LA 2020/5/15

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(i) 一次方程式 $x+2y+z=1$, $x-2y=1$ がそれぞれ空間内の平面を表わすことに注意して、各々の法線ベクトルを求めよ。

(ii) 上の 2 つの平面の成す角が $\pi/6$ と比べて大きいか小さいか調べよ。

(i) $ax+by+cz=d$ という形の平面の方程式の法線方向が $(a,b,c)$ であることから、$\overrightarrow{m}=(1,2,1)$ と $\overrightarrow{n}=(1,-2,0)$ が求める法線ベクトル（の一つ）である。

(ii) 平面そのものには方向はあっても向きは定まっていないので、成す角として鋭角 $\theta$ を取れば、

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{|1-4+0|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}=\sqrt{\frac{3}{10}}.$$

これを $\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$ と比べると、$\cos\theta<\cos(\pi/6)$ となることから、$\theta>\pi/6$ がわかる。

なお、$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}<0$ だから $\theta>\pi/2$ は $\pi/6$ より大きいと即断してはいけない。$\pi/3$ との大小を比べて、違いを認識せよ。

$\boxed{2}$ 2 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) $AB=BA$ となる $A$ をすべて求めよ。

(ii) $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$ となる $A$ が無数にあることを示せ。

(i) 行列の積

$$AB=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を比較して、$AB=BA$ となる $A$ は

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

の形の行列である。

(ii) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ であるから、$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2 \iff AB\neq BA$ となり、(i) の結果からこのような $A$ は (i) で求めたもの以外であればよいので、$b=c=0$ とならないものということで無数にある。