担当教員：柳田　伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト解答

Updated : October 19, 2016　　実施日：October 13, 2016

問題 1.

(1) 線形写像 $f : V \to W$ について、f が単射であることと $f^{-1}(0) = \{0\}$ であることが同値であることを示せ。

(2) X と Y を線形空間 V の部分空間とする。和空間

$$X + Y := \{x + y \in V \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

の次元が以下の式で与えられることを示せ。

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$$

(1) f は線形写像なので $f(0) = 0$ である。f が単射なら、$f(v) = 0$ となる $v \in V$ は $f(0) = f(v)$ より $v = 0$ でなければならない。つまり $f^{-1}(0) = \{0\}$ である。

逆に $f^{-1}(0) = \{0\}$ を仮定し、$v_1, v_2 \in V$ が $f(v_1) = f(v_2)$ を満たすとする。f は線形写像なので $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$。よって $f(v_1 - v_2) = 0$ で、仮定から $v_1 - v_2 = 0$。よって f は単射である。

(2) $X \cap Y$ の基底 $B := \{v_1, \dots, v_l\}$ をとる。$X \cap Y$ は X の部分空間なので、B を含む X の基底 $B_X = \{v_1, \dots, v_l, x_1, \dots, x_m\}$ を取ることができる。同様に B を含む Y の基底 $\{v_1, \dots, v_l, y_1, \dots, y_n\}$ が取れる。

$B_+ := \{v_1, \dots, v_l, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ が $X + Y$ の基底であることを示せれば、$\dim X = l + m$, $\dim Y = l + n$, $\dim(X \cap Y) = l$ および $\dim(X + Y) = l + m + n$ から示すべき式が得られる。

B_+ が $X + Y$ を生成することは、X と Y の基底を含むことから直ちに従う。

もし B_+ が線形独立でなければ、ある $v = \sum a_i v_i \in X \cap Y$ と $x = \sum b_i x_i \in X$ および $y = \sum c_i y_i \in Y$ があって、$(v, x, y) \neq (0, 0, 0)$ かつ $v + x + y = 0$ となる。$v + x \in X$ と $y \in Y$ および $v + x = -y$ より $y \in X \cap Y$。しかし y_i たちは $X \cap Y$ の基底 B に含まれないので $y = 0$ となるしかない。すると $v + x = 0$ で、B_X が基底であることから $v = x = 0$ となり $(v, x, y) \neq (0, 0, 0)$ と矛盾。よって B_+ は線形独立。