

## 小テスト解答

Updated : October 26, 2016 Version : 1.2

実施日 : October 20, 2016

学生番号 \_\_\_\_\_ 名前 \_\_\_\_\_

問題 1. 実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  について、

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束すれば  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  が収束することを証明せよ。
- (2) 前問の逆が成立しないことを、反例を上げることで証明せよ。
- (3) (時間がある人のための追加問題)  
 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$  を求めよ (値だけでなく導出の過程も書くこと)。

## 解答

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束することから  $|a_n| \rightarrow 0$  なので、ある自然数  $N$  が存在して  $n > N$  ならば  $1 > |a_n|$  が成り立つ。すると  $n > N$  なら  $1 > |a_n| > a_n^2$  となっているので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < a_1^2 + \cdots + a_N^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

となり、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  は (絶対) 収束する。

- (2)  $a_n = 1/n$  とすれば反例になる。
- (3)  $x = e^{-t}$  と変数変換して  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{t \rightarrow +\infty} t/e^t$ 。  $e^t$  は多項式より速く発散するので (もしくは、例えば、 $t > 0$  なら  $e^t > t^2/2$  より  $0 < t/e^t < 2/t$  なので)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t/e^t = 0$ 。 よって  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ 。

1問5点で採点しました。赤ペンはTAの澤田さんの採点分で、青ペンは柳田のコメントです。(1)と(2)の平均点は7.1点でした。基本的な(一部は高校数学の)問題ですので、完答できるようにして下さい。

## 連絡事項

- (1) 来週 11/3(木) は祝日のため休講です。
- (2) 11月から TA の澤田さんの Cafe David 待機時間が金曜日の 16:00–17:30 に変更になります。
- (3) プリントの色分けについて説明を加えます：
  - 問題 2. この色の問題は易しめの問題です。
  - 問題 3. この色の問題は標準的な問題です。
  - 問題 4. この色の問題は発展問題です。

以上です。