LA 2020/11/20

$\boxed{1}$ $(a,b) \neq (-1,-1)$ とする。2つのベクトル $(a,b,1)$, $(1,1,-1)$ を含む $\mathbb{R}^3$ の2次元部分空間を E とする。

(i) 直交補空間 $E^\perp$ を求めよ。

(ii) ベクトル $(1,1,1)$ と $E^\perp$ 方向のベクトルの成す角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ で表わすとき、θ は $\pi/6$ より大きいか否か。

(i) $(x,y,z) \in E^\perp$ の条件

$$ax + by + z = 0 = x + y - z$$

を解くと、$(x,y,z) = t(b+1, -(a+1), b-a)$ $(t \in \mathbb{R})$ となるので、$E^\perp = \mathbb{R}(b+1, -a-a, b-a)$ である。

(ii) $E^\perp$ の方向ベクトルが $(b+1, -a-1, b-a)$ であることから、

$$\cos\theta = \frac{|b+1-(a+1)+b-a|}{\sqrt{3}\sqrt{(b+1)^2+(a+1)^2+(b-a)^2}}$$

と $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ の大小を比較して、$\theta > \pi/6$ となるのは、

$$\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2} \iff (b-a)^2 < \frac{3}{4}((b+1)^2+(a+1)^2+(b-a)^2)$$

の場合である。

$\boxed{1}$ $a+b+2>0$ かつ $a \neq b$ とする。

(i) 3次対称行列

$$\begin{pmatrix} a+1 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b+1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ。

(ii) 2次形式 $(a+1)x^2 + y^2 + (a+1)z^2 + 2(b+1)xz$ が $(x,y,z) = (0,0,0)$ で極値をもつかどうか調べよ。

(i)

$$\begin{vmatrix} a+1-\lambda & 0 & b+1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ b+1 & 0 & a+1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} a+1-\lambda & b+1 \\ b+1 & a+1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)((a+1-\lambda)^2 - (b+1)^2)$$

であるから、固有値は $1, \quad a+1 \pm (b+1)$ である。

(ii) 問題の二次形式は、(i) の結果から変数変換（直交変換）により、

$$(a+b+2)X^2 + (a-b)Y^2 + Z^2$$

と表わされるので、$a-b>0$ ならば、原点で極小（実は最小）となり、$-b<0$ ならば鞍点となることから、極値を取らない。