delta$ である。従って $n \geq N$ のとき

$$y_n - x_n = y_n - y_{n(N)} + y_{n(N)} - x_{n(N)} + x_{n(N)} - x_n > -\delta/3 + \delta - \delta/3 = \delta/3$$

となるから $r < s$. 同様に $y_{n(N)} \leq x_{n(N)}$ なら $s < r$. 以上より主張が成り立つ。

問題 19. $r \in R$ に対して $r > 0$ か $r < 0$ か $r = 0$ が一つ、そして唯一つ成り立つ。またこれは代表元の取り方によらず定まっている。従って $|r|$ は well-defined である。

問題 20. $|r| < a$ と仮定する。また $r = [x_n]$ とする。このとき $0 < a - |r|$ である。
まず $r = 0$ のときは $\{x_n\}$ は 0 に収束する Cauchy 列である。よって有理数 $\delta > 0$ を $a > \delta$ と取ると (このような $\delta > 0$ の存在は問題 22 (1) から分かる)、ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $|x_n| < a - \delta$ となる。
次に $r > 0$ とする。このとき $0 < a - r$ だから、ある正の有理数 δ とある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $\delta < a - r_n$, $\delta < r_n$ となる。従って $n \geq N$ なら $|r_n| = r_n < a - \delta$ となる。$r < 0$ のときも同様である。
逆にある有理数 $\delta > 0$ とある自然数 N が存在して $|r_n| < a - \delta$ が任意の $n \geq N$ に対して成り立つと仮定する。$r = 0$ なら $0 < a$ が R でも成り立つことから $0 = |r| < a$ となる。$r > 0$ とすると、$r_n > 0$ が任意の $n \geq N$ に成り立つように N を更に大きく取れば $r_n < a - \delta$, つまり $\delta < a - r_n$ が $n \geq N$ に対して成り立つ。従って $r < a$ となる。$r < 0$ のときも同様である。

問題 21. $r, s \in R$ とする。まず $r \leq |r|$ かつ $-r \leq |r|$ に注意する。実際、$r = 0$ なら $-r = |r| = 0$ である。また $r > 0$ なら $-r < r = |r|$ であり、$r < 0$ なら $r < -r = |r|$ だからである。
すると $r + s \geq 0$ なら $|r + s| = r + s \leq |r| + |s|$ となる。また $r + s < 0$ なら $|r + s| = -r - s \leq |r| + |s|$ となる。何れにしても $|r + s| \leq |r| + |s|$ である。

問題 22.

(1) $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b > 0$ とする。$a = m/n$, $b = p/q$ と既約分数表示する。但し m, n, p, q は全て正だとする。$mq \geq np$ のとき $2mq > np$ だから $K := 2$ と取れば良い。そこで $mq < np$ とする。このときある $s, t \in \mathbb{Z}$, $0 \leq t < mq$ が存在して $np = smq + t$ と書ける。従って $np < smq + mq$ である。よって $K := s + 1$ と取れば良い。

(2) $r, s \in R$, $r > 0$, $s > 0$ とする。$r = [x_n]$, $s = [y_n]$ とする。問題 11 よりある正の有理数 C が存在して $|x_n|, |y_n| \leq C$ が任意の n について成り立つ。また $r > 0$, $s > 0$ より、ある正の有理数 δ_1, δ_2 とある自然数 N が存在して、$n \geq N$ に対して $\delta_1 < x_n$,

$\delta_2 < y_n$ となる。特に $n \geq N$ なら $\delta_1 < x_n \leq C$, $\delta_2 < y_n \leq C$ である。ここで (1) より自然数 K を $K\delta_1 > C + \delta_1$ となるように取ることが出来る。よって $n \geq N$ に対して

$$Kx_n > K\delta_1 > C + \delta_1 \geq y_n + \delta_1$$

だから、$\delta_1 < Kx_n - y_n$ が任意の $n \geq N$ に対して成り立つ。よって $s < Kr$ である。

問題 23. $r, s \in R$, $r < s$ とし、ヒントにあるような自然数 $p, q \geq 1$ をとり $a = p/q$ とする。$qr < p$ であるから問題 18 (3) により $r < a$ が成り立つ。p がこのような性質を満たす最小の自然数であることから $0 \leq p - 1 \leq qr$ である。よって再び問題 18 (3) より $a - 1/q \leq r$ が成り立つが、更に問題 18 (3) より $1/q < s - r$ が成り立つ。よって再び問題 18 (2) より $a \leq r + 1/q < s$ が成り立つ。

問題 24. $r = [r_n] \in R$ とし各自然数 k と n に対して $x_n^{(k)} := r_k$ とおく。このとき任意の k に対して有理数列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ は問題 12 より Cauchy 列。従って $[x_n^{(k)}]$ が定義される。問題 12 より $r_k \in \mathbb{Q} \subset R$ と $[x_n^{(k)}]$ を同一視していたことに注意する。つまり $r_k = [x_n^{(k)}]$ である。任意の正の有理数 $\varepsilon > 0$ 与える。有理数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列たからある自然数 K が存在して $k, l \geq K$ に対して $|r_k - r_l| < \varepsilon/2$ が成り立つ。. 従って任意の $k, n \geq K$ に対して

$$|r_n - x_n^{(k)}| = |r_n - r_k| < \varepsilon - \varepsilon/2$$

となっている。つまり $k \geq K$ とすると、$\delta = \varepsilon/2$ とおけば任意の $n \geq K$ に対して $|r_n - x_n^{(k)}| < \varepsilon - \delta$ が成り立つ。従って問題 20 より $|r - r_k| < \varepsilon$ が $k \geq K$ に対して成り立つ。よって $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subset R$ は $r \in R$ に収束する。

問題 25.

(1) ある k に対して $r_l = r_k$ となる l が無限個あるとする。このとき部分列 $\{r_{n(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ で $r_{n(j)} = r_k$ となるものが存在する. $r := r_k$ とすると $|r - r_{n(j)}| = 0$ だから、$r_{n(j)} \to r$ が $j \to \infty$ で成り立つ。

(2) 仮定から任意の自然数 k に対して自然数 $l \geq k$ で $|r_k - r_l| > 0$ となるものが存在する。このような l のうち最小のものを $l(k)$ とする。このとき $|r_k - r_{l(k)}| > 0$ だから $r_k - |r_k - r_{l(k)}| < r_k + |r_k - r_{l(k)}|$ となる。よって問題 23 より、ある有理数 $a_k \in \mathbb{Q}$ で $r_k - |r_k - r_{l(k)}| < a_k < r_k + |r_k - r_{l(k)}|$ となるものが存在する。つまり $|a_k - r_k| < |r_k - r_{l(k)}|$ である。

(3) $|a_k - a_m| \leq |a_k - r_k| + |r_k - r_m| + |r_m - a_m| \leq |r_k - r_{l(k)}| + |r_k - r_m| + |r_m - r_{l(m)}|$ である。ところが $\{r_k\}$ は R 内の Cauchy 列であり $l(k) \geq k$ だから、この式の右辺は $k, m \to \infty$ のとき R 内で 0 に収束する。よって $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ は Cauchy 列である。

(4) 問題 24 より R 内の点列と考えたときの $\{a_n\}$ は $r = [a_n]$ に収束する。よって $|r_k - r| \leq |r_k - a_k| + |a_k - r| \leq |r_k - r_{l(k)}| + |a_k - r|$ において $k \to \infty$ とすると、第一項は $\{r_k\}$ が R 内の Cauchy 列であることから 0 に、そして第二項は問題 24 より 0 に収束する。つまり $|r_k - r|$ は R 内で 0 に収束する。