1

定義 1 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が step function であるとは、ある自然数 n と n 個の実数 $\alpha_1,...,\alpha_n$ と n 個の有界区間 $D_1,...,D_n$ が存在して、任意の x に対して

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{D_i}(x) \tag{1}$$

が成り立つことである。ただし χ_{D_i} は D_i の指示関数である。

$S(\mathbb{R})$ をすべての step function からなる集合とすると $S(\mathbb{R})$ は指示関数が張る空間と等しいので線形空間である。有界区間 $D(=(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]))$ に対して $b-a$ を D の幅といい $\mid D\mid$ とかく。

定義 2 区間の分割とは有限実数列 $\{t_0,t_1,...,t_n\}$ であって $t_0<t_1<...<t_n$ を満たすものである。

区間の分割 $\Delta=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ が与えられたとき、$2n+1$ 個の有界区間 $\Delta_1,...,\Delta_{2n+1}:=(t_0,t_1),...,(t_{n-1},t_n),[t_0,t_0],...,[t_n,t_n]$ を作ることができる。これらはすべて空集合ではない。また共通部分を持たない。したがって指示関数は任意の $1\leq i\neq j\leq 2n+1$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して $\chi_{\Delta_i}(x)=1$ ならば $\chi_{\Delta_j}(x)=0$ を満たし、さらに下の命題が成り立つ。

命題 1 $\chi_{\Delta_1},...,\chi_{\Delta_{2n+1}}$ は $S(\mathbb{R})$ において線形独立である。

証明 $\alpha_1,...\alpha_{2n+1}\in\mathbb{R}$ が $\alpha_1\chi_{\Delta_1}+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}=0$(恒等的に 0) を満たしていると仮定する。$m\in\{1,...,2n+1\}$ を任意にとると Δ_m は空集合ではないので $x\in\Delta_m$ が存在する。この x を仮定の式に代入すると $\alpha_m=0$ である。よって $\alpha_1=...=\alpha_{2n+1}=0$ だから $\chi_{\Delta_1},...,\chi_{\Delta_{2n+1}}$ は $S(\mathbb{R})$ において線形独立である。 □

定義 3 区間の分割 Δ が与えられたとする。上のような有界区間の指示関数たちが張る空間を ${}_{\mathbb{R}}\Delta$ とかく。つまり $\Delta=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ で $\Delta_1,...,\Delta_{2n+1}:=(t_0,t_1),...,(t_{n-1},t_n),[t_0,t_0],...,[t_n,t_n]$ のとき

$${}_{\mathbb{R}}\Delta:=\{\alpha_1\chi_{\Delta_1}+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}:\alpha_1,...,\alpha_{2n+1}\in\mathbb{R}\} \tag{2}$$

とする。

命題 2 ${}_{\mathbb{R}}\Delta$ は algebra-lattice である。

証明 まず ${}_{\mathbb{R}}\Delta$ が積に閉じていることを示す。任意の $f,g\in{}_{\mathbb{R}}\Delta$ に対し $fg\in{}_{\mathbb{R}}\Delta$ を示せばよい。

$f=\alpha_1\chi_{\Delta_1}+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}, g=\beta_1\chi_{\Delta_1}+...+\beta_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}$ とする。任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (\alpha_1\chi_{\Delta_1}(x)+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}(x))(\beta_1\chi_{\Delta_1}(x)+...+\beta_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}(x)) &(3)\\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}\alpha_i\beta_i(\chi_{\Delta_i}(x))^2+\sum_{i\neq j}\alpha_i\beta_j(\chi_{\Delta_i}(x))(\chi_{\Delta_j}(x)) &(4)\\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}\alpha_i\beta_i\chi_{\Delta_i}(x) &(5)\end{aligned}$$

従って $fg\in{}_{\mathbb{R}}\Delta$ であるから、${}_{\mathbb{R}}\Delta$ は algebra である。また、(5) から $[\Delta]:=\chi_{\Delta_1}+...+\chi_{\Delta_{2n+1}}$ が単位元となることがわかる。

次に ${}_{\mathbb{R}}\Delta$ が linear lattice であることを示す。${}_{\mathbb{R}}\Delta$ は線形空間であるので絶対値に対して閉じていることを示せばいい。$f\in{}_{\mathbb{R}}\Delta$ を任意にとり $f=\alpha_1\chi_{\Delta_1}+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}$ とする。このとき任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\mid f\mid(x) &= \mid\alpha_1\chi_{\Delta_1}(x)+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}(x)\mid &(6)\\ &= \mid\alpha_1\chi_{\Delta_1}(x)\mid+...+\mid\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}(x)\mid &(7)\\ &= \mid\alpha_1\mid\chi_{\Delta_1}(x)+...+\mid\alpha_{2n+1}\mid\chi_{\Delta_{2n+1}}(x) &(8)\end{aligned}$$

したがって $\mid f\mid=\mid\alpha_1\mid\chi_{\Delta_1}+...+\mid\alpha_{2n+1}\mid\chi_{\Delta_{2n+1}}\in{}_{\mathbb{R}}\Delta$ であるから、${}_{\mathbb{R}}\Delta$ は linear lattice である。

以上から ${}_{\mathbb{R}}\Delta$ は algebra lattice である。 □

命題 3 任意の $f(=\alpha_1\chi_{\Delta_1}+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}})\in{}_{\mathbb{R}}\Delta$ に対して

$$_{\Delta}I(f)=\alpha_1\mid\Delta_1\mid...+\alpha_{2n+1}\mid\Delta_{2n+1}\mid \tag{9}$$

として ${}_{\Delta}I:{}_{\mathbb{R}}\Delta\to\mathbb{R}$ を定義する。このとき ${}_{\Delta}I$ は線形である。また、正関数を正の実数に移す。

証明 まず ${}_{\Delta}I$ が線形であることを示す。任意の $f(=\alpha_1\chi_{\Delta_1}+...+\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}), g(=\beta_1\chi_{\Delta_1}+...+$

$\beta_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}) \in {}_{\mathbb{R}}\Delta, c \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
{}_{\Delta}I(f+g) &= {}_{\Delta}I((\alpha_1+\beta_1)\chi_{\Delta_1} + ... + (\alpha_{2n+1}+\beta_{2n+1})\chi_{\Delta_{2n+1}})) && (10)\\
&= (\alpha_1+\beta_1) \mid \Delta_1 \mid + ... + (\alpha_{2n+1}+\beta_{2n+1}) \mid \Delta_{2n+1} \mid && (11)\\
&= (\alpha_1 \mid \Delta_1 \mid + ... + \alpha_{2n+1} \mid \Delta_{2n+1} \mid) + (\beta_1 \mid \Delta_1 \mid + ... + \beta_{2n+1} \mid \Delta_{2n+1} \mid) && (12)\\
&= {}_{\Delta}I(\alpha_1\chi_{\Delta_1} + ... + \alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}) + {}_{\Delta}I(\beta_1\chi_{\Delta_1} + ... + \beta_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}) && (13)\\
&= {}_{\Delta}I(f) + {}_{\Delta}I(g) && (14)\\
{}_{\Delta}I(cf) &= {}_{\Delta}I(c\alpha_1\chi_{\Delta_1} + ... + c\alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}) && (15)\\
&= c\alpha_1 \mid \Delta_1 \mid + ... + c\alpha_{2n+1} \mid \Delta_{2n+1} \mid && (16)\\
&= c(\alpha_1 \mid \Delta_1 \mid + ... + \alpha_{2n+1} \mid \Delta_{2n+1} \mid) && (17)\\
&= c\,{}_{\Delta}I(f) && (18)
\end{aligned}
$$

よって ${}_{\Delta}I$ は線形である。

次に ${}_{\Delta}I$ が正関数を正の実数に移すことを示す。任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \geq 0$ を満たす $f(= \alpha_1\chi_{\Delta_1} + ... + \alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}) \in {}_{\mathbb{R}}\Delta$ をとる。$i \in \{1, ..., 2n+1\}$ を任意にとると Δ_i は空集合ではないので $a \in \Delta_i$ が存在する。この a について $f(a) = \alpha_1\chi_{\Delta_1}(a) + ... + \alpha_{2n+1}\chi_{\Delta_{2n+1}}(a) = \alpha_i \geq 0$ である。したがって任意の $i \in \{1, ..., 2n+1\}$ に対して $\alpha_i \geq 0$ なので $\alpha_1, ..., \alpha_{2n+1} \geq 0$ である。また、定義より $\mid \Delta_1 \mid, ..., \mid \Delta_{2n+1} \mid \geq 0$ だから

$$
I(f) = \alpha_1 \mid \Delta_1 \mid + ... + \alpha_{2n+1} \mid \Delta_{2n+1} \mid \geq 0 \tag{19}
$$

である。よって ${}_{\Delta}I$ は正関数を正の実数に移す □

命題 4　m 個の有界区間 $D_1, ..., D_m$ が与えられたとき、ある区間の分割 $\Delta = \{t_0, ..., t_n\}$ が存在して任意の χ_{D_i} は $\chi_{\Delta_1}, ..., \chi_{\Delta_{2n+1}}$ のいくつかの和として表せる。

証明　$D_1, ..., D_m$ の上限、下限をそれぞれ $a_1, b_1, ..., a_m, b_m$ として、それらを小さい順に並び変えることで高々 $2m$ 項からなる有限数列 $\Delta = \{s_0, ..., s_l\}(s_0 < \quad ... < s_l)$ を作ることができる。$\Delta_i \subset D_j$ であることを $i \prec j$ と書くことにすると $D_j = \bigsqcup_{i \prec j} \Delta_i$ である。よって $\chi_{D_j} = \sum_{i \prec j} \chi_{\Delta_i}$ である。 □

このことから $\mid D_j \mid = \sum_{i \prec j} \mid \Delta_i \mid$ であることが従う。

補題 1　$S(\mathbb{R})$ は algebra-lattice である。また、任意の $f(= \alpha_1\chi_{D_1} + ... + \alpha_n\chi_{D_n}) \in S(\mathbb{R})$ に対して

$$
I(f) = \alpha_1 \mid D_1 \mid ... + \alpha_n \mid D_n \mid \tag{20}
$$

として $I : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を定義する。このとき I は well-defined である。さらに線形であり、正関数を正の実数に移す。

証明　まず、$S(\mathbb{R})$ が algebra-lattice であることを示す。$S(\mathbb{R})$ が線形空間であることは示してあるので、絶対値と積に対して閉じていることを示せばよい。$f = \alpha_1\chi_{D_1} + ... + \alpha_n\chi_{D_n}, g = \beta_1\chi_{E_1} + ... + \beta_m\chi_{E_m} \in S(\mathbb{R})$ を任意にとる。$F_1, ..., F_n, F_{n+1}, ..., F_{n+m} := D_1, ..., D_n, E_1, ..., E_m$ とおき、$\Delta_i \subset F_j$ であることを $i \prec j$ と書くことにする。命題 4 より、ある区間の分割 Δ が存在して $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\sum_{i\prec j} \chi_{\Delta_i}), g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(\sum_{i\prec n+j} \chi_{\Delta_i}) \in {}_{\mathbb{R}}\Delta$ である。${}_{\mathbb{R}}\Delta$ は絶対値と積に閉じているから $| f |, fg \in {}_{\mathbb{R}}\Delta \subset S(\mathbb{R})$ である。したがって $S(\mathbb{R})$ は algebra-lattice である。

つぎに、I が well-defined であることを示す。$f = \alpha_1\chi_{D_1} + ... + \alpha_n\chi_{D_n}, g = \beta_1\chi_{E_1} + ... + \beta_m\chi_{E_m} \in S(\mathbb{R})$ を任意にとり、$f = g$ とする。$F_1, ..., F_n, F_{n+1}, ..., F_{n+m} := D_1, ..., D_n, E_1, ..., E_m$ とおき、$\Delta_i \subset F_j$ であることを $i \prec j$ と書くことにすると命題 4 より、ある区間の分割 Δ が存在して $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\sum_{i\prec j} \chi_{\Delta_i}), g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(\sum_{i\prec n+j} \chi_{\Delta_i})$ である。よって

$$
\begin{aligned}
I(f) = I(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\sum_{i\prec j} \chi_{\Delta_i})) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\sum_{i\prec j} | \Delta_i |) && (21)\\
&= {}_{\Delta}I(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\sum_{i\prec j} \chi_{\Delta_i})) && (22)\\
&= {}_{\Delta}I(\sum_{j=1}^{m} \beta_j(\sum_{i\prec n+j} \chi_{\Delta_i})) && (23)\\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j(\sum_{i\prec n+j} | \Delta_i |) = I(\sum_{j=1}^{m} \beta_j(\sum_{i\prec n+j} \chi_{\Delta_i})) = I(g) && (24)
\end{aligned}
$$

よって I は well-defined である。

つぎに I が線形で、正関数を正の実数に移すことを示す。任意の $f, g \in S(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ をとる。$f, g, f + g, cf, | f | \in S(\mathbb{R})$ なのである Δ が存在して $f, g, f + g, cf, | f |$ は χ_{Δ_i} たちのいくつかの和として表せる。よって ${}_{\Delta}I$ が線形で正関数を正の実数に移すことから I もそうであることが従う。　□

補題 2　可算無限個の有界区間 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} D_n = (a, b)$ を満たすとき $\sum_{n=1}^{\infty} | D_n | = | (a, b) | = b - a$ である。

証明　まず $\sum_{n=1}^{\infty} | D_n | \leq b - a$ であることを示す。任意の k に対して $\sum_{n=1}^{k} | D_n | \leq b - a$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} | D_n | \leq b - a$ である。

次に $\sum_{n=1}^{\infty} | D_n | \geq b - a$ であることを示す。$\epsilon > 0$ を任意にとる。開区間の無限列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\bigsqcup_{k=1}^{n} D_k \subset \bigsqcup_{k=1}^{n} U_k$ かつ $| U_n | \leq | D_n | + \frac{\epsilon}{2^n}$ となるようにとると、$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ の開被覆となる。ハイネボレルの被覆定理より、有限部分被覆 $\{U_{n_j}\}_{j=1}^{k}$ をとることができる。したがって

$$
| [a + \epsilon, b - \epsilon] | = b - a - 2\epsilon \leq \sum_{j=1}^{k} | U_{n_j} | \leq \sum_{n=1}^{\infty} | U_n | \leq \sum_{n=1}^{\infty} | D_n | + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} | D_n | + \epsilon \tag{25}
$$

より、$b - a \leq \sum_{n=1}^{\infty} | D_n | + 3\epsilon$ である。ϵ は任意なので $\sum_{n=1}^{\infty} | D_n | \geq b - a$ である。　□