担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$\mathbb{R}^n$ における写像の連続性

Updated : October 25, 2016 Version : 1.0

写像の極限

一変数の実数値関数の連続性については第一回目に復習した。今回は多変数の実数値関数、ないし $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像の連続性を扱う。

問題 1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の関数 $f = f(x,y)$ を

$$f(x,y) := \frac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

で定める。次の極限を求めよ。

$$\lim_{t\to+0} f(t,t), \quad \lim_{t\to+0} f(t,t^{3/2}).$$

上の例の結果は「近付け方の違い」で極限に違いが出得ることを示唆する。そこで「どのように近付けても唯一つの値に収束する」場合に「収束する」と定義するのが良さそうである。この「近付け方」を定式化するために、前回復習した Euclid ノルムを用いる。

定義 1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A で定義された $\mathbb{R}^m$ に値をとる写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ と $b \in \mathbb{R}^m$ そして $a \in \overline{A}$ に対して、A の点 x が a に近づくのとき $f(x)$ の極限が b であるとは

> 任意の正の実数 ε に対して、$x \in A$ が $|x-a| < \delta$ を満たすならば
> $|f(x)-b| < \varepsilon$ がなりたつような $\delta > 0$ を取ることが出来る

ときをいう。このとき $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ と書き、「$x \to a$ で $f(x)$ は b に収束する」という。

Euclid ノルムの定義を使うことで、収束性の定義は一変数の場合とほぼ同様に記述できる。そして収束性に関する様々な主張も一変数の場合から多変数の場合に拡張できる。

問題 2. $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{A}$, $b \in \mathbb{R}^m$ とする。このとき写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ に対して次は同値であることを示せ。

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(2) a に収束する A 内の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = b$ が成り立つ。

では具体的な関数や写像に対して極限を考えてみよう。

問題 3. 以下の集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ とその上の写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ 及び $a \in \overline{A}$ に対して、極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ は存在するか？存在する場合はそれを求めよ。

(1) $A = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x, y\sin(1/y))$, $a = (0,0)$.

(2) $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y):=x\sin(1/y)+\sin(1/x)$, $a=(0,0)$.

(3) $A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=(x_1,\dots,x_n),\ x_i>0\}$, $f:A\to\mathbb{R}^n$, $f(x):=x/|x|$, $a=0$.

(4) $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$, $a=(0,0)$.

写像の連続性

定義 2. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A で定義された $\mathbb{R}^m$ に値を取る写像 $f:A\to\mathbb{R}^m$ が $a\in A$ で連続であるとは、$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つときをいう。また f が A で連続であるとは、任意の $a\in A$ に対して f が a で連続であるときをいう。

問題 4. $\mathbb{R}^2$ で定義された次の関数 f は $(0,0)$ で連続か? 理由と共に答えよ。

(1) $f(x,y):=2x^2y/(x^2+y^2)$ $((x,y)\neq(0,0))$, $f(0,0):=0$.

(2) $f(x,y):=2xy/(x^2+y^2)$ $((x,y)\neq(0,0))$, $f(0,0):=0$.

定義 2 の連続性は次のように書き換えることができる。

定理 1. $A\subset\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f:A\to\mathbb{R}^m$ に対して以下の命題は同値である。

(A) f は $a\in A$ で連続。

(B) $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ となる A 内の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty}f(x)=f(a)$.

(C) 任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ があって $f(U(a;\delta)\cap A)\subset U(f(a);\varepsilon)$.

(D) $f(a)$ を含む $\mathbb{R}^m$ の任意の開集合 U に対し $U(a;\delta)\cap A\subset f^{-1}(U)$ となる $\delta>0$ を取ることが出来る。

定理 1 の (A) $\Longleftrightarrow$ (B) の部分は問題 2 の帰結である。

問題 5. 定理 1 における (A) と (C) が同値であることを示せ。

問題 6. 定理 1 における (C) と (D) が同値であることを示せ。

定理 1 を用いると次を示すことがでる。

問題 7. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A 上の $\mathbb{R}^m$ に値を取る関数 $f:A\to\mathbb{R}^m$ に対して、以下の命題は同値であることを示せ。

(1) f は A 上で連続である。

(2) $\mathbb{R}^m$ の任意の開集合 U に対し $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 V があって $f^{-1}(U)=V\cap A$.

(3) $\mathbb{R}^m$ の任意の閉集合 F に対し $\mathbb{R}^n$ の閉集合 G があって $f^{-1}(F)=G\cap A$.

担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

補足 1. 問題 7 より写像の連続性を定義するには開集合という概念が重要であるように思われる。これについては位相空間論で ($\mathbb{R}^n$ とは限らない) 一般的な状況で扱うことになる。

問題 8. $A \subset \mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{R}^m$ に値をとる写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ を

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m, \quad x \in A$$

と成分表示する。このとき f が $a \in A$ で連続であるためには、任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して f_i が A 上の実数値関数として $a \in A$ で連続であることが必要十分であることを示せ。

問題 9. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が $\mathbb{R}^n$ で連続であるためには、任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が有界であるとは、$A \subset U(0; M)$ を満たす正の実数 M を取ることが出来るときをいう。また部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f : A \to \mathbb{R}^m$ が有界であるとは、f の像 $f(A)$ が $\mathbb{R}^m$ で有界であるときをいう。

定理 2. (Bolzano-Weierstrass の定理) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が有界であるためには、A 内の任意の点列が収束する部分列を含むことが必要十分。

定理 2 において A 内の点列の収束する部分列の極限は A の点であるとは限らない。この定理を認めて、以下を考えてみよう。

問題 10. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が有界閉集合 (つまり有界でありかつ閉集合) であるためには、A 内の任意の点列が A 内の点に収束する部分列を含むことが必要十分である。

補足 2. $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とも呼ばれる。コンパクト性は一般の位相空間に対して定義される概念だが、Euclid 空間の場合、コンパクト集合と有界閉集合は同値な概念である。なお一般的なコンパクト集合については演習の後半で詳しく扱う。

問題 11. $A \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合、$f : A \to \mathbb{R}^m$ を A 上連続な写像とする。このとき $f(A)$ は $\mathbb{R}^m$ 内の有界閉集合であることを示せ。

問題 12. A を $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合、$f : A \to \mathbb{R}$ を A 上の実数値連続関数とする。このとき任意の $x \in A$ に対して $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ となる $a, b \in A$ が存在することを示せ。

問題 13. $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上の (Euclid ノルムとは限らない一般の) ノルムだとする。また $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ とかく。但し $e_i \in \mathbb{R}^n$ は第 i 成分が 1 でその他の成分が 0 のベクトル。また $M := \max\{\|e_i\| \mid i = 1, \ldots, n\}$ と定める。

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|x\| \leq M n^{1/2} |x|$ となることを示せ。但し $|\cdot|$ は Euclid ノルム。

(2) $f(x) := \|x\|$ で定義される関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数であることを示せ。

(3) $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ は有界閉集合であることを示せ。

(4) ある正の実数 c があって任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $c|x| \leq \|x\|$ となることを示せ。

担当教員： 柳田 伸太郎 研究室： A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

その他の問題

問題 14. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ は、ある定数 $L > 0$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|, \quad x, y \in X \tag{$\heartsuit$}$$

を満たすとき、X 上で Lipschitz 連続であるという。また f が X 上で一様連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、$x, y \in X$ が $|x - y| < \delta$ を満たすなら $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となることをいう.

(1) f が Lipschitz 連続ならば一様連続であることを示せ。

(2) Lipschitz 連続な関数の例を挙げよ。

(3) 一様連続であるが Lipschitz 連続ではない例を挙げよ。

問題 15. X を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とする。また $f : X \to X$ を X からそれ自身への Lipschitz 連続関数とし、更に式 ($\heartsuit$) において $0 < L < 1$ であるとする。また $f_0(x) := x$, $f_n(x) := f(f_{n-1}(x))$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ と帰納的に写像 $f_n : X \to X$ を定義する.

(1) 任意の $x \in X$ と任意の非負整数 n に対して $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le L^n |f(x) - x|$ が成り立つことを示せ.

(2) 任意の $x \in X$ に対して X の点列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であることを示せ。

(3) 任意の $x \in X$ をとる。前問より点列 $\{f_n(x)\}$ はある $a \in X$ に収束する。このとき $f(a) = a$ となることを示せ。

(4) $f(a) = a$ となる点 $a \in X$ は唯一つであることを示せ。

一般に連続関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の零点集合 $f^{-1}(\{0\})$ は $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合である (問題 7 の (3) 参照)。では逆に、与えられた $\mathbb{R}^n$ の閉集合 F に対して $F = f^{-1}(\{0\})$ をみたす連続関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は存在するだろうか？以下ではこの問いを考える。

$\mathbb{R}^n$ 内の二つの部分集合 A と B に対し、その間の距離 $d(A, B)$ を次で定義する：

$$d(A, B) := \inf\{|a - b| \mid a \in A,\ b \in B\}. \tag{$\spadesuit$}$$

また $A \subset \mathbb{R}^n$ と $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(a, A) := d(\{a\}, A)$ と書き, 点 a と集合 A の距離と呼ぶ。

問題 16. 式 ($\spadesuit$) で定義した距離 $d(\cdot, \cdot)$ について、以下の主張を示せ。

(1) 任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ と $a \in A$ に対して $d(a, A) = 0$.

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合であることと $d(a, A) = 0$ を満たす点 a は A に含まれることが同値。

(3) $A \subset \mathbb{R}^n$ を閉集合とするとき、Lipschitz 連続関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で $f^{-1}(\{0\}) = A$ となるものが存在する。

問題 17. 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ の二つの閉集合 A と B で、$d(A,B)=0$ かつ $A\cap B=\emptyset$ となるようなものの例を挙げよ。

問題 18. $A,B\subset\mathbb{R}^n$ を $A\cap B=\emptyset$ を満たす空でない二つの閉集合とする。このとき連続関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ で次の二つの性質を満たすものが存在することを示せ。

(1) 任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $0\le f(x)\le 1$ となる。

(2) $x\in A$ なら $f(x)=1$ であり、$x\in B$ なら $f(x)=0$ となる。

補足 3. 問題 18 で $\mathbb{R}^n$ を一般の距離空間 X に置き換えても、同様の性質を満たす連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ が存在する。しかし X を一般の位相空間にしてしまうと、そのような連続関数があるかどうかは分からない。実は X が正規空間と呼ばれるクラスの位相空間では問題 18 の主張が成り立ち、この主張を Urysohn の補題と呼ぶ。

その他の問題 2

ここからは**杉浦光夫著「解析入門 I」(基礎数学 2) 東京大学出版会**の p. 56, 例 9 に従って、ある興味深い連続関数を扱うことにする。$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ を有理数のなす部分集合とする。

問題 19. 次の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{ が無理数のとき}\\ 1/q & x\text{ が既約分数 } x=p/q\ (q>0)\text{ のとき}\end{cases}$$

(1) 任意の自然数 n と無理数 a に対し、次の集合が有限 (又は空) 集合であることを示せ。

$$A(a,n):=\{p/q\mid p/q\text{ は既約分数で }0<q\le n,\ |(p/q)-a|<1\}.$$

(2) 任意の自然数 n と無理数 a をとる。上記の集合 $A(a,n)$ が空集合でないとき、$0<\delta<1$ を $\delta<\min\{d(a,x)\mid x\in A(a,n)\}$ となるように取る。このときもし $y\in U(a;\delta)$ が有理数ならば、既約分数として $y=p/q\ (0<q)$ とかくと $q>n$ となることを示せ。

(3) 関数 f は $a\in\mathbb{Q}$ なら a で連続でなく、$a\notin\mathbb{Q}$ なら a で連続となることを示せ.

問題 19 では「無理数で連続、有理数で不連続な関数」を考えた。では逆に「有理数で連続、無理数で不連続な関数」は存在するのだろうか？

まず $\mathbb{R}^n$ 全体で連続とは限らない関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、それが連続となる点全体の集合がどのような物かを調べよう。

$$C_f:=\{a\in\mathbb{R}^n\mid f\text{ は }a\text{ で連続}\}\qquad(\diamondsuit)$$

とおく。この集合 C_f を調べるために言葉をいくつか用意する。一般に、可算個の開集合の共通部分として書けている集合を G_δ-集合と呼ぶことにする。(可算個の閉集合の和集合として書けている集合は F_σ-集合と呼ばれる。)

担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 20. 任意の関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して式 $(\Diamond)$ で定義されている集合 C_f は G_δ-集合である。この主張を以下の手順で示せ。

(1) $C_f = \emptyset$ のとき主張が正しいことを示せ (そこで以下の設問では $C_f \neq \emptyset$ とする)。

(2) 任意の自然数 n と $a \in C_f$ に対し、$\delta(a,n) > 0$ を $|x-a| < \delta(a,n)$ ならば $|f(x)-f(a)| < 1/n$ となるように取る。このとき $U_n := \bigcup_{a \in C_f} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < \delta(a,n)\}$ は開集合であることを示せ。また $C_f \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ を示せ。

(3) $C_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ を示せ (従って特に C_f は G_δ-集合である)。

次に Baire の定理と呼ばれる定理を紹介する。一般に $A \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ で稠密であるとは $\overline{A} = \mathbb{R}^n$ が成り立つときをいう。

問題 21. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 A は $\mathbb{R}$ で稠密であることを示せ。

(1) $A := \mathbb{Q}$ (有理数全体) (2) $A := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (無理数全体)

定理 3. (Baire の定理) $\mathbb{R}^n$ の可算個の開集合 U_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ が与えられているとする。このとき、もし任意の k に対して U_k が $\mathbb{R}^n$ で稠密ならば、その共通部分 $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ も $\mathbb{R}^n$ で稠密である。

補足 4. Baire の定理は、$\mathbb{R}^n$ をより一般な完備距離空間と呼ばれる距離空間に置き換えても成り立つことが知られている。Baire の定理は関数解析の講義で扱われる (ことが多い)。

これを用いると、元々考えていた「有理数で連続、無理数で不連続な関数が存在するか？」という問いに答えることができる。

問題 22. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で G_δ-集合ではないことを示せ。また、特に連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $C_f = \mathbb{Q}$ となるものは存在しないことを証明せよ。
(ヒント: $\mathbb{Q}$ は可算集合なので $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ と番号付けできる。すると $V_n := \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ は $\mathbb{R}$ で稠密な開集合で、$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ は $\mathbb{R}$ で稠密となる。ここで $\mathbb{Q}$ が G_δ-集合と仮定すると、Baire の定理より $\mathbb{Q} \cap G$ が $\mathbb{R}$ の稠密な集合となるが、これから矛盾が生じることが分かる。)

つまり「有理数で連続、 無理数で不連続な関数は存在しない」ことが分かった。