LA 2020/12/18

$\boxed{1}$

(i) ベクトル空間の基底と次元について説明せよ。

(ii) ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の基底で $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を含むものを無数に挙げよ。

(i) は略。

(ii) は、$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が基底となる条件である

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{vmatrix} = x + y$$

より、例えば、$x = 0$, $y = 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ のように無数にある。

$\boxed{2}$

(i) 一次変換とその行列表示について説明せよ。

(ii) a, b が学生番号の末尾の数字 2 つを表わすとき、行列

$$A = \begin{pmatrix} 2b - a - 8 & 2(a - b) + 8 \\ b - a - 4 & 2a - b + 4 \end{pmatrix}$$

が定める一次変換の基底

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に関する表示行列を求めよ。

(i) は略。

(ii) 求める表示行列を B とすると、

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (Af_1, Af_2) = (f_1, f_2)B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B$$

より、

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b-a-8 & 2(a-b)+8 \\ b-a-4 & 2a-b+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b-4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$