解答 ($\mathbb{R}^n$ の開集合と閉集合)

作成日：October 18, 2016

問題 1. $y \neq 0$ とし $z := (\langle x,y \rangle/\langle y,y \rangle)y$ とおく。$\langle z,z \rangle = \langle x,z \rangle = |\langle x,y \rangle|^2/\langle y,y \rangle$ より

$$0 \leq \langle x-z, x-z \rangle = \langle x,x \rangle - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle}$$

となるから $|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$ となる。等号は上記の不等式で等号が成立するとき、すなわち $x = (\langle x,y \rangle/\langle y,y \rangle)y$ のとき成り立つ。

問題 2. (N1) と (N2) はそれぞれ内積の性質 (I1)、(I2) と (I4) から従う。また $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y \rangle) + \|y\|^2$ となるが、これに Cauchy-Schwarz の不等式 (問題 1) を適用すると (N3) が分かる。

問題 3. 距離の性質のうち (M1) と (M2) は (N1) と (N2) から従う。また (M3) はノルムの性質 (N3) と $x-z = (x-y)+(y-z)$ から分かる。

問題 4.

(1) 条件 (M1) はノルムの条件 (N1) と d の定義から、また (M2) はノルムの性質 (N2) から従う。また一般に非負実数 $a,\ b,\ c$ が $a \leq b+c$ を満たせば $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$ が成り立つから (M3) が成り立つ。

(2) $d(x,y) = N(x-y)$ となるノルム N が存在したと仮定する。このとき $N(x) = d(x,0)$ である。任意の $0 \neq c \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す) と $0 \neq x \in V$ に対して $N(cx) = |c|\,N(x)$ となり、従って $|c|\,\|x\| = \|x\|$ が成り立つ。$x \neq 0$ より $\|x\| \neq 0$ だから $|c| = 1$。これが任意の $c \in \mathbb{F}$ に対して成り立つことになり矛盾。

問題 5. (M1) と (M2) は明らか。$d(x,z) = 1$ のとき $x \neq z$ であるが、このときどのような y を取っても $d(x,y) = 1$ または $d(y,z) = 1$ が成り立つから (M3) が成り立つ。

問題 6. (M1) と (M2) は明らか。また

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

が任意の $x,y,z \in X^{\mathbb{N}}$ に対して成り立てば、右辺は $d(x,y)+d(y,z)$ 以下であるから (M3) が従う。そこで上の不等式を示す。

$x,y,z \in X^{\mathbb{N}}$ とする。$x \neq z,\ y \neq x,\ y \neq z$ と仮定してよい。すると

$$d(x,z) = 1/k, \quad d(x,y) = 1/l, \quad d(y,z) = 1/m$$

となる $k,l,m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がある。$l \leq m$ と仮定して $l \leq k$ を示せばよい。$l \leq m$ より,

$$x_1 = y_1,\ \ldots,\ x_{l-1} = y_{l-1},\ x_l \neq y_l,$$
$$y_1 = z_1,\ \ldots,\ y_{l-1} = z_{l-1},\ \ldots,\ y_{m-1} = z_{m-1},\ y_m \neq z_m$$

となっている。従って $i = 1,\ldots,l-1$ に対しては $x_i = z_i$ が成り立つ。よって $d(x,z) = 1/k$ より $l \leq k$ となる。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7.

(1) Euclid ノルムは定義 2 の意味でノルムだから $\|x\| \geq 0$。$\|x\| = 0$ とすると $Ax = 0$ だが、A が可逆だから $x = 0$ となり (N1) が成り立つ。$|A(cx)| = |cAx| = |c|\,|Ax|$ より (N2) も成り立つ。(N3) は $|A(x+y)| = |Ax + Ay| \leq |Ax| + |Ay|$ より従う。

(2) 任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して $0 \leq |x_i| \leq \|x\|$ である。よって $\|x\| \geq 0$ であり、$\|x\| = 0$ なら全ての i について $x_i = 0$ だから (N1) が分かる。また $c \in \mathbb{R}$ なら $|cx_i| = |c|\,|x_i|$ より (N2) が成り立つ。$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\| + \|y\|$ より (N3) が従う。

(3) (N1) と (N2) は前問と同様。(N3) は実数の絶対値についての同様の不等式から従う。

問題 8. 問題 3 よりユークリッド内積が定義 1 の意味で内積であることを示せばよい。(I1) の等号成立条件のみ示す。$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の Euclid 内積とし $x \in \mathbb{R}^n$ が $\langle x, x \rangle = 0$ を満たすなら、$0 \leq x_i^2 \leq \langle x, x \rangle$ より任意の i に対して $x_i = 0$ となるので $x = 0$ である。

問題 9.

(1) $a \in \mathbb{R}^n$ とする。$a \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ であるためには、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$ となることが必要十分。これは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) \not\subset A$ となることと同値。最後の条件は $a \notin A^o$ と同値である。

(2) $a \in \mathbb{R}^n$ とする。$a \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ であるためには, ある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \cap A = \emptyset$ となることが必要十分。これはある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ となることと同値。最後の条件は $a \in (\mathbb{R}^n \setminus A)^o$ と同値である。

問題 10.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ と $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $U(a;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ だから $\mathbb{R}^n \subset (\mathbb{R}^n)^o$ となる。$(\mathbb{R}^n)^o \subset \mathbb{R}^n$ は定義より明らかだから等号が成り立つ。

同様に $\overline{\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}^n$ は明らか。任意の $a \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n = U(a;\varepsilon) \neq \emptyset$ より $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ となる。

もし $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ ならある $a \in \overline{\emptyset}$ が取れる。定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) \cap \emptyset \neq \emptyset$ となり矛盾。よって $\overline{\emptyset} = \emptyset$。

同様に $\emptyset^o \neq \emptyset$ ならある $a \in \emptyset^o$ が取れる。しかし定義から、ある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \subset \emptyset$ となり矛盾。

(2) $a \in A^o$ ならある $\delta > 0$ が存在し $U(a;\delta) \subset A$ なので $a \in A$、つまり $A^o \subset A$ である。また $a \in A$ なら任意の $\varepsilon > 0$ について $a \in U(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$、つまり $A \subset \overline{A}$ である。

(3) $a \in A^o$ なら $U(a;\delta) \subset A$ となる $\delta > 0$ が取れるが、$A \subset B$ より $U(a;\delta) \subset B$ だから $a \in B^o$ となる。よって $A^o \subset B^o$ が成立。次に $a \in \overline{A}$ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\emptyset \neq U(a;\varepsilon) \cap A \subset U(a;\varepsilon) \cap B$ だから $a \in \overline{B}$ となり $\overline{A} \subset \overline{B}$ がわかる。

担当教員： 柳田 伸太郎　研究室： A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(4) 問題 (2) より $(A^o)^o \subset A^o$ が従う。逆の包含関係を示すため任意に $a \in A^o$ を取る。ある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \subset A$ となる。$U(a;\delta) \subset A^o$ を言えばよい。任意の $b \in U(a;\delta)$ を取って $\mu := \delta - |a-b|$ とする。$\mu > 0$ であり $U(b;\mu) \subset U(a;\delta)$ だから $U(b;\mu) \subset A$、つまり $b \in A^o$ となる。b は任意だったので $U(a;\delta) \subset A^o$ が成り立つ。

次に問題 (2) より $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ が従う。また $a \in \overline{\overline{A}}$ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $U(a;\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ となる。$b \in U(a;\varepsilon) \cap \overline{A}$ とする。このとき任意の $\mu > 0$ に対して $U(b;\mu) \cap A \neq \emptyset$ である。そこで $\mu := \varepsilon - |b-a|$ と取ると $\mu > 0$ であり $U(b;\mu) \subset U(a;\varepsilon)$ だから $U(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$、つまり $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ が分かる。

(5) $A \cap B \subset A$ だから問題 (3) より $(A \cap B)^o \subset A^o$ となる。同様に $(A \cap B)^o \subset B^o$ となり $(A \cap B)^o \subset A^o \cap B^o$ が従う。逆に任意に $a \in A^o \cap B^o$ を取る。$U(a;\delta_1) \subset A$ 及び $U(a;\delta_2) \subset B$ となる $\delta_1 > 0$ と $\delta_2 > 0$ が取れる。$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると $U(a;\delta) \subset A \cap B$ となる。よって $a \in (A \cap B)^o$。

次に $A \subset A \cup B$ だから問題 (2) から $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ となり、$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ が従う。逆を示すため任意に $a \in \overline{A \cup B} \setminus \overline{A}$ を取る。$a \in \overline{B}$ を言えばよい。$a \notin \overline{A}$ よりある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \cap A = \emptyset$ だが、$a \in \overline{A \cup B}$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ となる。従って $U(a;\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$、つまり $a \in \overline{B}$ が成り立つ。

問題 11. $a \in \overline{A}$ とすると、任意の正の整数 n に対して $U(a;1/n) \cap A \neq \emptyset$ となるので $x_n \in U(a;1/n) \cap A$ を取ることが出来る。点列 $\{x_n\}$ は A 内にあり、また $|a - x_n| < 1/n$ より $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たす。

逆に点 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して A 内の点列 $\{x_n\}$ で a に収束するものが存在すると仮定する。任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N で $n \geq N$ なら $|x_n - a| < \varepsilon$ となるものが存在する。特に $x_N \in U(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ だから $a \in \overline{A}$ である。

問題 12. (1) $\Longrightarrow$ (2) $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ とする．このとき $a \notin A = \overline{A}$ だから、ある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \cap A = \emptyset$ となる。特に $U(a;\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ だから $\mathbb{R}^n \setminus A$ は開集合。

(2) $\Longrightarrow$ (3) A 内の点列 $\{x_n\}$ が $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するとする。$a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ と仮定すると、$\mathbb{R}^n \setminus A$ は開集合だから、ある $\delta > 0$ が存在し $U(a;\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ となる。ところが $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ だから $n \geq N$ ならば $x_n \in U(a;\delta)$ となる自然数 N が取れる。これは $x_N \in A$ に矛盾である.

(3) $\Longrightarrow$ (1) $a \in \overline{A}$ とする。問題 11 より a に収束する A 内の点列 $\{x_n\}$ を取ることが出来るが、仮定から $a \in A$ となる。よって $\overline{A} \subset A$ となり、結論を得る。

最後の主張は (1) $\Longleftrightarrow$ (2) と $A = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$ から従う。

問題 13.

(1) 問題 10 の (1) より従う。

(2) $a \in U \cap V$ とする。U と V が開集合だから $\delta_1 > 0$ と $\delta_2 > 0$ でそれぞれ $U(a;\delta_1) \subset U$ 及び $U(a;\delta_2) \subset V$ をみたすものが取れる。$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると $\delta > 0$ であり $U(a;\delta) \subset U \cap V$ となる。よって $U \cap V$ は開集合。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とすると、ある $\lambda_o \in \Lambda$ が存在して $a \in U_{\lambda_o}$ となる。U_{λ_o} は開集合だから、ある $\delta > 0$ で $U(a;\delta) \subset U_{\lambda_o}$ となるものが存在する。このとき $U(a;\delta_o) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ だから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合。

問題 14.

(1) 問題 10 の (1) より従う。

(2) F と G が閉集合ならば、問題 12 の (1) $\Longleftrightarrow$ (2) より F^c と G^c は開集合。よって問題 13 の (2) より $F^c \cap G^c = (F \cup G)^c$ は開集合。再び問題 12 の (1) $\Longleftrightarrow$ (2) より $F \cup G$ は閉集合である。

(3) 問題 12 の (1) $\Longleftrightarrow$ (2) より任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して F_λ^c は開集合。問題 13 の (3) より $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$ は開集合。再び問題 12 の (1) $\Longleftrightarrow$ (2) より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は閉集合。

問題 15. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。

(1) 問題 10 の (4) より $A^o = (A^o)^o$ なので、定義から A^o は開集合。O を A に含まれる開集合とし $x \in O$ とすると、定義から $U(x;\delta) \subset O$ となる $\delta > 0$ が取れる。特に $U(x;\delta) \subset A$ だから $x \in A^o$、つまり $O \subset A^o$ となる。

(2) 問題 10 の (4) より $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ なので、定義から $\overline{A}$ は開集合。F が A を含む閉集合だとし、$x \in \overline{A}$ を任意に取る。すると任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である。$A \subset F$ より $U(x;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ となり、$x \in \overline{F} = F$ が分かる。つまり $\overline{A} \subset F$ である。

問題 16.

(1) 閉集合。任意の $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ に対し $\delta > 0$ を $\delta < \min\{|a-b|\,;\, b \in A\}$ となるように取ると、$U(a;\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ となる。よって $\mathbb{R}^n \setminus A$ は開集合。

(2) 閉集合。$\{x_n\} \subset A$ を収束列とし $b := \lim_{n\to\infty} x_n$ とすると、$a \le x_n$ より $a \le b$。つまり $b \in A$ である。

(3) 閉集合。A 内の点列は $\{(x_n, 0)\}$, $|x_n| \le 1$ とかけるので、それが収束するなら極限 $(x, 0)$ は $|x| \le 1$ を満たす。

(4) 閉集合。$A = \{0\}$ となり 1 点集合なので ((1) より) 閉集合。実際、$0 \in A$ は明らかだが、$x \in A$ とすると, 任意の k に対して $|x| < 1/k$ なので $x = 0$。

(5) 開集合でも閉集合でもない。

$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| \le 1\}$ となる。実際、$U_k := U(0; 1/k)$ 及び $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\}$ とすると、$F_k = B \setminus U_k$ より $A = B \setminus \bigcap_{k=1}^\infty U_k = B \setminus \{0\}$ となる。

$|x| = 1$ となる $x \in A$ をとると $x \notin A^o$ だから A は開集合ではない。また $x_n := (1/n, 0)$ とおくと、$\{x_n\}$ は A 内の点列だが $0 \notin A$ に収束する。よって A は閉集合ではない。

(6) 閉集合。

$a_n = (x_n, y_n)$ を A 内の点列で $a = (x, y)$ に収束するものとする。$a_n \in A$ だから $y_n = f(x_n)$ であり、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる。$0 \le x_n \le 1$ より $0 \le x \le 1$ であり、関数 f は連続だから $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ となる。よって $y = f(x)$ だから $a = (x, f(x)) \in A$。

(7) 開集合でも閉集合でもない。

$x_n := 1/(\pi/2 + 2n\pi)$ とおく。$(x_n, \sin(1/x_n)) \in A$ であり、また $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ と $\sin(1/x_n) = 1$ よりこの点列の極限は $(0, 1)$ となる。収束先が A に含まれないので、A は閉集合ではない。また $(-\varepsilon/2, 0) \in U((0,0); \varepsilon) \cap A^c$ だから、A は開集合でもない。

問題 17.

(1) A が開集合のとき $\mathbb{R}^n \setminus A$ は閉集合。すると $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n \setminus A$ なので $\partial A = \overline{A} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{A} \setminus A$ となる。

(2) A が閉集合だから $\overline{A} = A$。また $\overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)} = \mathbb{R}^n \setminus A^o$ だから $\partial A = A \cap (A^o)^c = A \setminus A^o$。

(3) $A := \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid r, s$ は有理数$\}$ とする。

このとき任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して A 内の点列 (r_n, s_n) で (x, y) に収束するものが取れるので、$\overline{A} = \mathbb{R}^2$ である。

また任意の $a = (r, s) \in A$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a; \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$ だから $A^o = \emptyset$。

以上より $\partial A = \overline{A} \cap (A^o)^c = \mathbb{R}^2$ となる。一方、$\overline{A} \setminus A = A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x$ と y のどちらかは無理数$\}$ 及び $A \setminus A^o = A$ から。$\partial A \neq \overline{A} \setminus A$ かつ $\partial A \neq A \setminus A^o$ である。

問題 18.

(1) 任意の $b \in U(a; \varepsilon)$ をとる。$\mu := \varepsilon - |b - a|$ とすると $\mu > 0$ であり $U(b; \mu) \subset U(a; \varepsilon)$ となる。よって $U(a; \varepsilon)$ は開集合。

(2) 任意の $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる。$b \in X \setminus U(a; \varepsilon)$ とする。任意の $x \in U(b; \varepsilon/2)$ をとる。もし $d(a, x) \le d(x, b)$ なら

$$\varepsilon \le d(a, b) \le \max\{d(a, x), d(x, b)\} = d(x, b) < \varepsilon/2$$

となり矛盾。従って $d(a, x) > d(x, b)$ である。このとき更に

$$\varepsilon \le d(a, b) \le \max\{d(a, x), d(x, b)\} = d(a, x)$$

となるから $x \in X \setminus U(a; \varepsilon)$ である。つまり $U(b; \varepsilon/2) \subset X \setminus U(a; \varepsilon)$ となり、$X \setminus U(a; \varepsilon)$ は開集合だと分かる。

問題 19. まず問題の等式を示す。$x, y \in V$ に対し

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2, \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

が成り立つから、二つの式を足せば問題の式が得られる。

次に $V = \mathbb{R}^2$ において幾何学的な意味を説明する。問題の等式は、次の平面幾何学における「中線定理」と同値である:

平面上の三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ について、辺 BC の中点を M とするとき、

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{AC})^2 = 2\big((\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{BM})^2\big).$$

この定理と問題の式とが同値であることを示すため、A が原点 $\mathrm{O} \in \mathbb{R}^2$ であるとし、$x := \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ 及び $y := \overrightarrow{\mathrm{BM}}$ とおく。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = x + y$ 及び $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = x - y$ から

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{AC})^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2, \quad (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{BM})^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

となる。これから $\mathbb{R}^2$ における問題の等式と上記の中線定理は同値だと分かる。

問題 20. (1)–(3) では前問の中線定理を使う。

(1) $n = 1$ なら内積から定義され、$n \geq 2$ なら内積からは定義されない。

実際、$n = 1$ のときは $\|x\| = |x|$ だから $\|x\|$ は Euclid 内積から定義されている。$n \geq 2$ のとき $x := (1, 0, 0, \ldots, 0)$ 及び $y := (0, 1, 0, \ldots, 0)$ とすると、$\|x\| = \|y\| = 1$ 及び $\|x+y\| = \|x-y\| = 2$ だから中線定理が成り立たない。

(2) $n = 1$ なら内積から定義され、$n \geq 2$ ならそうではない。

$n \geq 2$ のとき $x := (1, 0, 0, \ldots, 0)$ 及び $y := (0, 1, 0, \ldots, 0)$ とすると、$\|x\| = \|y\| = \|x+y\| = \|x-y\| = 1$ であるため中線定理が満たされない。

(3) 内積から定義されるノルムではない。

条件 (N1), (N2) は定義から直接従う。任意の $f, g \in C([0,1])_{\mathbb{R}}$ 及び任意の $x \in [0,1]$ に対して $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ より条件 (N3) が成り立つ。

また $f(x) = 1,\ g(x) = x$ とすると、$\|f\| = \|g\| = 1,\ \|f+g\| = 2,\ \|f-g\| = 1$ より中線定理が成り立たない。

(4) 内積から定義されるノルムである。実際

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) g(x)\, dx, \quad f, g \in C([0,1])_{\mathbb{R}}$$

が内積であることを示せばよい。内積の条件 (I2), (I3), (I4) は上記の定義から従う。また条件 (I1) の等号成立条件は f が連続関数であることから従う。