担当教員：柳田 伸太郎　研究室：A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

1 変数関数の連続性

Updated : October 10, 2016

関数の極限

定義 1. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の 2 点以上からなる部分集合 I が区間であるとは、$a < b$ なる任意の $a, b \in I$ について、$a \leq x \leq b$ となる実数 x が全て I に含まれるときをいう。

問題 1. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とするとき、I は以下のうちいづれかの形の集合になることを示せ。ただし $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ とする。

$$[a,b], \quad [a,b), \quad (a,b], \quad (a,b), \quad [a,\infty), \quad (a,\infty), \quad (-\infty,b], \quad (-\infty,b), \quad (-\infty,\infty)=\mathbb{R}.$$

定義 2. 区間 I に対して集合 $\overline{I}$ を、I が有限の端点を含まない場合はその端点を含めた集合と定義する。また端点を含む場合には $\overline{I} = I$ と定義する。

例えば上記の問題 1 について、$I = (a,\infty)$ なら $\overline{I} = [a,\infty)$。また $I = [a,\infty)$ の場合は $\overline{I} = I$。

区間 I 上で定義された (実数値) 関数を $f : I \to \mathbb{R}$ などと書く。あるいは単に「区間 I 上で定義された関数 f」などと表現する。

定義 3. I 上の関数 f と $b \in \mathbb{R}$ そして $a \in \overline{I}$ に対して、「x が a に近づくときの $f(x)$ の極限が b である」とは、

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$x \in I$ が $|x-a| < \delta$ を満たすならば $|f(x)-b| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ をとることが出来る

ときをいう。このことを単に

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と書く。論理記号を用いると、

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon)$$

とも書ける。このとき「$f(x)$ は $x \to a$ のとき b に収束する」ともいう。

補足 1. $a = \infty$ の場合、上記の定義を次のように言い換えることができる：

「x が限りなく大きくなるときの $f(x)$ の極限が b である」とは、任意の $\varepsilon > 0$ について、$x > M$ となる任意の x に対して $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つような $M > 0$ が取れるときをいう。

$a = -\infty$ の場合も同様で、上記において $x > M$ を $x < -M$ にかえれば良い。

次に $b=\pm\infty$ の場合を考えよう。「$x\to a$ のとき $f(x)$ が $+\infty$ に発散する」とは、任意の $A>0$ について、$x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たすなら $f(x)>A$ が成り立つような $\delta>0$ を取れるときをいう。

「$f(x)$ が $-\infty$ に発散する」も同様に定義できる ($f(x)>A$ を $f(x)<-A$ にかえる)。

問題 2. (極限値の一意性) 区間 I 上の関数 f と $a\in\overline{I}$、そして 2 つの実数 b,b' に対して

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \quad \lim_{x\to a} f(x)=b'$$

が成り立つと仮定する。このとき $b=b'$ となることを示せ。

問題 3. 次の区間 I で定義された関数 f は、与えられた $a\in\overline{I}$ に対して $x\to a$ のとき表示された極限値 b を持つ。与えられた $\varepsilon>0$ に対して $x\in I$ が $|x-a|<\delta$ を満たすならば $|f(x)-b|<\varepsilon$ が成り立つような $\delta>0$ を 1 つ見つけよ。

(1) $I=[0,1],\ f(x)=\sqrt{x} \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=1.\ \varepsilon=0.1.$

(2) $I=[2,4],\ f(x)=\dfrac{x}{x+2} \Longrightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=\dfrac{3}{5}.\ \varepsilon=0.01.$

(3) $I=(0,1),\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}.\ \varepsilon=1/12.$

問題 4. 次の区間 I で定義された関数 f は、与えられた $a\in\overline{I}$ (または $a=\pm\infty$) に対して $x\to a$ のとき極限値を持つか? 持つ場合には極限値を求めよ。

(1) $I=(0,\infty),\ f(x)=x^x,\ a=0.$

(2) $I=(0,\infty),\ f(x)=\dfrac{3x^8+4x^5+6}{x^7+3},\ a=\infty$。.

(3) $I=(0,\infty),\ f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3},\ a=0.$

(4) $I=(-1,0),\ f(x)=x-[x]-1/2,\ a=0.$ ただし $[x]$ は実数 x 以下の最大の整数。

(5) $I=(-1,1),\ f(x)=x-[x]-1/2\ (x\neq 0$ のとき$),\ f(0)=0,\ a=0.$

補足 2. 微積分の参考書の中には、区間 I で定義された関数 f と $a\in\overline{I}$、$b\in\mathbb{R}$ に対して x が a に近づくときの $f(x)$ の極限が b であることの定義を、

> 任意の $\varepsilon>0$ に対して $x\in I$ が $0<|x-a|<\delta$ を満たすならば $|f(x)-b|<\varepsilon$ が成り立つような $\delta>0$ を取れるとき

と定義してあるものもある。この定義を記号で

$$\lim_{x\neq a,\ x\to a} f(x)=b$$

担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

と書くことにする。$a \in \overline{I} \setminus I$ なら我々の定義 3 とこの定義は一致する。しかし $a \in I$ だと一致するとは限らない。実際、$I = [-1, 1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases} \qquad (x \in I)$$

について、$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しないが $\lim_{x \neq 0,\ x \to 0} f(x) = 0$。なお極限の定義としては異なるが、以下の連続性の定義には影響を及ぼさない。

問題 5. 区間 I 上の関数 f と $a \in \overline{I}$ 及び $b \in \mathbb{R}$ について、次の 2 つの命題を考える:

(A) f は $x \to a$ のとき $b \in \mathbb{R}$ に収束する。

(B) $x_n \in I$、$\lim_{n \to \infty} x_n = a$ となる任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ が成り立つ。

このとき (A) $\Longrightarrow$ (B) が成り立つことを示せ。

問題 6. 逆に、上記において (B) $\Longrightarrow$ (A) が成り立つことを示せ。

上の二つの問題によって次の定義が得られる。

定理 1. 区間 I 上の関数 f と $a \in \overline{I}$ 及び $b \in \mathbb{R}$ に対する命題 (A) と (B) は同値。

関数の連続性

定義 4. 区間 I で定義された関数 f が点 $a \in I$ で連続であるとは、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つときをいう。つまり

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x \in I$ が $|x - a| < \delta$ を満たすならば
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ を取ることが出来るとき

を $f(x)$ が $a \in I$ で連続であるという。また f が I で連続であるとは、任意の $a \in I$ で連続のときをいう。

問題 7. 区間 I 上の関数 f が点 $a \in I$ で連続であり、かつ $f(a) \neq 0$ であったとする。このとき、点 a を含むある区間 J で $J \subset I$ であり、さらに $f(x) \neq 0$ が任意の $x \in J$ に対して成り立つものが存在することを示せ。

上記の定理 1 から次の定理が従う。

担当教員：柳田 伸太郎 研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

定理 2. 区間 I で定義された関数 f が $a \in I$ で連続であるためには、$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となる I 内の任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が成り立つことが必要十分である。

問題 8. 区間 $I = (0,\infty)$ で定義された関数 $f(x) = \sin(1/x)$ を考える。この関数は $f(0)$ をどのように定義しても $[0,\infty)$ 上の連続関数には拡張できないことを示せ。

定理 2 から次の問題の主張は 2 つの収束する実数列に対する同様の性質から従うが、ここでは定義から直接証明することを問題としておく。

問題 9. 次の主張を、点列を使った議論を用いず、ε-δ 式の定義から直接示せ：
$a \in I$ で連続な区間 I 上の 2 つの関数 f と g 及び $c \in \mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$cf(x), \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad f(x)/g(x) \quad (\text{最後のものは } g(a) \neq 0 \text{ と仮定する})$$

はどれも a で連続。

問題 10. f を開区間 I 上で定義された $a \in I$ で連続な関数とする。また g を f の値域を含むある区間 J 上ので定義された $f(a)$ で連続な関数とする。このとき合成関数 $g \circ f(x) := g(f(x))$ は点 $a \in I$ で連続であることを示せ。

その他の問題

問題 11. 区間 I 上の関数 f が I 上一様連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、$x, y \in I$ が $|x - y| < \delta$ を満たせば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう。今 I が開区間 $I = (a,b)$ であるとし、f が (a,b) 上一様連続であると仮定する。このとき、閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 g であって (a,b) 上で f と一致するものが存在することを示せ。

問題 12. f を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数であって任意の $x \in [0,1]$ に対して $f(x) \in [0,1]$ が成り立つものとする。このとき $n = 0,1,2,\ldots$ と $x \in [0,1]$ に対して

$$f^0(x) := x, \quad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)) \ (n \geq 1)$$

と帰納的に定義する。また $a, b \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} f^n(a) = b$ であると仮定する。このとき $f(b) = b$ となることを示せ。

問題 13. 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値の連続関数 f が、任意の $n = 0,1,2,\ldots$ に対して

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$$

を満たしていたとする。このとき $f = 0$ であることを示せ。
(ヒント: 次の Weierstrass の多項式近似定理を用いてもよい。閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 f に対して、実係数多項式の列 $\{p_n\}$ で p_n が f に $[0,1]$ 上で一様収束するようなものが存在する。)