担当教員: 柳田　伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (11/10) 解答

作成日: 11/24/2016　Version: 1.0　配布日: 11/24/2016

学生番号 ________________ 名前 ________________

問題 1. (1) 次の行列式 (Vandermonde の行列式) を因数分解せよ (結果だけ示せば良い)。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$ (但し $0 \le \theta < 2\pi$) が収束するか発散するか調べよ。

解答

(1) $\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

(2) $\theta = 0, \pi$ の時は明らかに収束する。そうでないなら $S_n := \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ とすると

$$S_n = \frac{\cos(\theta/2) - \cos((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)}$$

なので $|S_n| \le 1/|\sin(\theta/2)|$. そこで $T_N := \sum_{n=1}^{N} n^{-1} \sin n\theta$ とすれば

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(S_n - S_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{N} S_N$$

より

$$|T_N| \le \sum_{n=1}^{N-1} |S_n| \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| + \frac{1}{N}|S_N| \le \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} \right) < \frac{2}{|\sin(\theta/2)|}$$

と上から抑えられる。これと $n^{-1} \sin n\theta \to 0$ $(n \to \infty)$ より、問題の級数は任意の θ で収束することが分かる。

(1) は 3 点、(2) は 7 点満点で採点しました。平均点は 1.4 点でした。
(1) は必ず答えられるようにして下さい。