命題 1 (例 1.2) ふるいの公式［sieve formula］（包除原理［the inclusion-exclusion principle］）

$A_1, \ldots, A_n$：有限個の X の部分集合

ド・モルガンの法則：$X - (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (X - A_1) \cdots (X - A_n)$

$= X - (A_1 + \cdots + A_n) + \sum_{i<j} A_i \cap A_j + \cdots + (-1)^n A_1 \cdots A_n$

より

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 + \cdots + A_n - \sum_{i<j} A_i \cap A_j + \cdots + (-1)^{n-1} A_1 \cdots A_n$$

定義 2 X 上の関数 f は次の条件を満たすとき，**simple** という。

(i) f は有限個の X の部分集合の線形結合

(ii) 値域 f(X) は数の有限集合

命題 3 (演習 2) (i) と (ii) は同値である。

証明. (ii)⇒(i)

$f(X) := \{a_1, \ldots, a_n\}$

$f(x) = a_i \iff x = f^{-1}(a_i) =: A_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$

$A_1 f + \cdots + A_n f = f$

(i) ⇒ (ii)

$f = Xf$

$X = \mathbb{R}, f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ のとき

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \quad \leftarrow$ 有限集合でない。。。？ ■

定義 4 (Def.1.3) X：集合

V：X 上の実数値関数全体のなす実ベクトル空間

L：V の部分ベクトル空間

L は **linear lattice** であるとは

$$f, g \in L \Longrightarrow f \vee g, f \wedge g \in L$$

が成り立つことをいう。ここで

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(f)\}, (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(f)\} \quad (x \in X)$$

と定める。

命題 5 次は同値。

(a) L は linear lattice

(b) $f \in L \Longrightarrow |f| \in L$，すなわち，L は絶対値関数で閉じている

証明. (a)⟹(b)

$$|f| = \begin{cases} f & (f \geqslant 0) \\ -f & (f < 0) \end{cases} \in L$$

(b)⟹(a)

$f, g \in L \Longrightarrow |f|, |g| \in L$

$$f \vee g = \begin{cases} \dfrac{f+g+|f-g|}{2} = f & (f \geqslant g) \\ \dfrac{f+g+|f-g|}{2} = g & (f < g) \end{cases} \in L$$

$f \wedge g$ も同様にして，$f \wedge g \in L$。 ■

定義 6 L の **positive part** L^+ とは，次で定義される。

$$L^+ := \{f \in L \,;\, f \geqslant 0\}$$

命題 7 L は L^+ によって生成される。

証明. $f = (0 \vee f) + (0 \wedge f) = \underset{\substack{\cap \\ L}}{\underline{(0 \vee f)}} - \underset{\substack{\cap \\ L}}{\underline{0 \vee (-f)}}$ ■