続行列代数

山上 滋

2022 年 12 月 20 日

前期に学んだ行列とベクトルの基礎を前提とし、利用価値の高い事項を実例に即してさらに学ぶ。
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/linear/linear2020.pdf
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/complex/complex2013.pdf
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/calculus/cal2019.pdf

目次

1　固有値と固有ベクトル（§10）

正方（形）行列 A の有する様々な情報の中で最も重要なのが**固有値**とその**固有ベクトル**である。式で書けば、

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}, \quad \lambda \text{ は数（スカラー）、} \overrightarrow{v} \neq 0$$

となる。固有ベクトル $\overrightarrow{v}$ は、A の特性を表している特別な方向のベクトル、固有値 λ は A の効果が倍率として表される特別な数ということで、固有値と固有ベクトルは組で現れる。

一般に A はそのザイズの分だけ固有値・固有ベクトルの組が存在する。この事実を言い換えたものに行列の対角化があり、とりわけ理論的に重要ではあるが、実用的重要度としては固有値・固有ベクトルの方に軍配が上がる。その辺りの復習と補足から。

まず、λ が A の固有値 $\iff \det(\lambda I - A) = 0$ で、$\det(tI - A)$ を A の固有多項式という。固有多項式の零点として固有値を求めて、その上で連立一次方程式 $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ を解く（解空間を求める）というのが一つの手順であるが、具体的にこれを行うと二度手間に近いので、直接解空間を調べるのが良い場合もある。これについては、テキスト §10 の最後の方を見よ。

問 1.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルの組をすべて求めよ。

行列の対角化よりも固有値・固有ベクトルの組が大事であることを実感する：

例 1.1. 連立一次漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + b_1, \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + b_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を A の固有値・固有ベクトルの組

$$A\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}, \quad A\overrightarrow{v} = \beta\overrightarrow{v}$$

で、$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ が一次独立なもの（この場合は平行でないもの）が見つかったとして、上の漸化式を解いてみよう。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = s_n\overrightarrow{u} + t_n\overrightarrow{v}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v}$$

のように表したものを漸化式に代入すれば、

$$s_{n+1}\overrightarrow{u} + t_{n+1}\overrightarrow{v} = A(s_n\overrightarrow{u} + t_n\overrightarrow{v}) + p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} = s_n\alpha\overrightarrow{u} + t_n\beta\overrightarrow{v} + p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v}$$

となるので、両辺の $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ の係数を比較すると、

$$s_{n+1} = \alpha s_n + p, \quad t_{n+1} = \beta t_n + q$$

のように、分離した形の二種類の単独な漸化式に帰着する。これらを解くのは次のようにする。

$$s = \alpha s + p, \quad t = \beta t + q$$

を満たす s, t があるとき、すなわち $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ のときは、

$$(s_{n+1} - s) = \alpha(s_n - s), \quad (t_{n+1} - t) = \beta(t_n - t),$$

と書き直すことで、$s_n = s + (s_0 - s)\alpha^n$, $t_n = t + (t_0 - t)\alpha^n$ と表されるので、x_n, y_n も具体的に表される。

$\alpha = 1$ であれば、$s_{n+1} = s_n + p$ は (s_n) が等差数列であることに他ならないので、$s_n = s_0 + np$ と求まる。$\beta = 1$ のときも同様。

問 1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を使った連立漸化式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、解く手順を示した上で実際に解け。

以上の解析において、固有値は多項式の零点という形態を取るため、実数に限定していては固有値が見つからないことが起こり得る。一方で、複素数の固有値を認めると、その固有ベクトルの成分はもはや実数に限定することができず（何故か）、複素数を成分とするベクトルを考えざるを得なくなる。そうなると、行列の方の成分も実数にこだわる必然性を失い、結局複素数を成分あるいは係数とする行列を一般的に扱うことになる。

このように一般化しても、行列の代数演算や行列式の構成、さらには連立一次方程式の掃出し法はそのまま成り立つ。成分・係数の性質として必要なのは、加減乗除の規則だけであるから、例えば有理式を成分・係数とした行列・ベクトルの理論を組み立ててもよく、さらに一般化（抽象化）した「数」を対象とすることも可能である。しかもこういった一般化が机上の空論ではなく、実際に役に立つことがしばしば起こる。とは言え、それは必要とする状況に出会ってから改めて検討すれば良いことなので、以下では数の範囲はせいぜい複素数までと思っておけば十分でもある。

2　複素数の数学（複素解析§１）

極表示とオイラーの公式。

$$z = re^{i\theta} \quad (r \geq 0 \text{ は原点からの距離 radius, } \theta \text{ は偏角 argument}).$$

三角関数の加法公式は、オイラーの公式を通じて指数法則 $e^{i\varphi}e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$ と言い換えられる。複素値関数 $e^{i\omega t}$ (ω は実数、角振動数) は、調和振動の方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = -\omega^2 f(t)$$

を満たす。その解である（複素値）関数全体を V とすると、V はベクトルの集団とよく似た代数構造をもつ。実際、関数の各時刻 t ごとの和がベクトルの和に、関数の値の定数倍がベクトルのスカラー倍に相当する。そこで、一次独立とか基底が V においても意味を持ち、実際、$\omega \neq 0$ のとき、$e^{i\omega}, e^{-i\omega t}$ が V の基底となる。基底の取り方は他にも（無数に）あり、例えば、

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}, \quad \sin(\omega t) = -\frac{i}{2}e^{i\omega t} + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}$$

も基底となる。この関係は、

$$\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{i\omega t} & e^{-i\omega t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2\end{pmatrix}$$

のように表わすのが整合的で、実際

$$\begin{pmatrix}e^{i\omega t} & e^{-i\omega t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ i & -i\end{pmatrix}$$

のような形式的計算がオイラーの関係式と一致する結果を与える。

問 2.1. $\omega = 0$ のとき、V の基底を一組求めよ。

問 2.2. 複素数 $z \neq 1$ に対し、

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

であることを確かめ、$z = e^{i\theta}$ を代入したものの実部と虚部を比較することで得られる等式を書き下せ。

問 2.3. 虚数単位 i の極表示を求め、$z^3 = i$ となる複素数をすべて複素平面に図示せよ。

問 2.4. 複素数 $z = re^{i\theta}$ について、極限 z^n $(n \to \infty)$ の様子を図示せよ。

次は「代数学の基本定理」と呼ばれることが多いが、固有値の存在定理でもある。証明についてはテキストの付録 B を見よ。

定理 2.1. 複素係数の多項式 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ は、複素数 $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を使って $f(z) = (z - \zeta_1)\cdots(z - \zeta_n)$ と因数分解される。

Remark 1. 上の定理はガウス[*1]の名を冠して呼ばれることが多いのであるが、寄与が大であったにせよ、ガウス一人に帰せられるべきものでないこともまた事実。

例 2.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は、A の固有多項式が、$\det(tI - A) = (t^2 + \omega^2)$ であることから、$\pm i\omega$ となり、固有ベクトルは

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \pm i\omega \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

で与えられる。

これは、光学的には、円偏光の２つの状態（右まわりと左まわり）に対応するものとなっている。

ばねの連成振動 (coupled oscilation) についてはテキスト §10 の最後の辺りを見よ。よく似た解法の構図が再現する。

[*1] Carl Friedrich Gauss (1777–1855)。ガウスが生まれた１７７７年は、アメリカの独立戦争まっただ中で、フランス革命に先立つこと１２年という時代であった。日本では田沼意次の時代。

3　行列の対角化（§10）

基底と行列の対角化。用語の復習と使用例。

正方行列 D で次の形のものを**対角行列** (diagonal matrix) という。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \text{\huge 0} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{\huge 0} & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

与えられた $n \times n$ 行列 A に対して、逆をもつ $n \times n$ 行列 T をうまく選んで $T^{-1}AT$ が対角行列となるようにする操作を行列の**対角化** (diagonalization) と呼ぶ。対角化の直接の御利益は冪の計算が簡単になること。

ここで、行列の冪 (べき) について復習しておこう。正方行列 A と自然数 m ($m = 1, 2, \cdots$) に対して、A を m 回かけて得られる行列を $A^m = A \cdots A$ のように書いて A の m 乗とよぶのであった。指数法則 $(A^l)^m = A^{lm}$, $A^l A^m = A^{l+m}$ が成り立つことに再度注意。

問 3.1. 対角行列どうしの積が成分ごとの積に一致することを確認。

対角化の行列を見つけるために、T を縦割りにして $T = (\overrightarrow{x_1}, \ldots \overrightarrow{x_n})$ と表すと、$AT = TD$ という関係は

$$A\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

となる。そこで、行列 A に対して、ベクトル $\overrightarrow{x} \neq 0$ が $A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}$ なる関係をみたすとき、$\overrightarrow{x}$ を**固有値** (eigenvalue) λ の**固有ベクトル** (eigenvector) ということにすれば、A の対角化とは、A の固有ベクトルからなる基底を見出すことに他ならない。

定理 3.1. 行列 A の固有値 λ は、方程式（固有方程式という）

$$|tI_n - A| = 0$$

の解である（左辺を固有多項式という）。

系 3.2. 行列 A の固有値と転置行列 ${}^tA$ の固有値は一致する。

例 3.3.

$$\left| t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

対角化の手続き

ステップ１　固有方程式を解くことにより、固有値を求める。
ステップ２　固有値ごとに固有ベクトルを求める。掃き出し法が有効。
ステップ３　固有ベクトルからなる基底を作る。

問 3.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。また、$a = 1$, $b = 2$, $c = -2$ のとき、固有ベクトルを求めよ。

4 内積の幾何学（§13）

多変量（数ベクトル）と内積。データの間の距離と角度。相関係数の意味と性質。
内積 (inner product) とベクトルの大きさ（長さ）、

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}.$$

内積の性質：対称性 $(x|y) = (y|x)$、分配法則、正定値性 $(x|x) > 0$ $(x \neq 0)$、等質性 $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$。

一般に、一次結合が考えられるベクトル v, w の集まり V（ベクトル空間という）に対して実数 $\langle v|w\rangle$ が定められ、(i) 対称性、(ii) 分配法則、(iii) 正値性 $\langle v|v\rangle \geq 0$ $(v \in E)$ をみたすものを E 上の**半内積** (semi inner product) という。

例 4.1.

(i) m 次の列ベクトル v 全体に、$n \times m$ 行列 A を使って $\langle v|w\rangle = (Av|Aw)$ とすると、半内積が得られる。

(ii) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の集まり $v(t)$ に対して、

$$\langle v|w\rangle = \int_0^1 v(t)w(t)\,dt$$

としたものは、内積である。この場合は、関数がベクトルということになる。

半内積の不等式（コーシー・シュワルツ）：$x, y \in V$ に対して、

$$|\langle v|w\rangle|^2 \leq \langle v|v\rangle\,\langle w|w\rangle$$

が成り立つ。（Hermann Schwarz による証明。）とくに内積に関連して、ベクトル $x \neq 0$ と $y \neq 0$ の成す角 θ を

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

で定める。また、$(x|y) = 0$ のとき**直交**する (orthogonal) といい、$x \perp y$ と書く。便宜上、零ベクトルは、あらゆるベクトルに直交すると約束する。内積の不等式から三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つ。

例 4.2. ベクトルの集団 $x(i)$ $(1 \leq i \leq m)$ に対して、$\sum_i \|x - x(i)\|^2$ を最小にするベクトル x を求める。

$$\frac{1}{m}\sum_i \|x(i) - x\|^2 = \|x - \frac{1}{m}\sum_i x(i)\|^2 + \frac{1}{m}\sum_i (x(i)|x(i)) - \|\frac{1}{m}\sum_i x(i)\|^2.$$

より、$x = \frac{1}{m}\sum_i x(i)$ のとき、最小値

$$\sum_i (x(i)|x(i)) - m\left\|\frac{1}{m}\sum_i x(i)\right\|^2.$$

問 4.1. $x(i)$ が単位ベクトルのとき、二乗和の最小値が最大になるような $x(i)$ の配列について調べよ。

n 個の組データ $(x_j, y_j)_{1\leq j\leq n}$ について考える。血圧と体重、数学の成績と英語の成績、など。この**散布図** (scatter plot) とは、xy 平面上に n 個の点を図示したもの。右上がりと右下がりの雲。

x_i, y_i の**平均値** (mean)・**分散** (variance)・**標準偏差** (standard deviation)

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_j,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_j, \quad V_x = \frac{1}{n}\sum (x_j - \overline{x})^2,\ V_y = \frac{1}{n}\sum (y_j - \overline{y})^2, \quad \sigma_x = \sqrt{V_x},\ \sigma_y = \sqrt{V_y}$$

x_i, $\overline{x}$, σ_x は同じ単位（次元）をもつ量。**共分散** (covariance)

$$V_{x,y} = \frac{1}{n}\sum (x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

と**相関係数** (correlation coefficient)

$$\rho_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

相関係数は、単位のつかない量（比）であることに注意。

偏差ベクトル $\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_j - \overline{x})$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}(y_j - \overline{y})$ を使うと、

$$-1 \leq \rho_{x,y} = \frac{(\xi|\eta)}{\|\xi\|\,\|\eta\|} \leq 1.$$

$\rho_{x,y}$ が 1 に近いほど、正の相関が強い（高い）、-1 に近いほど、負の相関が強い（高い）、といったいい方をする。x, y のデータの増減が同調する傾向の強さを表す。

問 4.2. $\rho_{x,y} = 0$ のとき、x と y は相関がない（無関係）と言ってよいか。

5　正規直交基底と直交分解（§13、§14）

直交分解と直交基底。

ベクトルの集まり $M \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbb{R}^n$ のベクトルで M のすべてのベクトルと直交するもの全体を $M^\perp$ で表す。$M^\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。ベクトルの一次結合で閉じた $\mathbb{R}^n$ のベクトルの集団を $\mathbb{R}^n$ の部分空間という。

例 5.1. $M = \{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_m}\}$ のとき、$M^\perp$ は、連立一次方程式 $Ax = 0$ の解空間に他ならない。ただし、$A = {}^t(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_m})$ である。行列 A の縦横を入れ替える操作を転置と呼び ${}^tA$ と書くことに注意。

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの集まり $u_1, \dots, u_m$ で $(u_j|u_k) = \delta_{j,k}$ となるものを**正規直交系** (orthonomal system) という。部分空間 V のベクトルからなる正規直交系 $u_1, \dots, u_m$ で、V のすべてのベクトルが $u_1, \dots, u_m$ の一次結合で書けるものを V の**正規直交基底** (orthonormal basis) という。正規直交基底は存在し (Gram-Schmidt)、それを構成するベクトルの個数 m は一定（V の次元という）である。

問 5.1. $\mathbb{R}^3$ で、単位ベクトル $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ を含む正規直交基底を沢山作れ。

定理 5.2 (直交分解)**.** $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対して、$\mathbb{R}^n$ のベクトル x は、V のベクトル $x_\parallel$ と $V^\perp$ のベクトル $x_\perp$ の和として表され、しかもその表し方は一つしかない。

$x_\parallel$ を x の V への正射影 *(othogonal projection)* という。

Proof. V の正規直交基底 $u_1, \dots, u_m$ を用意する。もし $x \in \mathbb{R}^n$ が $x = \sum \lambda_j u_j + x_\perp$ $(\lambda_j \in \mathbb{R},\, x_\perp \in V^\perp)$ のように表されたとすると、

$$\lambda_j = (u_j | \sum_i \lambda_i u_i) = (u_j|x)$$

であるから $\sum_i \lambda_i u_i = \sum_i (u_i|x) u_i$ および $x_\perp = x - \sum (u_i|x) u_i$ は、x で決まる。逆に、$x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$x_\parallel = \sum_{j=1}^m (u_j|x) u_j, \quad x_\perp = x - \sum_{j=1}^m (u_j|x) u_j$$

とおくと、$x_\parallel \in V$, $x_\perp \in V^\perp$ であり、$x = x_\parallel + x_\perp$。 □

系 5.3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対して、$(V^\perp)^\perp = V$ である。

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの集まり $u_1, \dots, u_m$ に対して、$T = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m})$ とおくと、${}^tTT = ((u_i|u_j))_{1 \le i,j \le m}$ であることから、$u_1, \dots, u_m$ が正規直交系であることと ${}^tTT = I_m$ が同値。とくに $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $u_1, \dots, u_n$ を並べた正方行列 T は ${}^tTT = I_n$ をみたす。このような行列を**直交行列** (orthogonal matrix) と呼ぶ。直交行列は逆行列をもち、${}^tT = T^{-1}$ である。

標準基底 $e_1, \dots, e_n$ との関係：$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$ を行列で書けば、$\overrightarrow{x} = T\overrightarrow{y} \iff \overrightarrow{y} = {}^tT\overrightarrow{x}$ という座標変換式を得る。

例 5.4. 回転と折り返し。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

問 5.2. 2 次の直交行列は上の 2 つに限ることを示せ。

直交分解がわからないという声があったので、補足しておきます。n 次元でわかりにくかったら、まずは $= 2$ 次元です。この場合は、平面のベクトルに他ならず、V としては、1 次元の部分空間＝特定の方向を表わすベクトル全体、を考えることになります。そうすると、$V^\perp$ はそれに直交するベクトル全体ということになり、どの 2 次元ベクトルも V 方向のベクトルと $V^\perp$ 方向のベクトルの和の形でただ一通りに表される、というのが直交分解の内容です。力のベクトルを斜面に平行なものと垂直なものとに分解して云々というのは、斜面の力学として周知のことでしょう。そういった話です。

次に $n = 3$ を考えます。こちらは空間ベクトルの分解になりますが、V の次元として 1 次元と 2 次元の 2 つの場合が考えられます。とりあえず 1 次元であるとして、ここでも V はある特定のベクトルに比例するもの全体とします。図で表わせば原点を通る直線ということになります。そうすると、$V^\perp$ はその特定のベクトルと直交するベクトル全体ですが、今度は 3 次元空間の中で考えていることから、$V^\perp$ は平面的な図形で表されます。この場合も、一般の 3 次元ベクトルが V に平行な部分と $V^\perp$ に平行な部分の和に分解されるというのが、この場合の直交分解となります。この平面的な図形を斜面と思って、空間的な力のベクトルを斜面の法線方向と斜面に平行な方向に分解したものと同じことです。この状況からもわかるように、$V^\perp$ に直交するものが V ということで、結局 3 次元ベクトルが 1 次元部分空間のベクトルと 2 次元部分空間のベクトルの和に分解されるのが、直交分解の内容です。

以上のことが、次元の大きさによらず、いつでも成り立つというのが、直交分解定理の内容です。一般の場合は、図形に頼れないので、上の直交分解の証明のように、代数の技を使います。このとき、

$$(x|x) = (x_\parallel|x_\parallel) + (x_\parallel|x_\perp) + (x_\perp|x_\parallel) + (x_\perp|x_\perp) = (x_\parallel|x_\parallel) + (x_\perp|x_\perp)$$

となり、これはピタゴラスに他なりません。

$$(x_\parallel|x_\parallel) = \sum_{j=1}^{m} (u_j|x)^2$$

にも注意します。このことから、

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

といった不思議な等式 (Basel problem) が導かれたりします。

6　対称行列の対角化（§15、付録 E）

対称行列と二次形式。二次式の標準形と対称行列の直交対角化。基底の取り換えと直交対角化。

ベクトル $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の純二次式

$$Q(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$$

を x の**二次形式** (quadratic form) という。ここで、$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ は**対称行列**を表す。逆に対称行列 A から二次形式 Q が $Q(x) = (x|Ax) = {}^t x A x$ によって定められる。$2(x|Ay) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ に注意。

例 6.1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ のとき、$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

定理 6.2 (二次形式の標準形)**.** 二次形式 Q に対して、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $u_1, \cdots, u_n$ を適切に選ぶことで、$Q(s_1 u_1 + \cdots + s_n u_n) = \alpha_1 (s_1)^2 + \cdots + \alpha_n (s_n)^2$ $(s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{R})$ と表示できる。

Proof. $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトル全体を $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 1$ と書き、$n-1$ 次元球面と呼ぶ。$u_1, u_2, \cdots$ を順繰り作っていこう。

関数 $S \ni x \mapsto Q(x)$ の最小値[*2]を α_1 とし、それを実現する単位ベクトルを $u_1 \in \mathbb{R}^n$ とする。ここで $\langle x|x' \rangle = (x|Ax') - \alpha_1 (x|x')$ とおけば、$\langle \ | \ \rangle$ は半内積となり、不等式 $|\langle x|x' \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle x'|x' \rangle$ が成り立つ。そこで $\langle u_1|u_1 \rangle = 0$ に注意すれば、

$$\langle x|u_1 \rangle = 0 \ (x \in \mathbb{R}^n) \iff (x|Au_1) = \alpha_1 (x|u_1) \ (x \in \mathbb{R}^n) \iff Au_1 = \alpha_1 u_1.$$

すなわち、u_1 は固有値を α_1 とする A の固有ベクトルである。

次に部分空間 $\{u_1\}^\perp$ を考え、関数 $S \cap \{u_1\}^\perp \ni x \mapsto Q(x)$ の最小値を α_2 とし、それを実現する単位ベクトルを $u_2 \in \{u_1\}^\perp$ とする。そうして今度は、$\{u_1\}^\perp$ 上の半内積 $\langle x|x' \rangle = (x|Ax') - \alpha_2 (x|x')$ に上の議論を適用すれば（$A\{u_1\}^\perp \subset \{u_1\}^\perp$ に注意）、$Au_2 = \alpha_2 u_2$ がわかる。

以下、部分空間を $\{u_1, u_2\}^\perp$ に替えて同じ論法を繰り返せば（$A\{u_1, u_2\}^\perp \subset \{u_1, u_2\}^\perp$ に注意）、A の固有ベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が順次見つかる。さらに、$u_j \in \{u_1, \cdots, u_{j-1}\}^\perp$ であるから、$u_1, \cdots, u_n$ は互いに直交し、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる。最後に、

$$\begin{aligned} Q(s_1 u_1 \cdots + s_n u_n) &= (s_1 u_1 \cdots + s_n u_n | A(s_1 u_1 \cdots + s_n u_n)) \\ &= (s_1 u_1 \cdots + s_n u_n | \alpha_1 s_1 u_1 \cdots + \alpha_n s_n u_n) \\ &= \alpha_1 (s_1)^2 + \cdots + \alpha_n (s_n)^2 \end{aligned}$$

と計算することで、標準形を得る。 □

例 6.3. $S = \{(\cos\theta, \sin\theta); \theta \in \mathbb{R}\}$ であるから、α_1 は、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos(2\theta) + b\sin(2\theta)$$

[*2] 最小値（最大値も）が存在することは、Bolzano の「追い込み」論法による。

の最小値として、

$$\alpha_1 = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{q-c}{2}\right)^2 + b^2}$$

である。少し計算すれば、α_2 は α_1 の右辺のマイナスをプラスに変えたものであることもわかる。

問 6.1. 上の計算結果を確かめよ。

直交行列を $T = (u_1, \cdots, u_n)$ で定め、${}^tT = T^{-1}$ と $2(x|Ay) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ に注意して二次形式の標準形を書き直すと、次がわかる。

定理 6.4 (直交対角化)**.** 対称行列 A に対して、直交行列 T を適切に選ぶことで、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とできる。ここで、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は二次形式の標準形で現れた係数であり、A の固有値に一致する。とくに A の固有値はすべて実数である。

問 6.2. 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

の固有値を求め、A に伴う二次形式

$$Q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz$$

が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ で極値をもつかどうか調べる。

7　ベクトル空間と基底（§11）

線型代数を極めるためには、いずれかの時点で抽象化に触れる必要があるのであるが、いずれの時点が良いかは人それぞれということもあり、授業としての構成が悩ましい。

残りの何回かでは、一次変換とその固有ベクトルに関連した部分をいくつかの実例に即して「つまみ食い」してみよう。

これまでに様々なベクトルの一般化を見てきた。幾何ベクトルから始まり、数ベクトル、数列や関数もある種のベクトルと思うことができる。こういったベクトルに共通する構造は何かというと、一次結合が考えられるものであるとまとめられる。そこで一次結合の満たすべき性質を抽象化することで、見かけの違いに惑わされなくて済むベクトルの実体が明らかになる。

そのベクトルの一次結合であるが、無制限に考えて良いものではない。例えば、サイズの異なる行列（あるいはベクトル）の一次結合は通常意味をなさない。ということで、一次結合が可能なベクトルというものは、一つの集団を作ると考えて、それをベクトル空間と呼ぶ。形式的な定義は、テキストの該当箇所を見てもらうことにして、一言だけ注意すると、目に見える意味でのベクトルは、そういった意味でのベクトルの非常に特殊な例になっているということ。逆に言えば、目に見えるベクトル以外の様々なベクトルの集まりが考えられるということで、数列もベクトル、関数もベクトル、行列さえもベクトルと思うことができる。さらに、量子物理では、ものの存在形態そのものがベクトルで表されるという見方をする。

ベクトルの一次結合が意味をもてば、それから、ベクトルの集まりが一次独立であることが定義される。直感的には、考えているベクトルの集団の個々のベクトルが完全に独立な方向を向いているということで、このある意味、曖昧模糊とした状況が、一次結合を経由した代数的な性質として、正確かつ検証可能な形で記述されるということが極めて重要である。一次独立性はまた、係数比較を可能にするということで、ベクトルの間の関係式が数の間の等式に言い換えられ、連立一次方程式の理論と相まって、組織的かつ精密な解析を可能にする。

この考えを徹底すれば、一次独立なベクトルの集団を可能な限りたくさん取り出すことで、すべてのベクトルを数の並びと結びつけられるようになる。これがベクトル空間の基底というもので、基底を構成するベクトルの個数が扱っているベクトル空間の次元である。ここで注意すべきは、基底そのものは様々な取りようがあり、一つに決まるといった類のものではないということ。それにもかかわらず、基底の個数としての次元はベクトル空間ごとに一定であること。

ここで、便利な記号を導入しておく。基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ と数の集まり $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ に対して、

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ex$$

この数ベクトルから V への写像を $[e] : \mathbb{C}^n \to V$ のように書くことにする。これは座標 (coordinates) を与えれば点が決まるということの類似物である。ベクトルについては、座標と言わず成分 (components) というのであるが。

問 7.1. $\mathbb{C}^3$ の基底として、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を取るとき、ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の基底 (e_1, e_2, e_3) に関する成分を求めよ。

問 7.2. $\mathbb{R}^2$ の標準的な基底 $e = (e_1, e_2)$ を角度 θ 回転させると、新たな基底

$$f = (f_1, f_2), \quad f_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

が得られる。ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の基底 f に関して表した成分を求めよ。

ベクトル空間、スカラー（数の範囲、座標変換で変わらない量）
一次結合と一次独立、基底、次元
ベクトルの成分表示、数ベクトル、基底の取り換えと成分の変換
座標とは、ユークリッド空間とは。

$$(f_1, \cdots, f_n) = (e_1, \cdots, e_n)T \iff (e_1, \cdots, e_n) = (f_1, \cdots, f_n)T^{-1}.$$

$$(e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \cdots, f_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (e_1, \cdots, e_n)T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

8　線型作用素（一次変換）と行列（§12）

ベクトル空間 V のベクトルを V の中で移し替える写像 $\phi : V \to V$ で一次結合を保つものを一次変換あるいは線型作用素という。ここで、一次結合を保つの意味は、$\phi(\sum \lambda_j v_j) = \sum \lambda_j \phi(v_j)$ となること。この性質は $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$ $(v, w \in V)$ かつ $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ (λ はスカラー) と言っても同じである。

正方行列 A を縦数ベクトル v に左から掛ける操作は $\mathbb{R}^n$ の一次変換を定める。逆に $V = \mathbb{R}^n$ の一次変換はこの形である。とくに２次正方行列は、平面の位置ベクトルに作用させることで、平面の点の移動を引き起こす。回転・折返し・引き伸ばしなど。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

２つの一次変換を使ってベクトルの移し替えを続けて行うことで、新たな一次変換が得られる。これを φ と ϕ の合成といって、$\varphi\phi$ と書く。

行列の定める一次変換については、$[A][B] = [AB]$ となるので、一次変換の合成は行列の積に他ならない。あるいは、行列の積が一次変換の合成に由来する、と言っても良い。

問 8.1. 一次変換の和とスカラー倍を与えよ。一次変換の固有値と固有ベクトルの定義を与えよ。

一次変換の表示行列: V の基底 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ に対して、

$$\phi(f_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

と展開し、行列 $A = (a_{ij})$ を考えると、形式的ではあるが

$$(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = (f_1, \cdots, f_n)A$$

という関係式を得る。A を一次変換 ϕ の基底 f に関する**表示行列**[*3] (representation matrix) と呼ぶ。左辺は $f = (f_1, \ldots, f_n)$ に左から ϕ を施したものということで、ϕf と書くことにすれば、$\phi f = fA$ と表されるので、$A = f^{-1}\phi f$ と思うと相互の関係を調べるのに便利である。

Remark 2. テキストにあるように、基底 $f = (f_1, \ldots, f_n)$ の定める線型写像 $[f] : \mathbb{R}^n \to V$ を使えば、上の形式的な表示は厳密な等式となるのであるが、この段階で形式的なことに労を費やすよりは、具体的な計算で経験を積むのがよい。

命題 8.1. 与えられた基底 f に対して、対応 $\phi \mapsto f^{-1}\phi f$ は和と積とスカラー倍を保つ。とくに、$f^{-1}\phi^k f = (f^{-1}\phi f)^k$ *(*$k = 1, 2, \ldots$*)* である。

問 8.2. $\mathbb{R}^2$ の標準的な基底 $e = (e_1, e_2)$ を角度 θ 回転させると、新たな基底

$$f = (f_1, f_2), \quad f_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

が得られる。実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

[*3] 表現行列ということも多い。

の定める一次変換 ϕ の基底 f に関する表示行列 A_θ を求めよ。

ϕ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する表示行列を A、$(f_1, \cdots, f_n)$ に関する表示行列を B とするとき、

$(e_1, \cdots, e_n)TB = (f_1, \cdots, f_n)B = (\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n))T = (e_1, \cdots, e_n)AT \iff TB = AT.$

行列の掛け算による ϕ の標準基底に関する行列表示。

9　一次変換の固有値と固有ベクトル

一次変換の多項式。多項式 $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ の文字 x に一次変換 ϕ を代入して得られる一次変換を

$$P(\phi) = a_0I + a_1\phi + \cdots + a_m\phi^m$$

と書くことにする。

命題 9.1. 積多項式 $R(x) = P(x)Q(x)$ について、$R(\phi) = P(\phi)Q(\phi)$ が成り立つ。とくに、$R(x) = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_l)$ のとき、$R(\phi) = (\phi - \lambda_1I)\cdots(\phi - \lambda_lI)$ が成り立つ。

t のべき級数 $f(t) = f_0 + f_1t + f_2t^2 + \cdots$ をベクトルとみなし、その全体をベクトル空間 V とする。このとき、t に関する形式的な微分を D で表せば、D は V の一次変換である。単項式 t^n $(n \geq 0)$ は一次独立で、すべてのべき級数は、これの一次結合（の極限）であるから、t^n を並べた $(1, t, t^2, \cdots)$ を「基底」と思えば、形式的ながら

$$(D1, Dt, Dt^2, \cdots) = (0, 1, 2t, \cdots) = (1, t, t^2, \cdots)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

という微分 D の無限行列表示を得る。

命題 9.2. $Df = \lambda f$ の解は、定数倍の違いを除いて指数関数

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{1}{2}\lambda^2t^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3t^3 + \cdots$$

で与えられる。

異なる指数関数の集まり $e^{\lambda_j t}$ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は全部異なる$)$ は一次独立である。Vandermonde 行列式を使う。

ここで、微分方程式 $\frac{d^nf}{dt^n} + c_1\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} + \cdots + c_nf(t) = 0$ $(c_1, \cdots, c_n$ は定数$)$ の解を微分作用素 $D^n + c_1D^{n-1} + \cdots + c_nI$ を利用して調べてみよう。この場合の解は、一般に多項式にならないので、微分作用素を考える「ベクトル」の範囲を広げて、複素数を係数とするべき級数 $f(t) = f_0 + f_1t + f_2t^2 + \cdots$ 全体を考え、これを V と思う。この場合の微分 D は形式的に、$(Df)(t) = f_1 + 2f_2t + 3f_3t^2 + \cdots$ で定める。多項式 $P(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$ に対して、$P(D)$ という微分作用素を考えると、$P(D)f = 0$ となる冪級数 f が問題である。あるいは、解の集まりである解空間 $\ker P(D)$ がどのようなものであるか。

命題 9.3. $\dim\ker P(D) = n$ である。

これを調べるために、$P(t) = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$ と因数分解すると、それに応じて $P(D) = (D - \lambda_1I)\cdots(D - \lambda_nI)$ という表示が得られる。このことから、λ_j がすべて異なるときは、解空間の基底として、$e^{\lambda_j t}$ $(1 \leq j \leq n)$ が選べることがわかる。

λ_j の中に等しいものが現れるときは、$\ker(D - \lambda)^m$ を調べる必要が生じる。

そのために掛け算作用素 Q_λ を $(Q_\lambda f)(t) = e^{\lambda t}f(t)$ で定めると、

$$DQ_\lambda f = \lambda e^{\lambda t}f(t) + e^{\lambda t}(Df)(t)$$

すなわち、$DQ_\lambda = \lambda Q_\lambda + Q_\lambda D \iff (D-\lambda)Q_\lambda = Q_\lambda D$ ということで、これの繰り返しである $(D-\lambda)^m Q_\lambda = Q_\lambda D^m$ を使えば、$Q_\lambda Q_{-\lambda} = I = Q_{-\lambda}Q_\lambda$ に注意して、

$$0 = (D-\lambda)^m f = (D-\lambda)^m Q_\lambda Q_{-\lambda} f = Q_\lambda D^m Q_{-\lambda} f \iff D^m Q_{-\lambda} f = 0$$

より、$Q_{-\lambda} f$ が $m-1$ 次以下の多項式であればよい。このことから、$f(t) = e^{\lambda t} t^k$ $(0 \le k \le m-1)$ が $\ker(D-\lambda)^m$ の基底を与える。

例 9.4. $P(x) = x^2 + ax + b$ の場合。

問 9.1. 上の例について詳しく述べよ。

問 9.2. 微分作用素の代わりに、数列空間におけるずらし作用素 S を使って、漸化式 $x_{k+n} + c_1 x_{k+n-1} + \cdots + c_n x_k = 0$ を解くことができる。

10　確率行列をめぐって（§12）

ベクトル空間 V のベクトルの集まり W で、零ベクトルを含み、ベクトルの一次結合を作ってもはみださないものを部分空間という。部分空間自体が、ベクトル空間である。

固有空間は、その典型的な例。

部分空間 W で、一次変換 ϕ を施しても W の中にとどまっている場合を ϕ の**不変部分空間**と呼ぶ。

３次確率行列 (§12) を不変部分空間の小窓で調べる。

３点間の確率的移動について考える。点１にいたものが、次に点１，２，３に移動する確率を a_1, a_2, a_3 とする（a_1 は点１に留まる確率というべきか)。同様に点２、点３からの移動確率をそれぞれ b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 としよう。ある時点で点１，２，３にいる確率を x, y, z とすれば、次の時点での存在確率分布は

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

となる。このような行列 T を**確率行列** (stochastic matrix) と呼ぶ。時間の経過とともに確率分布がどのように変化するかを、行列 T の対角化の観点から調べてみよう。状況設定から、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff {}^tT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、${}^tT$ は 1 を固有値として持つ。したがって、系 3.2 により 1 は T の固有値でもある。以下、簡単のために、$a_1 = b_2 = c_3 = 0$ とし、$a_2 = a$, $b_3 = b$, $c_1 = c$ とおいて、その固有ベクトルを求めると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix}$$

となり、固有値 1 の固有空間への射影（作用素）で T と可換なものとして

$$E = \frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

をとることができる。（係数は $E^2 = E$ となるように調整。）

そこで、２次元不変部分空間 $(I_3 - E)\mathbb{R}^3 = \ker E = \{x+y+z=0\}$ の基底として、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとると、

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (1-a-c)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (b+c-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (c-1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、そこでの $[T]$ の表示行列は

$$\begin{pmatrix} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b+c-1 \\ 1-a-c & c-1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。その固有値の情報は

$$\begin{vmatrix} t+c & 1-b-c \\ a+c-1 & t+1-c \end{vmatrix} = t^2+t+ab+bc+ca-a-b-c+1$$

に集約されるので、$\sigma = ab+bc+ca-a-b-c+1$ から読み取れる。ここで、

$$\{ab+bc+ca-a-b-c+1; 0 \le a,b,c \le 1\} = [0,1]$$

および、最大値 $\sigma = 1$ を取る点は、$a=b=c=1$ または $a=b=c=0$ であり、最小値 $\sigma=0$ を取る点は、$\{0,1\} \subset \{a,b,c\}$ である。

最大値に対応する確率行列は巡回置換に対応し、最小値をとるのは互換に相当する。$0 < \sigma < 1/4$ のときの固有値は実数で、$(-1,-1/2)$ と $(-1/2,0)$ の間に一つずつある。$1/4 < \sigma < 1$ のときは、互いに共役な絶対値が 1 より小さい複素数が固有値。最後に、固有値 $-1/2$ が重なっている

$$\sigma = \frac{1}{4} \iff (a-1/2)(b-1/2)+(b-1/2)(c-1/2)+(c-1/2)(a-1/2) = 0$$

のときは、$(1/2,1/2,1/2)$ を頂点とし $(1,1,1)$ 方向に延びた円錐を表す[*4] このうち対角化可能であるのは、

$$\begin{pmatrix} -c & b+c-1 \\ 1-a-c & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

すなわち、頂点のみ。それ以外は、固有値 $-1/2$ の対角化できない 2 次行列であるから、基底を取り替えて、

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

という表示を得る。したがって、

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & n(-1/2)^{n-1} \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \to 0 \ (n \to \infty)$$

に注意すれば、$0 < \sigma < 1$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1-b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & b & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは、初期分布 ${}^t(x,y,z)$ のとり方に係わらず、時間が経過すると、確率分布

$$\frac{1}{ab+bc+ca-a-b-c+3} \begin{pmatrix} bc-b+1 \\ ac-c+1 \\ ab-a+1 \end{pmatrix}$$

に急速に近づくことを意味する。

問 10.1. 細部を検証せよ。また、$c=1/2$, $\sigma = 2/9$ の場合を詳しく調べよ。

問 10.2. 3 次の確率行列で、すべての固有値が有理数で互いに異なるものを具体的に一つ作れ。

[*4] σ を (a,b,c) の関数とみたとき、点 $(1/2,1/2,1/2)$ は $(+,-,-)$ 型の鞍点になっている。例??参照。