LA 2020/10/23

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ 2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) $A$ の固有値・固有ベクトルの組を固有値ごとに求めよ。

(ii) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を (i) で求めた固有ベクトルの一次結合で表わせ。

(iii) 連立漸化式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解け。

(i) 結果だけ書くと、

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) これも結果だけ書くと、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = s_n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s_0 = t_0 = \frac{1}{2}$$

という表示を漸化式に代入すれば、

$$s_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = s_n A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_n A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -s_n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3t_n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$s_{n+1} = -s_n, \quad t_{n+1} = 3t_n$$

のように解どけ、$s_n = (-1)^n/2$, $t_n = 3^n/2$ より、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ 3次正方行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（$b$ は実数）について、以下の問に答えよ。

(i) $B$ の固有値を求めよ。

(ii) 実数の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(i)

$$|B - \lambda I_3| = (b - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (b - \lambda)(\lambda^2 + 1)$$

より、固有値は、$b$, $\pm i$ である。

(ii) 実数の固有値は $b$ のみであるから、その固有ベクトルを求めると、途中を略して、

$$B \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2+1 \\ b+1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} b-1 \\ b^2+1 \\ b+1 \end{pmatrix}.$$