担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 ($\mathbb{R}^n$ における写像の連続性)

作成日: 10/20/2016　更新日: 11/10/2016　Version: 1.0

問題 1. $\lim_{t\to 0+} f(t,t) = 3/2$, $\lim_{t\to 0+} f(t,t^{3/2}) = 0$.

問題 2. (1) $\Longrightarrow$ (2)：任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、$x \in A$ かつ $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-b| < \varepsilon$ となる。$\{x_n\} \subset A$ が a に収束する点列だとすると、自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ となる。従って $n \geq N$ ならば $|f(x_n)-b| < \varepsilon$ となる。

(2) $\Longrightarrow$ (1)：対偶を示す。ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対して $x_\delta \in A$ が存在し $|x_\delta - a| < \delta$ かつ $|f(x_\delta)-b| \geq \varepsilon$ が成り立つと仮定する。$\delta = 1/n$ (n は自然数) として対応する $x_{1/n}$ を x_n と書き直すと、$\{x_n\}$ は A 内の点列であり $|x_n - a| < 1/n$、つまり $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たすが $|f(x_n)-b| \geq \varepsilon > 0$ より点列 $\{f(x_n)\}$ は b に収束しない。

問題 3. (1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$.

(2) 極限値を持たない。実際、自然数 k に対して $f(1/(2\pi k), 1/(2\pi k)) = 0$ だが $f(1/(2\pi k + \pi/2), 1/(2\pi k)) = 1$ となる。

(3) $n = 1$ のときは $A = (0,\infty)$ であり A 上で $f(x) = 1$ だから $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. $n \geq 2$ のときは極限値を持たない (自然数 k に対して $x_k := (1/k,\ldots,1/k,1/k)$, $y_k := (1/k,\ldots,1/k,1/k^2)$ とすると $f(x_k)$ と $f(y_k)$ の極限が異なる)。

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = e$ ($z := x^2+y^2$ と変数変換すると直ぐに分かる)。

問題 4. (1) 連続。$r := \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと $f(x,y) = 2r\cos^2\theta\sin\theta = r\cos\theta\sin(2\theta)$ より $|f(x,y)| \leq r$ なので、$(x,y) \to (0,0)$ で $|f(x,y)| \to 0$.

(2) 連続でない。前問と同様に考えると $f(x,y) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$ となるため。

問題 5. (A) $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し、$x \in A$ かつ $|x-a| < \delta$ なら $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し、$x \in U(a;\delta) \cap A$ ならば $f(x) \in U(f(a);\varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ (C).

問題 6. (C) $\Longrightarrow$ (D)：U を $f(a)$ を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合とすると、ある $\varepsilon > 0$ が存在し $U(f(a);\varepsilon) \subset U$ となる。仮定よりこの $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し $f(U(a;\delta)\cap A) \subset U(f(a);\varepsilon) \subset U$ となる。よって (D) が成り立つ。

(D) $\Longrightarrow$ (C)：任意の $\varepsilon > 0$ をとると、$U(f(a);\varepsilon)$ は $f(a)$ を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合だから、ある $\delta > 0$ があって $U(a;\delta)\cap A \subset f^{-1}(U(f(a);\varepsilon))$ となる。特に (C) が成り立つ。

問題 7. (1) $\Rightarrow$ (2)：U を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする．もし $f(A)\cap U = \emptyset$ なら $f^{-1}(U) = \emptyset = A\cap\emptyset$. $f(A)\cap U \neq \emptyset$ とすると、任意の $a \in f^{-1}(U)$ に対しある $\delta(a) > 0$ が存在して $U(a;\delta(a))\cap A \subset f^{-1}(U)$. すると $V := \bigcup_{a\in f^{-1}(U)} U(a;\delta(a))$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり、$V\cap A = f^{-1}(U)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1)：$a \in A$ を任意に取る。U を $f(a)$ を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。(2) より $\mathbb{R}^n$ の開集合 V で $f^{-1}(U) = V\cap A$ となるものがある。$a \in f^{-1}(U)$ だから $a \in V$ である。V が開集合だから $\delta > 0$ で $U(a;\delta) \subset V$ となるものがある。すると $U(a;\delta)\cap A \subset f^{-1}(U)$ だから f は a で連続。$a \in A$ は任意に取ったから (1) が成り立つ。

(2) $\Longrightarrow$ (3)：$U := \mathbb{R}^m \setminus F$ 及び $G := \mathbb{R}^n \setminus V$ とすれば直ぐに分かる。

(3) $\Longrightarrow$ (2)：$F := \mathbb{R}^m \setminus U$ 及び $V := \mathbb{R}^n \setminus G$ とすればよい。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. $|f(x)-f(a)|^2=\sum_{i=1}^m|f_i(x)-f_i(a)|^2$ から

$$|f_i(x)-f_i(a)|\le|f(x)-f(a)|\le\sqrt{n}\max\{|f_i(x)-f_i(a)|\mid i=1,\dots,m\}$$

となり、これから直ぐに分かる。

問題 9. f が連続だと仮定し $A\subset\mathbb{R}^n$ を任意に取る。$F:=\overline{f(A)}$ は $\mathbb{R}^m$ の閉集合だから、問題 7 の (3) より $G:=f^{-1}(F)$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合で $A\subset G$. 従って $\overline{A}\subset G$ だから $f(\overline{A})\subset f(G)\subset F=\overline{f(A)}$ となる。次に任意の $A\subset\mathbb{R}^n$ に対して $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ と仮定し、$F\subset\mathbb{R}^m$ を任意の閉集合とする。$A:=f^{-1}(F)$ とおくと $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset F$ より $\overline{A}\subset f^{-1}(F)=A$. 従って $A=\overline{A}$ だから A は閉集合。よって問題 7 の (3) より f は $\mathbb{R}^n$ で連続。

問題 10. $A\subset\mathbb{R}^n$ を有界閉集合、$\{x_n\}$ を A 内の点列とする。定理 2 より $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$ を持つ。$\{x_{n(k)}\}$ は A 内の点列で A は閉集合だから、収束先は A に含まれる。逆に A 内の任意の点列が A の点に収束する部分列を持つとする。定理 2 より A は有界。また A 内の任意の収束列 $\{x_n\}$ は、仮定から A 内の点に収束する部分列を持つ。従って $\{x_n\}$ 自身 A の点に収束する。よって A は閉集合である。

問題 11. $\{y_n\}$ を $f(A)$ 内の任意の点列とすると $y_n=f(x_n)$ となる $x_n\in A$ が取れる。$\{x_n\}$ は A 内の点列であり A が有界閉集合だから、問題 10 よりある $a\in A$ に収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}$ を持つ。f が連続だから $y_{n(k)}=f(x_{n(k)})$ は $f(a)\in f(A)$ に収束する。従って再び問題 10 より $f(A)$ は有界閉集合である。

問題 12. 問題 11 から $f(A)\subset\mathbb{R}$ は有界。$s:=\sup_{x\in A}f(x)$, $i:=\inf_{x\in A}f(x)$ とおく。上限と下限の定義から A 内の点列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ で $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=s$, $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=i$ となるものがある。A が有界閉集合だから $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は各々ある $a,b\in A$ に収束する部分列を持つ。f が連続だから $f(a)=i$, $f(b)=s$ となり、任意の $x\in A$ に対し $f(a)\le f(x)\le f(b)$.

問題 13. (1) 任意の $a,b\in\mathbb{R}^n$ に対して $|\langle a,b\rangle|\le|a||b|$ となるので、$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $a=(|x_1|,\dots,|x_n|)$, $b=(1,\dots,1)$ とすると $\sum_{i=1}^n|x_i|\le n^{1/2}|x|$. よってノルムの性質より $\|x\|\le M\sum_{i=1}^n|x_i|\le Mn^{1/2}|x|$.

(2) 前問より $|f(x)-f(y)|\le\|x-y\|\le Mn^{1/2}|x-y|$. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $0<\delta<\varepsilon/Mn^{1/2}$ と取れば、$|x-y|<\delta$ なら $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となるから f は $\mathbb{R}^n$ で連続。

(3) 任意の $a\in\overline{S}$ に対し $x_n\in S$ で $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ となるものが取れる。このとき $||a|-1|=||a|-|x_n||\le|a-x_n|\to0$ $(n\to\infty)$ より $|a|=1$ となる。つまり $\overline{S}=S$ となりこれは閉集合である。$S\subset U(0;2)$ だから S は有界閉集合である。

(4) 問題 12 よりある $a\in S$ が存在して任意の $x\in S$ に対して $f(a)\le f(x)$. $c:=f(a)$ とおくと、任意の $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し $x/|x|\in S$ だから $f(x)=|x|\,f(x/|x|)\ge c|x|$ となる。

問題 14. (1) 任意の $\varepsilon>0$ を取り $\delta:=\varepsilon/L$ とする。$|x-y|<\delta$ を満たす任意の $x,y\in X$ に対して $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|<\varepsilon$ となるから f は一様連続。

(2) $f(x)=|x|$ は $X=\mathbb{R}^n$ 上で Lipschitz 連続である。また X が $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉集合であり f が $\mathbb{R}^n$ 上の C^1-級関数である場合、f の X への制限は Lipschitz 連続である。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $X=[0,1]$ 上の関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は X 上で Lipschitz 連続ではないが X 上で一様連続である。実際、f は X で連続であり X は有界閉集合だから f は一様連続。また、もし f が Lipschitz 連続なら、任意の $x,y\in X$ に対して $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le L|x-y|$ となる定数 $L>0$ が存在する。特に $x\neq y$ とすれば $1\le L(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. しかし x を $0<x<1/(3L)^2$ かつ $x<1/4$ と取り $y:=4x$ とすると、$L(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3L\sqrt{x}<1$ となり矛盾。

問題 15. (1) 仮定から $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\le L|f_n(x)-f_{n-1}(x)|$ である。あとは n についての帰納法を用いれば良い。

(2) 前問から $n>m>0$ に対して

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le \textstyle\sum_{j=m}^{n-1}|f_{j+1}(x)-f_j(x)|\le \big(\sum_{j=m}^{n-1}L^j\big)|f(x)-x|.$$

この評価と $0<L<1$ より $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であることが直ぐに分かる。

(3) f が連続だから $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=a$ より $f(a)=\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=a$ となる。

(4) $f(a)=a,\ f(b)=b$ とすると $|a-b|=|f(a)-f(b)|\le L|a-b|$ となることから従う。

問題 16. (1) $a\in A$ より $0\le d(a,A)\le|a-a|=0$.

(2) A は閉集合として $d(a,A)=0$ とする。下限の定義より $a_n\in A$ で $|a_n-a|\to 0$ となるものがある。A が閉集合だから $a\in A$.

逆を示すため、$a_n\in A$ が $a\in\mathbb{R}^n$ に収束すると仮定する。$d(a,A)\le|a_n-a|\to 0$ だから $d(a,A)=0$ となり、仮定から $a\in A$. よって A は閉集合。

(3) $f(x):=d(x,A)$ とする。$x\in A$ なら $f(x)=0$ だが、さらに $f(x)=0$ なら A が閉集合だから問題 (2) より $x\in A$. よって $f^{-1}(\{0\})=A$. あとは f が $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz 連続であることを示せば良い。任意の $x,y\in\mathbb{R}^n$ と $a\in A$ を取る。すると $d(x,A)\le|x-a|\le|x-y|+|y-a|$ より $d(x,A)-|x-y|\le|y-a|$. 従って $d(x,A)-|x-y|\le d(y,A)$. ここで $x,y\in\mathbb{R}^n$ は任意だったから $d(y,A)-|x-y|\le d(x,A)$ も成り立つ。つまり

$$-|x-y|\le f(x)-f(y)=d(x,A)-d(y,A)\le|x-y|$$

が任意の $x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。特に $L:=1$ として Lipschitz 連続となる。

問題 17. $A:=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\},\ B:=\{(x,y)\mid xy=1\}$ とする。$A\cap B=\emptyset$ と両者が閉集合であることは明らか。$x\to+\infty$ で $|(x,0)-(x,1/x)|=1/x\to 0$ より $d(A,B)=0$.

問題 18. A,B は閉集合であり $A\cap B=\emptyset$ であるから、任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対し $d(x,A)+d(x,B)>0$. 特に $f(x):=d(x,B)/(d(x,A)+d(x,B))$ は $\mathbb{R}^n$ 上で連続。また定義から $0\le f(x)\le 1$ が任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。更に $x\in A$ なら $d(x,A)=0,\ d(x,B)\neq 0$ より $f(x)=1$ となる。また $x\in B$ なら $d(x,B)=0$ だから $f(x)=0$ となる。

問題 19. (1) a を無理数、n を自然数とする。$1\le q\le n$ となる自然数 q を取り固定する。$A(a,n)\neq\emptyset$ と仮定し $p\in\mathbb{Z}$ を $|(p/q)-a|<1$ となるものとする。このとき $q(a-1)<p<q(a+1)$ だが、このような整数 p は有限個しかない。よって $A(a,n)$ は有限集合である.

(2) $A(a,n)\neq\emptyset$ と仮定し δ を問題文のように取る。このとき $U(a;\delta)\cap A(a,n)=\emptyset$ だから、$p/q\in U(a;\delta)$ ならに $p/q\notin A(a,n)$ であり、$\delta\le 1$ だから $q>n$ となる。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $a \in \mathbb{Q}$ なら無理数列 $\{x_n\}$ で a に収束するものが取れる (この事実は問題 21 から従う)。$f(a) \neq 0$ であり $f(x_n) = 0$ だから、f は a で連続ではない。

次に $a \notin \mathbb{Q}$ とし任意の $\varepsilon > 0$ をとる。$1/n < \varepsilon$ となる自然数 n を固定する。この a と n に対して $A(a,n)$ を考える。$\delta > 0$ を $A(a,n) \neq \emptyset$ のとき問題 (2) に現れたものとし、$A(a,n) = \emptyset$ のときは $\delta := 1$ とする。任意の $x \in U(a;\delta)$ をとる。$x \notin \mathbb{Q}$ なら $|f(x) - f(a)| = 0$. そこで $x \in \mathbb{Q}$ とし $x = p/q$ と既約分数表示 $(q > 0)$ する。$A(a,n) = \emptyset$ なら $|(p/q) - a| < \delta = 1$ だから $q > n$ となり、$A(a,n) \neq \emptyset$ のとき問題 (2) より $q > n$ となるから、何れにしても $|f(x) - f(a)| = 1/q < 1/n < \varepsilon$ となり、f が a で連続であることが分かった。

問題 20. (1) 任意の n に対して $U_n := \emptyset$ とおけばよい。

(2) 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \delta(a,n)\}$ は $U(a;\delta(a,n))$ に他ならない。つまり開集合である。開集合の和集合は開集合だから、U_n は開集合である。また任意の $a \in C_f$ に対して $a \in U(a;\delta(a,n)) \subset U_n$ が任意の n に対して成り立つから $C_f \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ となる。

(3) f が任意の $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ で連続であることを示せば良い。任意の $\varepsilon > 0$ を取り、n を $2/n < \varepsilon$ となる自然数とする。このとき $b \in U_n$ だから、ある $a \in C_f$ で $b \in U(a;\delta(a,n))$ となるものが存在する。そこで $\delta := \delta(a,n) - |a - b| > 0$ とする。任意の $x \in U(b;\delta)$ を取る。このとき $|x - a| \leq |x - b| + |b - a| < \delta(a,n)$ より $|f(x) - f(a)| < 1/n$. 従って $|f(x) - f(b)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(b)| < 2/n < \varepsilon$ となり、f は b で連続である。

問題 21. (1) $a \in \mathbb{Q}$ なら $a \in A$ なので $a \notin \mathbb{Q}$ としてよい。任意の $\varepsilon > 0$ を取り、q を $1 < 2q\varepsilon$ となる自然数とする。また $p := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid q(a - \varepsilon) < m\}$ とする。このとき $a - \varepsilon < p/q$. また p が $q(a+\varepsilon) \leq p$ を満たすと仮定すると $q\varepsilon > 1 - q\varepsilon$ より $q(a-\varepsilon) < p - 1$ となり、p の取り方と矛盾する。よって $p < q(a+\varepsilon)$, つまり $p/q < a + \varepsilon$ となる。以上より $p/q \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ となり $a \in \overline{A}$.

(2) A が稠密でないと仮定し矛盾を導く。$a \in \mathbb{R}$ で $a \notin \overline{A}$ となるものが存在すると仮定する。このとき $a \notin A$ だから a は有理数。またある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \cap A = \emptyset$, つまり $U(a;\delta) \subset \mathbb{Q}$ となる。任意の $c \in \mathbb{Q}$ と $x \in U(c;\delta)$ を取り $y := x + a - c$ とおく。このとき $|y - a| = |x - c| < \delta$ だから $y \in U(a;\delta)$, よって $y \in \mathbb{Q}$. すると $a - c \in \mathbb{Q}$ より $x = y - (a - c) \in \mathbb{Q}$. つまり任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して $U(c;\delta) \subset \mathbb{Q}$ となる。そこで $c := 0$ とする。このとき、もし $\delta \in \mathbb{Q}$ なら $b := \delta/\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ であり、$\delta \notin \mathbb{Q}$ なら $b := \delta/2 \notin \mathbb{Q}$. 何れの場合にも b は無理数であり、$b \in U(0;\delta)$ と矛盾する。

問題 22. $\mathbb{Q}$ が G_δ-集合だと仮定すると $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ となる可算個の開集合 O_n が存在する。任意の自然数 n に対して $\mathbb{Q} \subset O_n$ であり $\mathbb{Q}$ が稠密だから O_n も稠密。そこで正の整数 m に対して $U_{2m} := O_m$ 及び $U_{2m-1} := V_m$（ヒント参照）とおく。O_m も V_m も稠密だから、Baire の定理を用いて $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ は稠密。ところが $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$. これは稠密性と矛盾する。よって $\mathbb{Q}$ は G_δ-集合ではない。

後半は問題 20 から直ちに従う。