担当教員：柳田　伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (10/24) 解答

作成日：October 20, 2009　Updated：October 31, 2016　Version：1.0　　実施日：October 27, 2016

学生番号 ________________ 名前 ________________

問題 1. n を 3 以上の整数とし、n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ を

$$a_{ij} := \begin{cases} 2 & i=j \text{ のとき} \\ -1 & i-j-1 \text{ が } n \text{ で割り切れるとき} \\ -1 & i-j+1 \text{ が } n \text{ で割り切れるとき} \\ 0 & \text{それら以外} \end{cases}$$

で定める。例えば $n=3$ なら

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。一般の n について A の階数を求めよ。

解答：一般の n については A は下記のようになる。n 行目に 1 行目から $(n-1)$ 行目までを加える基本変形を施すと零ベクトルになる（特に $\mathrm{rank}(A) \le n-1$ が分かる）。この変形の後の左上ブロックの $(n-1)$ 次正方行列を B_{n-1} とおく。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{n-1} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1 列目に関する余因子展開から $\det(B_n) = 2\det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2})$ を得る。$\det(B_1)=2$ 及び $\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ から $\det(B_n) = n+1 \neq 0$ となる。よって B_n は正則で $\mathrm{rank}(B_n) = n$. 従って $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B_{n-1}) = n-1$.

10 点満点で採点しました。$\mathrm{rank}\, A \le n-1$ が言えていれば 3 点、$\mathrm{rank}\, A = n-1$ が予想できていれば 2 点出しています。平均点は 2.0 点でした。