担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (1 変数関数の連続性)

問題 1. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ の有界性で場合分けする。結論を先に書くと

(1) I が上に有界かつ下に有界のとき。$a := \inf\{t \mid t \in I\}$ 及び $b := \sup\{t \mid t \in I\}$ として

(a) $a, b \in I$ なら $I = [a, b]$。　(b) $a \in I$ かつ $b \notin I$ なら $I = [a, b)$。

(c) $a \notin I$ かつ $b \in I$ なら $I = (a, b]$。　(d) $a, b \notin I$ なら $I = (a, b)$。

(2) I が上に有界だが下に有界でないとき。$b := \sup\{t \mid t \in I\}$ として

(a) $b \in I$ なら $I = (-\infty, b]$。　(b) $b \notin I$ なら $I = (-\infty, b)$。

(3) I は下に有界だが上に有界でないとき。$a := \inf\{t \mid t \in I\}$ とおくと

(a) $a \in I$ なら $I = [a, \infty)$。　(b) $a \notin I$ なら $I = (a, \infty)$。

(4) I が上にも下にも有界でないときは $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$。

証明は同様なので以下 (2) の場合のみ示す。

仮定から $I \subset (-\infty, b]$。$c < b$ となる任意の $c \in \mathbb{R}$ をとる。I が下に有界でないので $t_0 < c$ となる $t_0 \in I$ が存在する。また b は I の上限なので、ある $t_1 \in I$ が存在して $c < t_1$。I は区間であるから $c \in I$。よって $(-\infty, b) \subset I$ となる。

従って $b \in I$ ならば $I = (-\infty, b]$ であり、$b \notin I$ ならば $I = (-\infty, b)$ となる。

問題 2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって、$x \in I$ かつ $|x - a| < \delta$ なら $|f(x) - b| < \varepsilon/2$ かつ $|f(x) - b'| < \varepsilon/2$ となる。すると $|b - b'| \leq |b - f(x)| + |f(x) - b'| < \varepsilon$ となり、$\varepsilon > 0$ は任意たったから $b = b'$ となる。

問題 3. それぞれ以下の不等式を満たす δ を取ればよい。

(1) $0 < \delta \leq 19/100$。　(2) $0 < \delta \leq 5/41$。　(3) $0 < \delta \leq 1/98$。

問題 4.

(1) $\lim_{x \to 0} x^x = 1$。

(2) 発散する。

(3) $\sin x$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開から $\lim_{x \to 0} f(x) = 1/6$。

(4) $-1 < x < 0$ のとき $f(x) = x + 1/2$ なので $\lim_{x \to 0} f(x) = 1/2$。

(5) $\lim_{x \to -0} f(x) = 1/2$ と $\lim_{x \to +0} f(x) = -1/2$ から極限値は無い。

担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. 任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ があって、$|x-a|<\delta$ かつ $x\in I$ なら $|f(x)-b|<\varepsilon$。またこの $\delta>0$ に対しある自然数 N があって、$n\geq N$ なら $|x_n-a|<\delta$ となる。$x_n\in I$ なので、$n\geq N$ のとき $|f(x_n)-b|<\varepsilon$ が成り立つ。したがって $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$。

問題 6. 対偶を示す。$f(x)$ が $x\in I$、$x\to a$ のとき $b\in\mathbb{R}$ に収束しないと仮定する。ある $\varepsilon>0$ が存在し、どんな $\delta>0$ に対しても $x_\delta\in I$ で $|x_\delta-a|<\delta$ かつ $|f(x_\delta)-b|\geq\varepsilon$ となるような x_δ が存在する。$\delta=1/n$ $(n=1,2,\dots)$ とし対応する x_δ を x_n と書く。$x_n\in I$ かつ $|x_n-a|<1/n$ だから、数列 $\{x_n\}$ は a に収束する。しかし $|f(x_n)-b|\geq\varepsilon$ より $\{f(x_n)\}$ は b に収束しない。

問題 7. $f(a)\neq 0$ なので $0<\varepsilon<|f(a)|$ なる ε が取れる。この ε に対しある $\delta>0$ が存在して、$x\in I$ かつ $|x-a|<\delta$ なら $||f(x)|-|f(a)||\leq|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ となる。$J:=I\cap(a-\delta,a+\delta)$ とおけば、これは区間の共通部分なので（問題 1 より）やはり区間であり、任意の $x\in J$ に対し $0<|f(a)|-\varepsilon<|f(x)|$ より $f(x)\neq 0$ となる。

問題 8. $n=1,2,\dots$ に対し $x_n=1/2\pi n$ および $y_n=1/(2\pi n+\pi/2)$ とすれば $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$。ところが $f(x_n)=\sin(2\pi n)=0$ と $f(y_n)=\sin(2\pi n+\pi/2)=1$ から $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0\neq\lim_{n\to\infty}f(y_n)=1$。これから主張が従う。

問題 9. $f(x)/g(x)$ が $x=a$ で連続であることのみ示す。$g(a)>0$ の場合に示せば十分。

$$c:=\frac{1}{2}\frac{g(a)^2}{g(a)+|f(a)|}>0$$

とおく。$0<\varepsilon<\min\{g(a)/(2c),2\}$ となる任意の ε をとると、ある $\delta>0$ が存在し、$x\in I$ かつ $|x-a|<\delta$ なら $|f(x)-f(a)|<c\varepsilon$ かつ $|g(x)-g(a)|<c\varepsilon$。このとき $g(a)-c\varepsilon>0$ だから $g(x)\neq 0$。よって $x\in I$ かつ $|x-a|<\delta$ なら

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right|&=\left|\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)}\right|\\&\leq\frac{g(a)|f(x)-f(a)|+|f(a)|\,|g(x)-g(a)|}{g(a)\,(g(a)-c\varepsilon)}\\&<c\varepsilon\frac{g(a)+|f(a)|}{g(a)\,(g(a)-c\varepsilon)}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{g(a)}{g(a)-c\varepsilon}\leq\varepsilon\end{aligned}$$

となり $f(x)/g(x)$ は $x=a$ で連続である。

問題 10. $g(y)$ が $y=f(a)$ で連続だから、任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta_1>0$ が存在し、$|y-f(a)|<\delta_1$ となる $y\in J$ に対して $|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$ が成り立つ。また $f(x)$ が $x=a$ で連続だから、この δ_1 に対しある $\delta>0$ が存在して、$x\in I$ かつ $|x-a|<\delta$ なら $|f(x)-f(a)|<\delta_1$ となる。従って $|x-a|<\delta$ なら $|f(x)-f(a)|<\delta_1$ かつ $f(x)\in J$ だから、δ_1 の取り方から $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$ が成り立つ。よって $g\circ f$ は $x=a$ で連続。

担当教員： 柳田 伸太郎　研究室： A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 11. 極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ 及び $\lim_{x\to b} f(x)$ が存在することを示せば良い。$\lim_{x\to a} f(x)$ の存在のみ示す。

任意の $\varepsilon > 0$ をとる。$f(x)$ は (a,b) 上で一様連続だから、$x,y \in I$ が $|x-y| < \delta$ を満たせば $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$ となるような $\delta > 0$ を取れる。数列 $\{x_n\}$ を $a < x_n < b$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となるものとする。このとき $\{x_n\}$ は Cauchy 列だから、ある自然数 N があって $n,m \geq N$ ならば $|x_n - x_m| < \delta$ が成立する。すると $n,m \geq N$ なら $|f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon$ となるので、数列 $\{f(x_n)\}$ は Cauchy 列、即ち収束列である。そこで $c := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ と定める。

$\lim_{x\to a} f(x) = c$ を示せば良い。N を必要なら大きく取り直し、$|f(x_N) - c| < \varepsilon/2$ かつ $|x_N - a| < \delta/2$ だとして良い。$x \in (a,b)$ かつ $|x-a| < \delta/2$ ならば、

$$|x - x_N| \leq |x-a| + |a-x_N| < \delta$$

なので $|f(x)-f(x_N)| < \varepsilon/2$ となる。従って $|x-a| < \delta/2$ ならば

$$|f(x)-c| \leq |f(x)-f(x_N)| + |f(x_N)-c| < \varepsilon$$

となる。従って $\lim_{x\to a} f(x) = c$ となる。

問題 12. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る。f は $b \in [0,1]$ で連続であるから、$x \in [0,1]$ かつ $|x-b| < \delta$ なら $|f(x)-f(b)| < \varepsilon/2$ となる $\delta > 0$ が取れる。また仮定 $\lim_{n\to\infty} f^n(a) = b$ より、$n \geq N$ ならば $|f^n(a) - b| < \min\{\varepsilon/2, \delta\}$ となる自然数 N が取れる。

すると $n \geq N$ ならば、$|f^n(a)-b| < \delta$ より $|f^{n+1}(a) - f(b)| < \varepsilon/2$ となる。従って

$$|f(b)-b| \leq |f(b) - f^{N+1}(a)| + |f^{N+1}(a) - b| < \varepsilon$$

となる。$\varepsilon > 0$ は任意だから $f(b) = b$ である。

問題 13. f は $[0,1]$ 上の連続関数であるから $M := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < +\infty$ である。また Weierstrass の多項式近似定理により、多項式の列 $\{p_n\}$ で f に $[0,1]$ 上で一様収束するものが取れる。

任意に $\varepsilon > 0$ を取る。一葉収束性から、任意の $x \in [0,1]$ に対して $|f(x) - p_N(x)| < \varepsilon/M$ となるよう自然数 N が取れる。一方仮定から $\int_0^1 p_N(x) f(x)\, dx = 0$ である。従って

$$\left|\int_0^1 f(x)^2\, dx\right| \leq \left|\int_0^1 p_N(x) f(x)\, dx\right| + \int_0^1 |f(x) - p_N(x)||f(x)|\, dx < \varepsilon$$

となる。ε は任意に取っていたので、これは $\int_0^1 f(x)^2\, dx = 0$ を意味する。

$f(x)$ は $[0,1]$ 上の連続関数なので、$x \mapsto f(x)^2$ は $[0,1]$ 上の非負連続関数を定める。これと $f(x)^2$ の $[0,1]$ での積分が 0 であることから、全ての $x \in [0,1]$ で $f(x)^2 = 0$ 即ち $f(x) = 0$ となる。