FA 2011/7/21

1 ヒルベルト空間における有界線型作用素について、以下の問に答えよ。

(i) エルミート共役の定義を述べ、その基本的性質を説明せよ。
(ii) エルミート作用素の定義を述べ、その具体例を挙げよ。
(iii) 射影作用素の定義を述べ、閉部分空間との関係について説明せよ。

2 $L^2(\mathbb{R})$ におけるフーリエ変換に関連して、以下の問に答えよ。

(i) $f(x) = e^{-ax^2+bx}$ のフーリエ変換 $\widehat{f}$ を求めよ。ここで、$a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ は定数である。
(ii) (i) で与えた関数に対して、$(\widehat{f}|\widehat{f})$ と $(f|f)$ をそれぞれ求め、$\dfrac{(\widehat{f}|\widehat{f})}{(f|f)}$ が、a, b に依らないことを示せ。

3

(i) 有界線型作用素のスペクトルとスペクトル半径について定義を述べよ。
(ii) スペクトル半径の公式について説明せよ（証明は不要)。
(iii) スペクトル半径とノルムが一致することを保証する結果について述べ（証明は不要)、一致しない例を一つ、理由と共に、与えよ。