# 複素解析入門

山上 滋

2023 年 7 月 21 日

## 目次

**終わり名古屋のいいわけなど**

はてさて、としを重ねると厚かましくなるもの、複素関数というのか、そういった授業を受けた記憶すらないままのこのような仕儀。まあ、明らかな落第科目を教えるの厚顔に比べればまだしも、食らいつくべし踏み越えるべし、謙虚に半歩の振り返りをこそ今はの際の杖ともなし、虚しきは人ごみの中の孤、受けるすべなき骸。叫喚は大笑に似たるか。

複素数は奥が深い。代数・幾何・解析という数学の３大柱のどれとも密接に関わるものであるし、実数のことは複素数から眺めることで本質がわかるという人も多い。ということで、複素数の数学を学ぶわけであるが、入門段階で扱うべき内容と段取りはほぼ決まっていて、複素数そのものの理解から始まって、複素級数、複素変数の関数、複素変数の微積分といった基礎部分をまずして、その後、応用とかさらに進んだ話題へと進むもののようである。この応用と発展の部分が実は多様を極め、その取捨選択が教える人の気分しだいというか、はた迷惑なところかも知れない。あれも大事これも大事とお節介を焼くよりも、基本のみ伝授して、あとは必要な部分を勝手にどうぞ、と突き放すのが正しい教師の態度かも知れない。世にあまたある本にいろいろ書いてあることでもあり。

**予備知識など**

二変数までの微積分。具体的には、https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/teaching.html で扱われている程度の内容。そのうち、級数・テイラー展開・線積分は前提としない。微積分の精密な扱い (epsilon-delta 論法など) も必要としない。ただし、こういったことは、少なくとも並行して学ぶべきで、その際の参考資料として、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/real2018.pdf を挙げておく。

ついでに書くと、複素解析の基礎の部分に関しては線型代数もいらない。大事なのは数学的好奇心。勉強のための勉強を潔しとせぬこころ。

### 参考書など


[1] Richard A. Silverman, Introductory Complex Analysis, 1985, Dover. 名古屋向きの一冊であるか。

[2] S. Lang, Complex Analysis, 3rd edition, 1998, Springer. かなり基礎的なことから書かれており、しかもゼータ関数と素数定理にまで及びかつリーマン面には触れないなど、隙のない本である。稽古用の問題も多数入っている。

[3] 神保道夫「複素関数入門」, 岩波書店 (2003). 著者の目配りが感じられる入門書。とりあえずの一冊にどうぞ。ただ、グリーンの定理が外注なのはいただけぬなあ。

[4] 笠原乾吉「複素解析」ちくま学芸文庫 (2016). 見かけによらず本格的である。いわゆる応用方面は志向してないが宝石箱の如し。

[5] S. G. Krantz and H. R. Parks, The Implicit Function Theorem, 2002, Birkhäuser. 複素解析の本というわけではないが、陰関数についてのあれこれ、歴史的な部分とか参考になる。

[6] Reinhold Remmert, Theory of Complex Functions, 1990, Springer. 率直かつ明快な本である。歴史的なコメントも充実している。一つ難を言えば、具体的な関数までの道のりが長いことであろうか。

[7] L. Ahlfors, Complex Analysis, 2021, AMS. そつのない定番で、日本語訳もある。


しかし、色々あるねえ、人間は教えたがる動物であったか、はた迷惑のようでもあり。

### 問の使い方など

問は基本事項を理解するために入れてあるので、（とくに (*) がついたものは）すべて解くことを勧める。解答を求めるまでもなく処理できるはずである。一部、基本から外れたものは (**) で示しておいたので、こちらはお好みで。

### よく使われる記号など

**数の集合**　$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ = 自然数全体、$\mathbb{Z}$ = 整数全体、$\mathbb{R}$ = 実数全体、$\mathbb{C}$ = 複素数全体。自然数に 0 を入れておく。

**円板・円周**　開円板 (open disk) と閉円板 (closed disk) を $D_r(c) = \{z \in \mathbb{C}; |z-c| < r\}$, $\overline{D}_r(c) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| \leq r\}$ で定める。また、円周 (circle) を $C_r(c) = \{z \in$

$\mathbb{C}; |z-c|=r\}$ で定める。ここで、複素数 $c$ は中心点を、$r>0$ は半径を表す。円周には、反時計回りの向きを入れておく。

**線分** 複素数 $c_0$ から複素数 $c_1$ へ向かう線分を $[c_0, c_1] : z(t) = tc_1 + (1-t)c_0$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表す。

**開集合** 複素平面内の集合 $D$ のどの点 $c$ も十分小さい $r>0$ に対して、$D_r(c) \subset D$ となっているとき、$D$ は開集合であるという。開円板は開集合である。

**閉集合** 複素平面内の集合 $D$ に対して、そのすべての極限点を付け加えたものを $\overline{D}$ という記号で表す。$D = \overline{D}$ であるものを閉集合という。閉円板は閉集合である。

**境界** $D$ が開集合であるとき、その境界を $\partial D = \overline{D} \setminus D$ で定める。開円板 $D_r(c)$ の境界は円周 $C_r(c)$ である。

**ノルム** 複素数値関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と部分集合 $A \subset D$ に対して

$$\|f\|_A = \sup\{|f(a)|; a \in A\}$$

とおく。$\{|f(a)|; a \in A\} \subset [0, r]$ となる最小の実数 $r \geq 0$ が $\|f\|_A$ である。

オイラーの公式

実数 $\theta$ に対して、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

なる関係式を**オイラーの公式** (Euler's formula) とよぶ。

これは、複素指数関数の定義式と思うこともできるが、指数関数・三角関数の冪級数展開 (いわゆるテイラー展開) を複素数に拡張した公式とみることもできる。それぞれを $\theta$ の関数と思って、単振動の微分方程式を考察してみてもよい。

関数の変数を複素数にまで拡張することにより、指数関数・三角関数は一つの実体の二つの投影であるという認識に到達する。このことは、単なる数学的な形式にとどまらず、自然の本質に深く関わっていることは、量子力学の教えるところである。その神秘的ともいえる調和の世界は、初等的な級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

の値を考察することからでも伺い知ることができる。

和をとる前の数列 $(1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots)$ の**母関数** (generating function)

$$f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$$

を求めてみよう。関数 $f(t)$ を微分すると、

$$f'(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \frac{1}{t+1}$$

となるので、これを積分して、

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \log(x+1).$$

とくに、$x=1$ を代入すると

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

なる等式が得られる。

つぎに、$x=i$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(i) &= 1(i) - \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{3}(-i) - \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{5}(i) - \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{7}(-i) + \dots \\ &= i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right). \end{aligned}$$

他方、

$$1 + i = \sqrt{2} e^{\pi i/4}$$

であるから、

$$f(i) = \log(i+1) = \log\sqrt{2} + \log e^{\pi i/4} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} i$$

と計算すれば、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

というさらに意外な公式も得られる。

こういった何かしら手品のトリックにも似た雰囲気をただよわせる複素数の数学の入り口付近をのぞいてみようというのが、この講義の主旨である。

**問 1.** 最後の等式の妥当性を計算機を使って確かめよ。(収束のスピードが遅いので、最低、複数項をまとめて計算すべきである。また計算実験であるから誤差の評価も考察しなくてはいけない。)

**問 2** (*). $\dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = i(\cos\theta + i\sin\theta)$ および $(\cos\theta + i\sin\theta)|_{\theta=0} = 1$ を認識せよ。

# 1　実数から複素数へ

　複素数の何たるかは知っていることと思うが、理解の程はどうか。次は、よく話題になる軽率な間違いであるが、問題点を指摘できるだろうか。

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1.$$

複素数で許される計算規則は何か。そもそも複素数は存在するのだろうか。複素数の構成を、実数についてはわかっている、というところから説明してみよう。

　まず、実数の場合の計算規則として重要なのが、加減乗除とそれに関連した結合法則、交換法則、分配法則である。複素数とは $a + ib$ の形の数で、実数の場合と同じような計算規則が成り立ち、$i^2$ が出てきたら $-1$ に置き換えて良い、というのが素朴な理解の仕方であるが、はたしてそれで矛盾が生じないのかどうか。$i^2 = 1$ という規則では何か困ることがあるのか。このことを理解するためには、$a + ib$ という表示の代わりに実数の組み $(a, b)$ がある新しい数（「複素数」）を表すと考えてみる。そして、「複素数」 $(a, b)$ に対する和と積を

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

で定めると、結合法則と交換法則と分配法則が成り立つことが確かめられる。$(a, 0)$ の形の「複素数」については、実数 $a$ に対する和と積に一致することに注意。さらに、$(0, 0)$ は、和に関して 0 のように振る舞い、$(1, 0)$ は、積に関して 1 のように振る舞う。そこで、「複素数」 $(a, b)$ の負数 $(a', b')$ を

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b) = (0, 0)$$

となるように定め、$-(a, b)$ と書くことにすれば、$-(a, b) = (-a, -b)$ となる。また、$(a, b)$ の逆数 $(x, y)$ を

$$(a, b)(x, y) = (x, y)(a, b) = (1, 0)$$

となるもの、すなわち、$x, y$ が連立一次方程式

$$ax - by = 1, \quad bx + ay = 0$$

を満たすものとすれば、逆数が存在するのは $a^2 + b^2 \neq 0$ のときで、そのとき、$(a, b)$ の逆数を $(a, b)^{-1}$ または $\frac{1}{(a,b)}$ と書くことにすれば、

$$\frac{1}{(a, b)} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

となる。

これ以降、慣例にしたがって、$(a,0)$ を $a$ と同一視し、$(0,1)=i$ と書くことにする。すなわち、$(a,b)=a+ib$ と書き表わす。等式 $(0,1)^2=(-1,0)$ が、$i^2=-1$ を表していることに注意。また、逆数の公式は、

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

のような計算になっていることにも注意。

**問 3.** 「複素数」についての結合法則、交換法則、分配法則を確かめよ。また、逆数を表す式を導け。

**問 4** (*)**.** $(x,y)(x,y)=(-1,0)$ となる $(x,y)$ をすべて求めよ。

**問 5.** 複素数 $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の平方根、すなわち、$z^2=a+ib$ をみたす複素数 $z$ を具体的に表示せよ。また、複素数を係数とする二次方程式が複素数の解を必ずもつことを確かめよ。

**問 6** (**)**.** 置き換え規則 $i^2=\alpha i+\beta$ $(\alpha,\beta$ は実数$)$ を採用した場合の '複素数' を定義し、代数演算の法則がすべて満たされることを確かめよ。また、'逆数' の存在について吟味せよ。

群論を学ぶ際の予備知識ともなる複素数の指数法則についても確認しておこう。自然数 $n$ に対して、$z^n=z\cdots z$ とおく。また、$z\neq 0$ と整数 $n$ に対して

$$z^n=\begin{cases} z^n & \text{if } n>0,\\ 1 & \text{if } n=0,\\ (1/z)^{-n} & \text{if } n<0\end{cases}$$

とおく。このとき、整数 $m,n$ と複素数 $z\neq 0$ に対して

$$z^m z^n=z^{m+n},\quad (z^m)^n=z^{mn}$$

が成り立つ。

**問 7.** 指数を正負で場合分けして、上の等式を確かめよ。

**命題 1.1** (複素等比級数)**.** 自然数 $n\geq 1$ と複素数 $z$ に対して、

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\begin{cases}\frac{1-z^n}{1-z} & (z\neq 1)\\ n & (z=1)\end{cases}.$$

まとめると、実数を２つ並べたベクトル全体を $\mathbb{R}^2$ に積の構造を $(0,1)^2=(-1,0)$ となるように定めたものが複素数である。したがって、複素数全体 $\mathbb{C}$ は、２次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ に積の構造を入れたもので、集合としては $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ ということになる。

複素数のもう一つの構成方法は行列によるものである。実数 $a$ を平面の一次変換 $\binom{x}{y}\mapsto\binom{ax}{ay}$ とみなせば、$-1$ は、角度 $\pi$ の回転である。そこで、その半分の回転である角度 $\pi/2$ の回転を表す行列に虚数単位の $i$ を対応させると、複素数 $x+iy$ の行列表示

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

を得る。これにより、複素数の計算規則の多くを行列のそれに還元させることができる。

これはこれで良い方法であるが、複素数を成分とする行列を考える際に、行列の行列という実体が受け入れられるかどうか。行列のブロック表示計算を理解すれば済むことではあるが。

# 2 複素数の幾何学

複素数 $z=x+iy$ に対して

$$x=\operatorname{Re}z,\quad y=\operatorname{Im}z,$$

を $z$ の**実部・虚部** (real part, imaginary part) 、$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ を**絶対値** (absolute value, modulus [*1]) 、$\overline{z}=x-iy$ を $z$ の**複素共役**（あるいは共役複素数[*2]とも）(complex conjugate) という。

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\qquad \overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w},\qquad \overline{\overline{z}}=z,$$
$$|z+w|\leq|z|+|w|,\quad |z|^2=z\overline{z},\quad |zw|=|z||w|$$

が成り立つ。

$$\operatorname{Re}z=\frac{z+\overline{z}}{2},\qquad \operatorname{Im}z=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

に注意。

---

*1 modulus はラテン語で small measure の意味、と言われてもわからぬなあ。意訳して、「大きさ」であるか。

*2 共役複素数だと、類型のエルミート共役 (Hermitian conjugate) のときに、エルミート共役行列ということになって、具合が悪い。series を級数と訳すのと同根の欠点あり。

*Remark* 1. 電気工学方面では虚数単位を表す記号として $i$ ではなく $j$ が使われる。$i$ は電流を表わすのに使うという理由で。また、複素共役を表わす記号として $z^*$ も良く使われる。とくに物理方面では。一方、$-1$ の平方根として、$\sqrt{-1}$ をそのまま使うことも古い文献とかに見られる。ただ、２つある $-1$ の平方根 $\pm\sqrt{-1}$ は、本来、対等のもので、一方を $i$ と書けば他方は $-i$ と表わせるという便宜的な区別でしかない。したがって、もしある複素数の等式が成り立つのであれば、その中で現われる $i$ をすべて $-i$ で置き換えた等式も成り立つことになる。この操作を複素数 $z = x + iy$ に施こすことが複素共役に他ならない。複素数のもつある種の対称性を表わしている。

**問 8** (*)**.** 等式 $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ を示し、それから $|zw| = |z|\,|w|$ を導け。不等式 $|z + w| \leq |z| + |w|$ が三角不等式と呼ばれる理由を説明せよ。また、$z \neq 0$ のとき、$\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ を示せ。

**問 9.** $z = x + iy$, $w = u + iv$ とした場合に、$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ はどのような等式に相当するか。

**問 10.** 実数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を係数とする方程式

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$$

が $z = c$ という解をもてば、$z = \overline{c}$ も解である。

複素数を見ようと思ったら、$z = x + iy$ を座標平面上の点 $(x, y)$ と同一視すればよい。このように複素数を使って表された平面を**複素平面** [*3] (complex plane) という。極座標 $(r, \theta)$ を使えば、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ なる表示を得る。これを複素数の極形式あるいは**極表示** (polar form) という。オイラーの関係式を使えば、

$$z = re^{i\theta}.$$

ここで、$r$ は $z$ の絶対値 $|z|$ に等しいことに注意。また、$\theta$ は $z$ の**偏角** (argument [*4]) と呼ばれ $\theta = \arg z$ と書く。偏角には、$2\pi$ の整数倍の不定性があることに注意。2 つの複素

---

[*3] 高校の教科書では、複素数平面という用語が使われている。うわさによれば、さる高名な数学者が「複素平面は $\mathbb{C}^2$ を表す用語である」と主張した結果、複素数平面なる言葉が採用された由。普通は、複素平面で済ませる習慣のため、入試出題の際の要注意事項の一つとなっている。なお、「ゆとり課程」では、複素数平面が絶対値とともに消滅したが、２０１２年度から復活した模様。

[*4] 英語で argument といったら、人を説得するための議論のことであるが、数学方面では関数の変数の意味でも使われる。さらに理由は不明なれど、複素数においては、極表示の角を表す。変数は、他に、variable とか parameter という言い方があるのに対して、複素数の角を表す数学用語は argument しかない。角度の不定性が、かつて argument の対象になったということであろうか。物理方面まで範囲を広げると、phase という言い方もあるが、この phase がまた様々な意味で使われる。ちなみに、日本語の偏角というのは、実軸からの偏りを表わす角という意味であろう。

数の和あるいは差は、ベクトルとしてのそれに等しい。オイラーの関係式を使えば、三角関数の加法定理は指数法則

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

の形を取り、このことから、

$$|zz'| = |z|\,|z'|, \qquad \arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

が従う。絶対値が 1 の複素数 $e^{i\theta}$ を掛ける操作が、複素平面における原点を中心とした角度 $\theta$ の回転を表していることに注意する。

*Remark* 2. 複素数の順序についてひとこと。試験をすると必ずのように、$i < 1 + i$ といった怪しげな不等式を書く人がでてくる。実数の場合には、一直線に数が並んでいるということで、その順序というのが意味を持つのであるが、複素数の場合は、平面を表すことからもわかるように、自然な順序というものは存在しない。本質的に対等であるべき $\pm i$ を敢えて区別する必要が生じるからである。

**問 11.** 加法定理と指数法則（偏角の加法性）が同等であることを確かめよ。

**問 12** (*). 複素数 $z \notin \{0, \pm 1\}$ に対し、

$$z + z^3 + z^5 + \cdots + z^{2n-1} = z^n \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}$$

であることを確かめ、$z = e^{i\theta}$ を代入したときの実部と虚部を取り出すことで得られる等式を書き下せ。

**例 2.1.** 与えられた正数 $r > 0$ と複素数 $c$ に対して、$|z - c| < r$ をみたす複素数 $z$ 全体は、$c$ を中心とする半径 $r$ の開円板 $D_r(c)$ を表す。

**問 13.** 与えられた正数 $r > 0$, $s > 0$ に対して、

$$\{z + w; |z| = r, |w| = s\} = \{\zeta \in \mathbb{C}; |r - s| \leq |\zeta| \leq r + s\}$$

である。ヒント：左辺が回転に関して不変であることと $|z + w|$ の動く範囲に注意する。

**例 2.2.** 複素平面上の 3 点 $a = 1 + i$, $b = 2 - i$, $c = x + iy$ が $c$ を直角点とする直角二等辺三角形を表すように実数 $x$, $y$ を定めてみよう。条件は、$b - c = \pm i(a - c)$ と表わされるので、これを解いて、$(x, y) = (5/2, 1/2)$ または $(1/2, -1/2)$。[*5]

---

[*5] こういった平面の回転を利用して解く問題は、行列の代わりに複素数を使って計算することができる。将来、高校数学で、複素数が復活し行列が消滅した際には、入試とかで見かけることになるのであろうか。

**問 14** (*). 複素平面上の 3 点 $1+i$, $2-i$, $x+iy$ が正三角形の頂点を成すように実数 $x$, $y$ を定めよ。

**問 15** (**). 複素平面上の 4 点 $z_1, z_2, z_3, z_4$ がこの順序である同一円周上にあるための条件は、

$$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3} = -\frac{|z_4-z_1|\,|z_2-z_3|}{|z_2-z_1|\,|z_4-z_3|}.$$

ヒント：円周角の定理[*6]。

与えられた複素数 $c$ と自然数 $n$ に対して、$n$ 次方程式 $z^n = c$ を解いてみよう。まず、$c = |c|e^{i\varphi}$ と極表示し、$z = re^{i\theta}$ を代入して比較すれば、

$$r^n = |c|, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

これから、$z^n = c$ の複素数解は、

$$z = |c|^{1/n}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

と表示される。$k$ は $n$ 進むごとに同一の複素数を与えることに注意。

**例 2.3.** 自然数 $n \geq 2$ に対して、$n$ 次方程式 $z^n = 1$ の複素数解は、$z = e^{2\pi ik/n}$ $(1 \leq k \leq n)$ で与えられ、この $n$ 個の解（1 の $n$ 乗根）は、複素平面上で、単位円周に内接する正 $n$ 角形の頂点を形成する。

**問 16** (*). $z^3 = -i$ の解を図示せよ。

**例 2.4.** $\zeta = e^{2\pi i/n}$ は 1 の $n$ 乗根であり、1 の $n$ 乗根は、$\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}, \zeta^n = 1$ ですべてが尽くされるので、

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z-\zeta)(z-\zeta^2)\cdots(z-\zeta^{n-1})$$

と因数分解され、とくに $(1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdots(1-\zeta^{n-1}) = n$ となる。

---

逆に、複素数の幾何学を使って解ける問題は、行列を使って解くこともできる。むしろ、行列の方が汎用的であるというべきか。そういうこともあって、かつて、複素数に取って代わって行列が導入されたのであろう。それをまた旧に復するということであれば、しかるべき総括があって当然であるが、そういった話は相変わらず聞えてこない。

[*6] こういった初等幾何の結果を複素数で表わす問題はいくらでも作れ、しかも沢山解いたからといって、複素数のことがわかるものでもないので、程々に。

**問 17.** $|1-e^{i\theta}| = |e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}| = 2\sin(\theta/2)$ $(0 \le \theta \le \pi)$ を使って

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

を示せ。

三角関数を使って複素数の指数関数を導入したのであるが、逆に複素指数関数で三角関数を表すことも可能である。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

この関係を利用して、$\cos(n\theta)$ を $t=\cos\theta$ の多項式で表す公式を導いてみよう。そのために、$z=e^{i\theta}$ という複素数の記号を導入しておく。まずは、既知の $n=2,3$ の場合から調べてみよう。

$$2(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2\right) = \cos(2\theta)+1.$$

これから、

$$\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = 2t^2-1$$

すなわち、

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

２つ上の式に $z+z^{-1}=2t$ を掛けて少し計算すると、

$$\frac{z^3+z^{-3}}{2} = 4t^3-3t$$

すなわち、

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

以下、$t=\cos\theta$ の $n$ 次**チェビシェフ多項式** (Chebyshev polynomial) $T_n(t)$ を、

$$2tT_n(t) = (z+z^{-1})\frac{z^n+z^{-n}}{2} = T_{n+1}(t)+T_{n-1}(t), \quad T_0=1, T_1(t)=t$$

で帰納的に定めると、

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

となる。チェビシェフ多項式は大変興味深いもので、直交性を始め様々な性質が知られている[*7]。

[*7] http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials

**問 18.** $\sin((n+1)\theta)/\sin\theta = U_n(\cos\theta)$ の形で現れる $\cos\theta$ の $n$ 次多項式 $U_n(t)$（第二種チェビシェフ多項式）について考えてみよ。

**例 2.5.** チェビシェフ多項式は、三項間漸化式を満たしていた。複素数列 $\{z_n\}_{n\geq 0}$ に対する、三項間線型漸化式

$$z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n = 0$$

$(a, b$ は複素数で、$b \neq 0$ とする$)$ を解く際にも複素数が役に立つ。この漸化式の解として、$z_k = \zeta^k$ $(\zeta \neq 0)$ の形のものを探してみよう。これを代入すれば、$\zeta$ に対する二次方程式

$$\zeta^2 + a\zeta + b = 0$$

を得る。その2つの解を $\lambda, \mu$ とすれば、線型性より、その一次結合

$$z_n = A\lambda^n + B\mu^n$$

も解である。$\lambda \neq \mu$ のとき、これがすべての解を表すことは、与えられた初期値 $z_0, z_1$ に対して

$$z_0 = A + B, \quad z_1 = A\lambda + B\mu$$

を $A, B$ について解くことができることからわかる。

チェビシェフ多項式の場合であれば、$a = -2t,\ b = 1,\ z_0 = 1,\ z_1 = t$ であるから、$\mu = \lambda^{-1}$ に注意して、すべてを $\lambda$ で表せば、

$$z_n = \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^{-n}), \quad 2t = \lambda + \frac{1}{\lambda}$$

となる。これから $\lambda$ を消去して $z_n$ を $t$ で表したものがチェビシェフ多項式である。

**問 19** (*)**.** 次の級数を具体的に求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos(n\theta) \quad (|x| < 1).$$

**問 20** (**)**.** 複素平面上の2点 0, 1 から出発して、定規とコンパスで作図可能な点全体は、加減乗除、複素共役、平方根を取る操作に関して閉じていることを示せ。

<u>3次方程式の解法</u>

2次方程式とその解法については、古代バビロニアにまで遡れるようであるが、3次方程式については、中世におけるイスラム圏での代数学の発展を受けて、ルネサンス期のイタリアにおいて最初の解法が発見され、それがきっかけとなり複素数と出会うことになっ

た。よく誤解されるように、二次方程式の解の公式が虚数の導入を促した、というのは正しくない。２次方程式段階では、虚数解のみの場合は解なしとして扱えばよいだけのことなので。３次方程式の解の公式が虚数を考えるきっかけとなったというのが歴史的事実である。その辺のことを確認しておこう。

一般の３次方程式は、$z^3 + az^2 + bz + c = 0$ の形であるが、$\zeta = z + d$ を使って書きなおして定数 $d$ を調整すると、

$$\zeta^3 + 3a\zeta + 2b = 0$$

の形の場合に還元される。（係数の前の 2, 3 はあとの計算を見やすくするためのもので、本質的ではない。）解法の発見者の一人であるタルタリア (Niccolò Fontana Tartaglia) に倣って、$\zeta = u + v$ の形の解を探そう。代入して書きなおすと、

$$u^3 + v^3 + 2b + 3(uv + a)(u + v) = 0$$

となる。ここで、変数の数が $\zeta$ ひとつから $u, v$ の２個に増えた自由度を利用して、$u, v$ に対する付加条件として $uv + a = 0$ を採用すると、$\zeta$ についての方程式が、$u, v$ についての連立方程式

$$u^3 + v^3 = -2b, \quad uv = -a$$

に還元される。２つめの式から導かれる $u^3v^3 = -a^3$ と一つめの式を併せると、$u^3, v^3$ は、二次方程式

$$t^2 + 2bt - a^3 = 0$$

の解であるから、$u$, $v$ は、

$$\lambda_\pm = -b \pm \sqrt{b^2 + a^3}$$

の３乗根である。ただし、３乗根であればどれでもよいというわけではなく、$uv = -a$ となる組み合わせでないといけない。とりあえず、$\lambda_\pm$ の３乗根 $\mu_\pm$ を一つ取っておくと、$(\mu_+\mu_-)^3 = \lambda_+\lambda_- = -a^3$ より、

$$\mu_+\mu_- = -a\omega^k \ (k = 0, 1, 2), \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

である。そこで、正しい $u, v$ の組み合わせとして、

$$(u, v) = (\mu_+\omega^{-k}, \mu_-), \quad (\mu_+\omega^{1-k}, \mu_-\omega^2), \quad (\mu_+\omega^{2-k}, \mu_-\omega)$$

を得るので、

$$\zeta = \mu_+\omega^{-k} + \mu_-, \quad \mu_+\omega^{1-k} + \mu_-\omega^2, \quad \mu_+\omega^{2-k} + \mu_-\omega$$

が求める解である。

さて、解法発見当時の状況を理解するために $a, b$ が実数の場合を詳しく調べてみよう。

まず、$b^2 + a^3 \geq 0$ の場合（タルタリアが扱った場合）は、$\lambda_\pm$ が実数となるので、その３乗根として、$\mu_\pm$ も実数に取ることができ $\mu_+\mu_- = -a$ となることに注意して、

$$\zeta = \mu_+ + \mu_-, \quad \mu_+\omega + \mu_-\omega^2, \quad \mu_+\omega^2 + \mu_-\omega.$$

このあとの方２つが実数になるのは、$\mu_+ = \mu_-$ すなわち $b^2 + a^3 = 0$ のときで、このとき、$\mu_+ + \mu_- = -2b^{1/3}$, $-\mu_+ = b^{1/3}$ をつかって $\zeta^3 + 3a\zeta + 2b = (\zeta + 2b^{1/3})(\zeta - b^{1/3})^2$ と因数分解される。それ以外は、１つの実数解と互いに共役かつ異なる２つの複素数解をもつ。実数解は、すべて実数の範囲の計算で求めることができ、複素数を持ち出す必要はなかった。

次に $b^2 + a^3 < 0$ の場合であるが、$\lambda_\pm$ が互いに共役な複素数となるので、$\mu_\pm$ も互いに共役であるように取ることができ、$a < 0$ に注意すれば、$\mu_+\mu_- = -a$ がわかる。そこで、$\mu = \mu_+$ と置けば、

$$\zeta = \mu + \overline{\mu}, \quad \mu\omega + \overline{\mu\omega}, \quad \mu\omega^2 + \overline{\mu\omega^2}$$

という３つの実数解を得る。３つの複素数 $\mu, \mu\omega, \mu\omega^2$ が正三角形の頂点になっていること、$\mu^3 = \lambda_+$ が実数でないことに注意すれば、これら３つの実数は全て異なることもわかる。このように、実数解であるにもかかわらず、その表示に複素数の使用が避けられない状況が出現する。ここで始めて複素数と向き合う必要性が生じたのであった。

以上の分析は、タルタリアの発見から３０年ほど下った Rafael Bombelli によるものである。

なお、４次方程式の解の公式も得られていて、そこでは、３次方程式を解く過程が生じる。４次なのになぜ３次が必要であるかを解明したのが Joseph Louis Lagrange で[*8]、そこで初めて群の概念（この場合は方程式の対称性）が原始的ながら認識された。ガロアは、ラグランジュの創始した路線を大いに発展させ決定的な結果を得たというのが、これも歴史的事実。群論の剰余類に関する定理にラグランジュの名前がなぜ冠せられているか。

*8 J.L. Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations, 1770. 同年にベートーベンが生まれ、前年に老中となったのが田沼意次。イギリスでは産業革命が進行中。

# 3 複素数の収束

位相 (topology) とは、点列の収束を論じる際に生じる「近づく」の意味を精密・抽象化した数学的概念である。[*9] ここでは、複素数の位相とそれにまつわる話題をいくつか取り上げる。

複素数の列 $(z_n = x_n + iy_n)_{n\geq 1}$ が複素数 $z = x + iy$ に収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

が成り立つことと定める。このとき、$z$ を $(z_n)_{n\geq 1}$ の極限値と呼び、

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n$$

と書くことは実数列の場合と同様。複素数列の収束は、点列の収束に他ならない。

**問 21** (*)**.** 不等式

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$$

を示し、収束条件の同値性を確かめよ。

複素数の四則演算は、複素数の位相に関して連続である。具体的には、次のようなことである。

**命題 3.1.** 複素数列 $(a_n)$, $(b_n)$ が複素数 $a, b$ にそれぞれ収束するとき。

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

さらに、$a \neq 0$ であれば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}.$$

*Proof.* 実数列の収束に帰着させてもよいが、不等式

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq |a_n - a|(|b_n - b| + |b|) + |a||b_n - b|$$
$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a||a_n|} \leq \frac{|a_n - a|}{|a|(|a| - |a_n - a|)}$$

からすぐわかることである。 □

---

[*9] 数学以外では、様々な意味をもつ phase の訳語として位相ないし相が使われる。とくに正弦波の変数の値を指す際に位相という言葉が使われ、それ以外では相ということが多いようである。例：位相速度 (phase velocity)、相転移 (phase transition)。

**例 3.2.** 数列 $(z^n)_{n\geq 1}$ の収束・発散について調べよう。

極座標表示 $z = re^{i\theta}$ を使えば、$z^n = r^n e^{in\theta}$ となるので、$r = |z| < 1$ のときは、偏角が $\theta$ の倍数の形で増え、0 のまわりを回転しながら、絶対値の方は、$r^n$ にしたがって 0 に近づく。ということで、螺旋 $z(t) = r^t e^{it\theta}$ $(t > 0)$ に沿った形で 0 に収束する。

同様に、$r = |z| > 1$ のときは、同じ螺旋に沿って無限遠方（象徴的に $\infty$ で表わす）に発散する。

$r = |z| = 1$ の場合は、$z^n = e^{in\theta}$ となり、単位円周上を巡ることになるので、振動することになる。ただし、$z = 1$ は例外で、この場合は 1 のままで動かないので、（語感には反するが）1 に収束することになる。

まとめると、

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 & (|z| < 1) \\ 1 & (z = 1) \\ \text{振動} & (|z| = 1, z \neq 1) \\ \infty & (|z| > 1) \end{cases}$$

ということになるが、それ以上の内容を伴うことに注意する。

**問 22** (*). 複素数 $|z| < 1$ に対し、極限

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right)$$

を求めよ。また、極限値に近づく様子を図示せよ。

複素数の指数関数 (complex exponential) を複素数列の収束先として導入してみよう。出発点とする手がかりは、実数の場合の等式

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

である。

**問 23** (*). $\log(1+t)$ の一次近似式を用いて、

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$$

を確かめよ。

複素数 $z = x + iy$ に対して、

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

を示そう。これがわかれば、左辺を $e^z$ と書き表わすことが正当化される。

$$1+\frac{z}{n} = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n), \quad r_n^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}, \quad \tan\theta_n = \frac{y}{n+x}$$

のように極表示すれば、

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n^n\Big(\cos(n\theta_n) + i\sin(n\theta_n)\Big)$$

となる。右辺の様子であるが、

$$n\log r_n = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{y^2-x^2}{n^2}+\cdots\right) \to x$$

から

$$\lim_{n\to\infty} r_n^n = e^x$$

がわかり、$\theta_n \to 0$ $(n\to\infty)$ と $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1$ に注意すれば、

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lim_{n\to\infty} n\tan\theta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x} = y$$

となって、めでたい。

**命題 3.3.** 複素指数関数について、指数法則 $e^z e^w = e^{z+w}$ が成り立つ。

また、$\{e^z; z\in\mathbb{C}\} = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ であり、与えられた $re^{i\theta}\in\mathbb{C}^\times$ $(r>0)$ に対して、

$$\{z\in\mathbb{C}; e^z = re^{i\theta}\} = \{\log r + i\theta + 2\pi ik; k\in\mathbb{Z}\} = \log r + i\theta + 2\pi i\mathbb{Z}$$

である。

**問 24.** 複素指数関数の性質を確かめよ。

複素数の指数関数はきわめて重要であり、今後、くり返し扱うことになる。ここでは、不定積分と微分方程式への基本的な応用[*10]を紹介しよう。

まず、実数 $t$ を変数とし複素数を値にもつ関数 $z(t)$ について考える。これは、複素平面内の点 $z(t)$ が時刻 $t$ とともに変化する様子を表すと思えば、複素平面内の点の運動を表わしていると解釈できる。運動の軌跡 (locus) である曲線のパラメータ表示と言ってもよい。あるいは、$z(t) = x(t) + iy(t)$ と表示すれば、2 つの実数値関数 $x(t), y(t)$ を扱うということでもある。

[*10] 基本的ながら、院入試で問うと何故か出来が良くなかったりする。概念を弄ぶあまり具体的な計算が疎かになっていないか。

**問 25** (**)**.** $0 < r < 1$ のとき、$z(t) = e^{it} + re^{2it}$ がどのような曲線を表すか考えてみよ。ヒント：$r$ が 0 に近ければ、半径 1 の円に近いのであるが、$r$ が大きくなるとそれが崩れてくる。とくに速度が 0 となる特異点が現れる場合の曲線の様子を詳しく調べる。

複素数値関数の微分は、複素数の収束を使って

$$z'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$$

で定める。すなわち、$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ということ。この場合の微分についても、線型性とライプニッツ則（積の微分）が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(z(t)w(t)) = z'(t)w(t) + z(t)w'(t).$$

**問 26.** $w(t) = u(t) + iv(t)$ と表わし、$z(t)w(t)$ の実部と虚部を微分することで上の式が成り立つことを確かめよ。

関数の連続性も同様であり、$z(t)$ が $t$ について連続ということと $x(t), y(t)$ が $t$ について連続ということが同じ内容となる。連続関数の定積分をコーシー・リーマン式に [*11]

$$\int_a^b z(t)\,dt = \lim_{|\Delta| \to +0} \sum_{j=1}^{n} z(\tau_j)(t_j - t_{j-1}),\ |\Delta| = \max\{|t_j - t_{j-1}|; 1 \leq j \leq n\}, \tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$$

で定めると、

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

となる。これから、積分の線型性

$$\int_a^b (z(t) + w(t))\,dt = \int_a^b z(t)\,dt + \int_a^b w(t)\,dt, \quad \int_a^b \lambda z(t)\,dt = \lambda \int_a^b z(t)\,dt$$

がわかる。

**問 27.** 積分の実部と虚部を比較することで、線型性を確かめよ。

また、連続関数 $z(t)$ に対して、$F'(t) = z(t)$ となる複素数値関数 $F(t)$（$z(t)$ の原始関数という）があれば微分積分の公式

$$\int_a^b z(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

[*11] ふつう、リーマン積分と呼ばれるものであるが、実質的に導入したのはコーシーで、リーマンは積分可能性の条件を調べたのであった。調べるにあたって、コーシーの与えた定義を少しだけ拡張したということはあるにしても。

が成り立つ。原始関数は（不正確ながら）不定積分とも呼ばれ

$$F(t) = \int z(t)\,dt$$

と書かれる。

**例 3.4.** 複素数 $c$ に対して、

$$\frac{d}{dt}e^{ct} = ce^{ct}$$

であり、これから

$$\int e^{ct}\,dt = \frac{1}{c}e^{ct}.$$

*Proof.* 実数 $a, b$ を使って、$c = a + ib$ と表わせば、

$$e^{ct} = e^{at}\Big(\cos(bt) + i\sin(bt)\Big)$$

であるのでライプニッツ則を使って計算すると、

$$\frac{d}{dt}e^{ct} = ae^{at}\Big(\cos(bt) + i\sin(bt)\Big) + e^{at}\Big(-b\sin(bt) + ib\cos(bt)\Big) = ce^{ct}.$$

□

**例 3.5.**

$$\int e^{ct}\,dt = \frac{1}{c}e^{ct} = \frac{a\cos(bt) + b\sin(bt) + ia\sin(bt) - ib\cos(bt)}{a^2 + b^2}e^{at}$$

の実部と虚部を比較して、

$$\int e^{at}\cos(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}\Big(a\cos(bt) + b\sin(bt)\Big),$$
$$\int e^{at}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}\Big(a\sin(bt) - b\cos(bt)\Big).$$

**問 28** (*)**.** $te^{ct}$ の不定積分を求め、それを利用して

$$\int te^{at}\sin(bt)\,dt$$

を計算せよ。

導関数 $z'(t)$ が $a < t < b$ で存在し、連続かつ極限 $\lim_{t\to a+0} z'(t), \lim_{t\to b-0} z'(t)$ を持つとき、曲線 $z(t)$ $(a \le t \le b)$ の長さは、積分

$$\int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

で与えられる。[*12]

**問 29** (*)**.** 螺旋 $z(t) = e^{at}\bigl(\cos(bt) + i\sin(bt)\bigr)$ $(0 \le t \le 1)$ の長さを求めよ。

ここまでは2つの実数値関数を並行して扱っているだけであるが、積分の基本不等式

$$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \le \int_a^b |z(t)|\,dt, \quad a \le b$$

と等式

$$\lambda \int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b \lambda z(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

は、

$$\left|\sum_{j=1}^n z(\tau_j)(t_j - t_{j-1})\right| \le \sum_{j=1}^n |z(\tau_j)|(t_j - t_{j-1})$$

および

$$\lambda \sum_{j=1}^n z(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \lambda z(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

の極限として理解するのが簡明である。

**問 30.** 極表示

$$\int_a^b z(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_a^b z(t)\,dt\right|$$

と内積の不等式[*13]

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}z(t)) = x(t)\cos\theta + y(t)\sin\theta \le \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

を使うことで、積分の基本不等式が実数値関数の場合に帰着できることを示せ。こういった実積分に還元する方法は、積分をルベーグ式に拡張した際にも役に立つ。

---

*12 正確には速さの積分としての道のりである。長さを表わすのは、戻る運動がないとき。

*13 コーシー・シュワルツの不等式と呼ぶことが一般的であるが、内積の不等式で良いだろう。

**問 31** (**)**.** 不等式

$$\sqrt{\left(\int_a^b x(t)\,dt\right)^2+\left(\int_a^b y(t)\,dt\right)^2}\le\int_a^b\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}\,dt$$

の複素数（内積）を使わない証明を試みよ。

以上の形式的なことは、複素数値多変数関数の微積分についても実数値関数の場合と同様に成り立つ[*14]。例えば、二重積分の不等式

$$\left|\int_D f(x,y)\,dxdy\right|\le\int_D|f(x,y)|\,dxdy$$

が複素数値関数 $f(x,y)$ についても成り立つ。一つだけ注意しておくと、いわゆる平均値の定理は（少なくともそのままでは）成り立たない。その場合でも、

$$|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b f'(t)\,dt\right|\le\int_a^b|f'(t)|\,dt\le\|f'\|\,(b-a)$$

といった不等式による評価は有効であり、今後くり返し使われる。

**問 32.** 複素数値微分可能関数 $f(t)$ $(0\le t\le 1)$ で、$f(1)-f(0)\ne f'(t)$ $(0<t<1)$ となる例を挙げよ。

**問 33.** 複素数値関数 $f(t)$ $(a<t<b)$ で $f'(t)$ が存在し連続であるものに対して、二変数の関数 $\varphi(s,t)$ $(a<s,t<b)$ を

$$\varphi(s,t)=\begin{cases}\frac{f(s)-f(t)}{s-t} & \text{if } s\ne t,\\ f'(t) & \text{if } s=t\end{cases}$$

で定めるとき、$\varphi$ は連続であることを示せ。

複素指数関数のもう一つの応用として、連立線型微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}z_1(t)\\ \vdots\\ z_n(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}z_1(t)\\ \vdots\\ z_n(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$$

[*14] 鵜呑みにせず、検証・納得してから使うべきである。

を解いてみよう。ここで、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は複素数を成分とする正方行列であり、$f_j(t)$ が予め与えられた複素数値関数であるとき、上の関係式を満たす複素数値関数 $z_j(t)$ をいかにして見つけるかが問題である。

まず、$f_j(t) = 0$ $(1 \leq j \leq n)$ の場合を扱う。$z_j(t)$ に

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

を代入してみると、上の連立微分方程式が

$$\lambda \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

の形となるので、解であるためには、$\lambda$ が $A$ の固有値で、$\zeta$ がその固有ベクトルであればよい。簡単のために、$A$ が対角化可能であるとし、$\mathbb{C}^n$ の基底 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ を $A$ の固有ベクトルの中から取ってきて、

$$A\overrightarrow{v_j} = \lambda_j \overrightarrow{v_j}$$

とする。

以上の準備の下、$\overrightarrow{f}(t) \neq 0$ の場合を解こう。$\overrightarrow{z}(t)$, $\overrightarrow{f}(t)$ をこの固有基底で展開して、

$$\overrightarrow{z}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) e^{\lambda_j t} \overrightarrow{v_j}, \quad \overrightarrow{f}(t) = \sum_j g_j(t) \overrightarrow{v_j}$$

と表したものを微分方程式に代入すれば、

$$\sum_j c_j'(t) e^{\lambda_j t} \overrightarrow{v_j} = \sum_j g_j(t) \overrightarrow{v_j}$$

となるので、

$$c_j(t) = \int_0^t g_j(s) e^{-\lambda_j s} \, ds + c_j(0)$$

が求める解を与える。

**例 3.6.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

であれば、

$$A\overrightarrow{v_\pm} = \pm i\omega\overrightarrow{v_\pm}, \quad \overrightarrow{v_\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = g_+(t)\overrightarrow{v_+} + g_-(t)\overrightarrow{v_-}$$

であるように複素数値関数 $g_\pm(t)$ を定めると、

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \left(\int_0^t g_+(s)e^{i\omega(t-s)}\,ds + c_+e^{i\omega t}\right)\overrightarrow{v_+} + \left(\int_0^t g_-(s)e^{-i\omega(t-s)}\,ds + c_-e^{-i\omega t}\right)\overrightarrow{v_-}.$$

最後に、複素数の $n$ 乗根、あるいは３次方程式の解法で経験したことであるが、一般の複素数を係数とする $n$ 次方程式

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

が複素数の解をもつかどうか調べよう。結果は、

**定理 3.7** (代数学[*15]の基本定理)**.** 複素係数の多項式 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ について、次が成り立つ。

*(i)* 方程式 $f(\zeta) = 0$ をみたす複素数 $\zeta$ が存在する。
*(ii)* 複素数 $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を使って、$f(z) = (z - \zeta_1)\cdots(z - \zeta_n)$ と因数分解される。
*(iii)* 多項式 $f(z)$ の係数が実数の場合、$f(z)$ は、実係数の一次式および最小値が正である二次式の積で表される。

この最後の結果は、有理関数の不定積分に関連して、有理式の部分分数分解を行う際の基礎となっている。

*Remark* 3. 上の定理はガウス[*16]の名を冠して呼ばれることが多いのであるが、寄与が大であったにせよ、ガウス一人に帰せられるべきものでないこともまた事実。

*Proof.* 方程式 $z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ が複素数の解をもつことを示そう。$c_n = 0$ の場合は、自明な解 $z = 0$ を持つので、$c_n \neq 0$ とする。

[*15] これは大胆な言い方で、実態は「代数方程式」か「多項式」の基本定理と言ったところ。
[*16] Carl Friedrich Gauss (1777–1855)。ガウスが生まれた１７７７年は、アメリカの独立戦争まっただ中で、フランス革命に先立つこと１２年という時代であった。日本では平賀源内が獄死する２年前。

さて、半径 $r>0$ の円周上の点 $z=r^{i\theta}$ から複素数

$$f(r^{i\theta})=r^ne^{in\theta}+c_1r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}+\cdots+c_n$$

への対応について考える。右辺は、$r$, $\theta$ について連続になっており、$r>0$ を固定して $0\leq\theta\leq 2\pi$ のみ動かすと、複素平面内の閉曲線を表すことがわかる。

その閉曲線は、$r\to 0$ とすると、一点 $c_n$ に収縮する一方、$r\to\infty$ の場合は、

$$f(r^{i\theta})=r^ne^{in\theta}\left(1+c_1\frac{e^{i\theta}}{r}+\cdots+c_n\frac{e^{-in\theta}}{r^n}\right)$$

および

$$\left|c_1\frac{e^{-i\theta}}{r}+\cdots+c_n\frac{e^{-in\theta}}{r^n}\right|\leq\frac{C}{r}\frac{1-r^{-n}}{1-r^{-1}}\to 0\quad(r\to\infty)$$

$(C=\max\{|c_k|\})$ に注意すれば、$r^ne^{in\theta}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ にほぼ等しく、0 を中心とする巨大な円周 $|z|=r^n$ に沿った形で $n$ 周する曲線を表すことがわかる。

この 2 つの極端な場合の閉曲線が、$0<r<\infty$ に連動した連続的な変形で移り合うのであるから、途中のどこかで、0 を通る閉曲線が現れるはずである。すなわち、$f(re^{i\theta})=0$ となる複素数 $re^{i\theta}$ が存在する。 □

**問 34.** 定理の主張の (ii), (iii) を (i) から導け。

**問 35** (**)**.** 上の説明の詰めの部分は幾何学的直観に訴えるものであった。ここでは、考え方を踏襲しつつも、より厳密な証明を次の手順で与える。定数ではない多項式 $f(z)$ に対して、$f(\zeta)=0$ となる複素数 $\zeta$ の存在を背理法で示す。

(i) $|f(z)|$ が $z$ の連続関数であり、$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\infty$ となることから、最小値を与える $\zeta$ が存在する。

(ii) $f(z)$ を $z-\zeta$ のべきを使って、

$$f(z)=f_0+f_l(z-\zeta)^l+f_{l+1}(z-\zeta)^{l+1}+\cdots+f_n(z-\zeta)^n,\quad f_l\neq 0$$

と表わす。

(iii) $f_0\neq 0$ と仮定すると、$z-\zeta$ の偏角を調整し、$|z-\zeta|$ を小さく取ることで、$|f(z)|<|f_0|$ とできるので、$|f_0|=|f(\zeta)|$ が最小値であることに反する。

(iv) $f_0=0$、すなわち $f(\zeta)=0$ である。

**問 36.** 実数を係数とする $x$ の多項式 $P(x)$ が、$P(x)\geq 0$ $(x\in\mathbb{R})$ であるならば、複素数を係数とする $x$ の多項式 $Q(x)$ で、$P(x)=Q(x)\overline{Q}(x)$ となるものが存在する。ここで、$Q(x)=\sum_j c_jx^j$ に対して、$\overline{Q}(x)=\sum_j\overline{c_j}x^j$ である。

# 4 複素変数

実数を変数とし複素数を値に取る関数については既に調べた。ここでは、変数も複素数である関数について考えよう。

複素数を複素平面上の点と思えば、変数の動く範囲＝定義域は、複素平面内の図形＝部分集合ということになる。以下、定義域 $D \subset \mathbb{C}$ としては **領域** (domain) ＝連結開集合[*17]を考えるものとする。

*Remark* 4. 直感的には明らかであろうが、すべての開集合は連結開集合列の分割和であることを厳密に示すことができる。このことは、$\mathbb{R}$ の開集合が開区間列による分割和で表わされることに相当するもので、（複素）平面で開区間に当たるものが領域ということになる。開区間よりもずっと複雑にはなるが。

複素数 $z$ を変数とする関数の見方には、いくつかの視点があり、それぞれがまた奥深い世界への入り口ともなっている。まずは素朴に、関数＝「$z$ の式」と見た場合の実例から。

**例 4.1.**

(i) **有理関数** $f(z) = \dfrac{q(z)}{p(z)}$, $D = \{z \in \mathbb{C}; p(z) \neq 0\}$. ここで、$p(z)$, $q(z)$ は、$z$ の複素係数多項式である。$p(z) = 0$ の解は、重複度込みで $p$ の次数だけあることに注意。

(ii) 複素**指数関数** $f(z) = e^z$, $D = \mathbb{C}$. これに関連して、

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

とおく。$z \in \mathbb{R}$ であれば、通常の三角関数と一致することに注意する。

(iii) 複素数 $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ に対して、

$$\operatorname{Log} z = \log r + i\theta, \quad D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

を複素**対数関数**と呼ぶ。（右辺が $z - 1$ のベキ級数であることが後で分かる。）

(iv) 複素数 $\alpha$ を指数とする**ベキ関数** (power function) を

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}, \quad D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

で定める。

---

*17 以下では、開集合、連結性ともに素朴な理解で十分であるが、正確に述べておくと、開円板 $\{|z - c| < r\}$ の和集合として表されるものが開集合で、開集合 $D$ が連結であるとは、$D$ が共通部分をもたない 2 つの開集合に分割できないことをいう。

**問 37** (*)**.** 等式 $e^{\operatorname{Log} z} = z$ $(z \notin (-\infty, 0])$ および $\operatorname{Log} e^z = z$ $(-\pi < \mathrm{Im} z < \pi)$ を確かめよ。

**問 38** (*)**.** $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$, $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$ および $\overline{\operatorname{Log} z} = \operatorname{Log} \overline{z}$ である。

**問 39.** $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq r < 1)$ のとき、$\operatorname{Log}(1+z)$ を具体的（幾何学的）に求めよ。

**問 40.** 実部が正の複素数 $z, w$ に対して、$zw \notin (-\infty, 0]$ であり、$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ となることを確かめよ。また、複素数 $z, w \notin (-\infty, 0]$ に対して、$zw \notin (-\infty, 0]$ のとき、$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ が成り立つかどうか調べよ。

**問 41.** 複素数のべきについて、$(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ が成り立つかどうか調べよ。

**問 42.** $z^z$ を複素数 $z$ の関数として定義して、藍の愛情の値を確かめよ。

次に、$z = x + iy \in D$ に対する関数の値を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せば、$f$ を考えることは、2 変数の実数値関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を指定することに他ならない。

**例 4.2.**

(i) 一次変換 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に伴う複素関数 $f$ は、$u(x, y) = \alpha x + \gamma y$, $v(x, y) = \beta x + \delta y$ であり、$u(x, y) + iv(x, y)$ を $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/2i$ で書き直せば、

$$f = \frac{\alpha + \delta + i(\beta - \gamma)}{2} z + \frac{\alpha - \delta + i(\beta + \gamma)}{2} \overline{z}.$$

(ii) $f(z) = z^2$ のとき、$u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

(iii) $f(z) = \overline{z}$ のとき、$u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$.

(iv) $f(z) = |z|^2$ のとき、$u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$.

(v) $f(z) = 1/z$ $(D = \mathbb{C} \setminus \{0\})$ のとき、

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

関数 $f$ はまた、$z$ 変数の動く複素平面内の領域 $D$ から、$w$ 変数の動く複素平面への写像あるいは変換 $w = f(z)$ と見ることもできる。

**例 4.3.** 与えられた複素数 $c$ と実数 $\varphi$ に対して、$f(z) = e^{i\varphi} z + c$ $(D = \mathbb{C})$ は、複素平面内のユークリッド運動 (距離と向きを保つ変換) を表す。

**問 43.** 与えられた実数 $\varphi$ に対して、関数 $f(z) = e^{i\varphi}\overline{z}$ は、複素平面内のどのような変換を表すか。

**問 44** (**)**.** 複素数 $z$ が $|z| < 1$ をみたすとき、$w = 1 + z + z^2$ の動く範囲 $D$ を複素平面上に図示せよ。また、$z$ についての二次方程式 $z^2 + z + 1 - w = 0$ の 2 つの解が $|z| < 1$ をみたすとき、 $w$ の動く範囲を求めよ。ヒント：$|z| = 1$ のとき、$w$ の動く様子を、その絶対値と偏角に注目して観察する。

**定義 4.4.** 領域 $D$ の上で定義された複素関数 $f(z)$ が**連続である** (continuous) とは、各 $c \in D$ において

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(z)$$

が成り立つこと。

**例 4.5.** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ と表したとき、$f(z)$ が 連続とは、$u(x, y)$, $(v(x, y)$ が二変数関数として連続であることに他ならない。

(i) $\overline{z}$, $|z|$ は $z$ の連続関数である。

(ii) 指数関数 $e^z$ であれば、$u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ は連続。

(iii) 対数関数 $\mathrm{Log}\, z$ であれば、$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$, $v = \arg z$ となり、これも連続。

**定義 4.6.** 開集合 $D$ の上で定義された複素関数 $f(z)$ が**複素微分可能** (complex differentiable) であるとは、各 $c \in D$ に対して

$$f'(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

が存在すること。このとき、$f'(z)$ は $D$ 上の複素関数になる。これを $f$ の**導関数** (derivative) と呼ぶ。連続な導関数[*18]をもつ関数のことを**正則関数** (holomorphic [*19] function) という。連続関数 $f(z)$ の**原始関数** (primitive function) とは、正則関数 $F(z)$ で $F'(z) = f(z)$ となるものをいう。

開集合とは限らない部分集合 $E \subset D$ の上で**正則**とは、$f$ が $E$ を含む開集合 $U \subset D$ の上で正則関数になっていることをいう。したがって、$f$ が一点 $c \in D$ で正則であるとは、十分小さい $\delta > 0$ に対して $f$ が開円板 $D_\delta(c)$ の上で正則であることを意味する。

---

*18 実は、導関数の連続性は、導関数の存在を仮定するだけで自動的に成り立つ (付録の Goursat の定理)。

*19 古代ギリシャ語の holos = whole と morphe = shape に由来する造語。この理由で、整型関数ということもある。誰がこしらえたものやら、衒学趣味。

実変数のときと同様、微分可能であれば連続であるが、要求されている条件は見かけ以上に強いものである。

**問 45.** 複素関数 $f(z)$ が $z=c$ で微分可能であれば、$z=c$ で連続である。

**例 4.7.** 整数 $n$ に対して

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

但し、$n<0$ の場合は、$\mathbb{C}^\times = \{z \neq 0\}$ で考える。

**問 46** (*)**.** これを示せ。

**補題 4.8.** 実数 $x, y$ について、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+iy}-1}{x+iy} = 1.$$

*Proof.* まず、不等式

$$|e^{a+ib}-1| = |a+ib|\left|\int_0^1 e^{t(a+ib)}\,dt\right| \leq |a+ib|\int_0^1 e^{ta}\,dt \leq |a+ib|e^{|a|}$$

を用意し、これを使って

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{x+iy}-1}{x+iy}-1\right| &= \left|\int_0^1 (e^{t(x+iy)}-1)\,dt\right| \leq \int_0^1 \left|e^{t(x+iy)}-1\right|\,dt \\ &\leq |x+iy|\int_0^1 te^{t|x|}\,dt \leq |x+iy|\int_0^1 te^{|x|}\,dt \leq \frac{1}{2}|x+iy|e^{|x|}\end{aligned}$$

と評価すればわかる。[*20] □

**命題 4.9.** 指数関数と対数関数の微分について、次が成り立つ。

*(i)* $(e^z)' = e^z$ *(*$z \in \mathbb{C}$*).*

*(ii)* $(\operatorname{Log} z)' = \dfrac{1}{z}$ *(*$z \notin (-\infty, 0]$*).*

*Proof.* 指数関数の微分は、上の補題と指数法則による。

対数関数については、$c \notin (-\infty,0]$ に対して、$z = ce^{x+iy}$ と表せば、$z\to c \iff (x,y)\to(0,0)$ であるから、$\operatorname{Log}(ce^{x+iy}) = \operatorname{Log} c + x + iy$ に注意して、

$$\frac{\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} c}{z-c} = \frac{x+iy}{c(e^{x+iy}-1)} \to \frac{1}{c}.$$

[*20] ここでは積分の不等式で処理したが、一次近似式 $e^x = 1 + x + O(x^2)$, $\cos y = 1 + O(y^2)$, $\sin y = y + O(y^3)$ からわかる $e^{x+iy} - 1 = x + iy + O(x^2+y^2)$ を使ってもよい。

□

*Remark* 5. 実数値関数 $\log|z|$ は複素微分可能でなく、ましてや $1/z$ の原始関数とはならない。

**例 4.10.** 偏微分が可能でも複素微分が存在しない例。$f(z) = 2x = z + \overline{z}$, $g(z) = x - iy = \overline{z}$ ($x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$) など、$z$ だけの式で書けないもの。

実際、$\dfrac{g(z) - g(c)}{z - c} = \dfrac{\overline{z - c}}{z - c}$ で、$z - c = re^{i\theta}$ と表わせば、$z - c \to 0 \iff r \to 0$ であり、$\theta$ はどのように変化させてもよいので、$\dfrac{\overline{z - c}}{z - c} = e^{-2i\theta}$ は $z \to c$ のとき、$\theta$ のとり方に依存し、一定の値に近づかない。

複素変数の関数についても、実変数の関数と同様の微分の公式が成り立つ。例えば、

**命題 4.11.** 複素変数の関数 $f(z), g(z)$ が微分可能であるとき、$f(z)g(z), 1/f(z), g(f(z))$ も微分可能で、

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$(g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z).$$

とくに、$g(z) = 1/z$ のとき、

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}.$$

*Proof.* 合成関数の微分の公式は、$w = f(z)$, $b = f(a)$ とでも置いて、

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \frac{g(w) - g(b)}{w - b}\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

の極限と見るのが素直ではあるが、$z \neq a$ であっても $w \neq b$ とは限らないので、注意が必要である。

適切に処理するには、まず $g(w)$ の $w = b$ における微分の定義式を次のように言い換えておく。

$$G(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(f(a))}{w - f(a)} & \text{if } w \neq b, \\ g'(b) & \text{if } w = b \end{cases}$$

とおくと、$\lim_{w \to b} G(w) = G(b)$ であり $g(w) - g(b) = (w - b)G(w)$ となるので、$b = f(a)$ について成り立つ等式

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \frac{(f(z) - f(a))G(f(z))}{z - a}$$

において極限 $z \to a$ を取ると、

$$\lim_{z\to a}\frac{g(f(z))-g(f(a))}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}G(f(z))=f'(a)G(f(a))=f'(a)g'(f(a))$$

がわかる。 □

*Remark* 6. 正則関数の計算では、定義域を細かく言い立てないことが多い。これは、ある点の近くで成り立つ関係式が、広く連結成分において成り立つ（あとで述べる一致の定理）という事情によるものである。ただ、連結である範囲を越えた場合は、改めて関係式の吟味が必要である点に注意する。たとえば、$(\sqrt{z})^2=z$ は、定義域 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ すべてにおいて成り立つのに対して、$\sqrt{z^2}=z$ の方は、定義域 $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$ の連結成分のうち、右半平面でのみ正しく、もう一つの連結成分である左半平面では、$\sqrt{z^2}=-z$ が正しい合成関数の関係式となる。

**問 47** (*)**.** 合成関数以外の部分を確かめ、合成関数の変化（へんげ）として次を示せ。

領域 $D$ における正則関数 $f(z)$ と $t\in(a,b)$ の微分可能関数 $z(t)\in D$ について、$f(z(t))$ も $t$ について微分可能であり、$\dfrac{d}{dt}f(z(t))=f'(z(t))z'(t)$ が成り立つ。

**系 4.12** (指数関数とベキ関数の微分)**.** 複素数 $\alpha$ に対して、

$$(e^{\alpha z})'=\alpha e^{\alpha z}\ (z\in\mathbb{C}),\quad (z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}\ (z\notin(-\infty,0]).$$

対数の微分計算を一般化する形で、逆関数の微分公式も成り立つ。

**命題 4.13.** $D$, $E$ を領域（連結開集合）とし、連続な複素関数 $f:D\to E$, $g:E\to D$ が互いの逆関数（$z\in D$ と $w\in E$ が $w=f(z)$, $z=g(w)$ により対応）であるとする。このとき、$f$ が正則かつ $f'(z)\neq 0$ であれば $g$ も正則で、$g'(f(z))=1/f'(z)$ となる。

座標の関係式

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\qquad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

を使って形式的に偏微分作用素[*21]の鎖則を実行すると

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

[*21] 偏微分作用素に触れぬ微積分の教科書が多く、困ったものである。これを機会に学ぶのであれば、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/calculus/cal2023.pdf を見よ。

この等式をもって、**複素偏微分**[*22]の定義とする。すなわち、$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ の一次結合として、複素偏微分も線型作用素でライプニッツ則を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}.$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \beta\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}.$$

また、複素偏微分は $z, \overline{z}$ があたかも独立変数であるがごとく振る舞う。

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1, \qquad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

**問 48** (*)**.** 上の等式を確かめよ。

**例 4.14.** $f(z) = \log|z|$ $(z \neq 0)$ であれば、

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\log(x^2+y^2)}{2} = \frac{1}{2}\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\log(x^2+y^2)}{2} = \frac{1}{2}\frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{z}}.$$

**命題 4.15** (complex chain rule)**.** 複素関数 $f(z)$ が連続偏微分可能であるとき、実数 $t$ を変数とする微分可能関数 $z(t)$ との合成関数は次を満たす。

$$\frac{d}{dt}f(z(t)) = \frac{\partial f}{\partial z}(z(t))\frac{dz}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z(t))\overline{\frac{dz}{dt}(t)}.$$

*Proof.* $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ に $x = x(t)$, $y = y(t)$ を代入して右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt} + i\frac{\partial v}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + i\frac{\partial v}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}& \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(z(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(z(t))\frac{dy}{dt}&\end{aligned}$$

となり、これは通常の chain rule により、左辺に一致する。 □

[*22] 形式的に見えるせいか、これを避ける本もあるが、$\overline{z}$ が入っていない $z$ だけの関数＝正則関数、という事実が腑に落ちるように敢えて取り上げる。

**定理 4.16** (コーシー・リーマン[*23]等式[*24])**.** 連続微分可能な関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を使って $u(x,y)+iv(x,y)$ と表わされる関数 $f(x+iy)$ について、$f$ が $c=a+ib$ で複素微分可能であるための必要十分条件は $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)=0$、すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=-\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

となること。また、このとき、$f'(c)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(c)$ である。

*Proof.* 複素 chain rule により、

$$\begin{aligned}
f(z)-f(c)&=\int_0^1 \frac{d}{dt}f(tz+(1-t)c)\,dt\\
&=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(tz+(1-t)c)(z-c)\,dt+\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(tz+(1-t)c)\overline{(z-c)}\,dt\\
&=\frac{\partial f}{\partial z}(c)(z-c)+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\overline{(z-c)}\\
&\qquad+(z-c)\int_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial z}(tz+(1-t)c)-\frac{\partial f}{\partial z}(c)\right)dt\\
&\qquad+\overline{(z-c)}\int_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(tz+(1-t)c)-\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\right)dt
\end{aligned}$$

と表示して、連続関数 $g$ に対して成り立つ

$$\left|\int_0^1 (g(tz+(1-t)c)-g(c))\,dt\right| \leq \max\{|g(w)-g(c)|;|w-c|\leq|z-c|\}\to 0\ (|z-c|\to 0)$$

を使えば、

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=\frac{\partial f}{\partial z}(c)+\lim_{z\to c}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\frac{\overline{z-c}}{z-c}$$

となるので、$f(z)$ が $z=c$ で微分可能であることと極限

$$\lim_{z\to c}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\frac{\overline{z-c}}{z-c}$$

---

[*23] これもよくある如く、初出は Cauchy でも Riemann でもなかったというお話。ダランベール (d'Alembert, 1717–1783) の 1752 年の流体力学についての論文にあるという。d'Alembert は、出生からして劇的であり、百科全書派の領袖としても知られるフランス革命前の時代の巨頭の一人であるが、他に、波動の研究からフーリエ展開をフーリエよりも前に、代数学の基本定理をガウスに先駆けて、また極限の概念の案出、力学におけるダランベールの原理など、数学に対しても多くの先鞭的な貢献をしている。それが数学方面では意外にも知られていなかったりする不思議。

[*24] これは equation の訳なので、素直に等式としておく。ちなみに、equation には方程式とか関係式とかの意訳もある。

が存在することは同値。ところが $z-c=re^{i\theta}$ と極表示で表わせば、$z\to c \iff r\to 0$ であり、

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\frac{\overline{z-c}}{z-c}=\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)e^{-2i\theta}$$

となるので、これが $r\to 0$ のとき、一定の複素数に近づくのは $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)=0$ である場合に限り、そのとき $\displaystyle\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=\frac{\partial f}{\partial z}(c)$ となる。 □

**系 4.17.** 正則関数 $f(z)$ と微分可能関数 $z(t)$ との合成関数については、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}f(z(t))=f'(z(t))z'(t).$$

*Remark* 7. $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ の心は、$f$ が $z$ だけの関数であり $\overline{z}$ 変数に依存しないということ。詳しくは、後で述べるベキ級数展開で納得。

**例 4.18.** $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(z+\overline{z})=1$ より、$z+\overline{z}$ はいたるところ複素微分不能。また、$\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(z\overline{z})=z$ より、$|z|^2$ は $z=0$ でのみ複素微分可能。

**例 4.19.** 一次変換に伴う複素関数 $f(x+iy)=\alpha x+\gamma y+i(\beta x+\delta y)$ に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(\alpha+\delta+i(\beta-\gamma)),\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}(\alpha-\delta+i(\beta+\gamma))$$

であるから、$f$ が正則となる条件は $\alpha=\delta$, $\beta+\gamma=0$ であり、このとき $f(z)=(\alpha+i\beta)z$, $f'(z)=\alpha+i\beta$ が成り立つ。

**例 4.20.** 複素数 $\lambda\neq 0$, $\mu$ と整数 $n\neq -1$ に対して、

$$\frac{d}{dt}(\lambda t+\mu)^{n+1}=(n+1)\lambda(\lambda t+\mu)^n$$

から、

$$\int(\lambda t+\mu)^n\,dt=\frac{1}{(n+1)\lambda}(\lambda t+\mu)^{n+1}.$$

**問 49** (*)**.** 不定積分の等式

$$\int(t+i)^2\,dt=\frac{1}{3}(t+i)^3$$

が成り立つことを、両辺の実部と虚部を比較することで確かめよ。

**問 50** (*)**.**
$$f(x+iy) = e^x(\lambda \cos y + i \sin y)$$
が複素微分可能であるように定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を定めよ。

**問 51.** 関数 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ が複素微分可能で、$u(x,y)$, $v(x,y)$ が二階まで偏微分可能とすると、
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0$$
であることを示せ。

**問 52** (*)**.** $f'(z) \equiv 0$ であれば、$f(z)$ は定数である。

**問 53.** 正則関数 $f(z)$ で $|f(z)|$ が定数であるものは、定数関数に限る。

ここで、コーシー・リーマン等式の実解析的な意味を見ておこう。正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を縦ベクトル表記した写像
$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$
の微分 $\varphi'$ は、行列
$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$
で与えられることから、回転と定数倍の組み合わせ（複素平面への操作としては、複素数の掛け算）となっていて、接ベクトルの角度を保つ変換＝相似変換になっていることがわかる。この性質をもつ写像ないし変換のことを等角写像あるいは共形変換 (conformal mapping, conformal transformation) という[*25]。

行列の場合、等角＝共形であるものは、行列式の符号の違いで、
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$
の二種類だけあり、前者は回転の定数倍、後者は折返しの定数倍に対応している。そこで、$\det(\varphi') = 0$ となる例外的な点を除いては、等角写像がどちらのタイプであるかは連続的に維持されることになり、対応する複素関数は、$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ または $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ によって特

[*25] 英語はどちらも conformal であるが、等角変換とは言わないようだ。共形写像というのは見かけるが、一般的かどうか。

微づけられる。後者の場合は、$f(z)$ の代わりに $\overline{f(z)}$ または $f(\overline{z})$ を扱うことで、前者すなわち正則な場合に帰着する。

次に、例外点が孤立している場合、すなわち正則点あるいは反正則点がまわりを埋め尽くしている場合について調べよう。正則・反正則の違いは本質的でないので、正則な場合を考える。このとき、例外点 $c = a + ib$ は等角性から $f'(c) = 0$ を満たす特異点になっている。そこで、特異点の中でも解析が容易な、$f''(c) \neq 0$ である場合に限定して点 $c$ の付近での関数 $u, v$ の二次近似式を調べてみると、局所的に $u = |f''(c)|(X^2 - Y^2)/2$, $v = |f''(c)|XY$ の形であることがわかる。ここで、$X, Y$ は、$(x - a, y - b)$ を回転させて得られる座標

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

である。したがって、$(a, b)$ は $u, v$ の鞍点で、（3 次以上の無限小を無視すると）$u, v$ は、角度 $\pi/4$ の回転で互いに移り合う形になっている。

## 5 複素線積分

変数が実数の場合の複素数値関数 $z(t)$ は点の運動を記述し、したがって [曲線＝軌跡] のパラメータ表示を与えるのであった。以下では、点の運動に由来する複素平面内の曲線を専ら扱うことにする。

これに関連した用語を補っておこう。複素平面内の $C^1$ **曲線**[*26] ($C^1$-curve) $C$ とは、次のようなパラメータ表示 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ を持ち向きがついたものを指す。[*27]

(i) 関数 $z(t)$ は連続かつ開区間 $(a, b)$ で微分可能である。

(ii) 導関数 $z'(t)$ $(a < t < b)$ が連続であり、さらに、極限

$$z'(a) \equiv \lim_{t \to a+0} z'(t), \quad z'(b) \equiv \lim_{t \to b-0} z'(t)$$

が存在する。

(iii) 曲線の向きは、パラメータ $t$ の増加する向きで与える。

また、**なめらかな曲線** とは、$C^1$ 曲線 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で、$z'(t) \neq 0$ $(a \leq t \leq b)$ であるものを言い、**区分的になめらかな曲線** (piece-wise smooth curve) とは、有限個のなめ

[*26] curve の C と紛らわしいが、$C^1$ の C は continuous の C。

[*27] 正確には、向きを保つパラメータの取替えについて同一視を行ったものを指す。パラメータはあくまでも補助的に利用しているということで。

らかな曲線を順につないだものを指す。すなわち、複素数値関数 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で、定義域 $[a,b]$ の分点 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ を選ぶことで、各 $z(t)$ $(t_{j-1} \leq t \leq t_j)$ がなめらかな曲線を表すようにできるもののこと。区分的 $C^1$ 曲線も同様に定義する。

区分的 $C^1$ 曲線で始点と終点が一致しているものを**閉曲線** (closed curve) と言い、区分的 $C^1$ 曲線で自分自身と交叉ないし接する点をもたないものを**単純曲線** (simple curve) という。形式的に書けば、曲線 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が単純であるとは、次が成り立つこと。

$$a \leq s < t \leq b,\ z(s) = z(t) \Longrightarrow s = a,\ t = b.$$

*Remark* 8. 「$C^1$」と「なめらか」を細かく区別した理由は、$C^1$ というだけでは（$C^\infty$ に強めても）、角張ったものも表わし得るため。これは、点の運動を考えれば明らかなことで、途中で移動を休止し、その後、停止状態から再び動き出す際は、停止する前の運動方向とは関係ない方向に向かうことが可能である。そうならないように制限を加えたものが「なめらか」の意味である。

以下、**曲線** (curve) といえば、複素平面内の区分的になめらかなものを指すことにする。要点を確認しておくと、曲線とは、

(i) なめらかな曲線を有限個つないだものである。
(ii) 曲線には向きがついている。
(iii) 向きを保つパラメータの取り換えで移り合うのものは同一視する。

また、曲線 $C$ が領域 $D$ に値をとるパラメータ表示をもつことを、$C \subset D$ と書くことにする。これは数学的には不正確な表わし方ではあるが、便利で混乱することもまずないので広く使われる。

**例 5.1.**

(i) 複素平面内の点 $c_0$ から点 $c_1$ に向かう線分は、$z(t) = (1-t)c_0 + tc_1$ $(0 \leq t \leq 1)$ となめらかにパラメータ表示される。
(ii) 点 $c \in \mathbb{C}$ を中心とし半径 $r$ の反時計回りの上半円は、$z(t) = re^{\pi it} + c$ $(0 \leq t \leq 1)$ となめらかにパラメータ表示される。
(iii) (i) $(c_0 = c - r, c_1 = c + r)$ と (ii) をつなぐと、半円の周囲を表す区分的になめらかな閉曲線のパラメータ表示

$$z(t) = \begin{cases} (1-t)(c-r) + t(c+r) & 0 \leq t \leq 1, \\ re^{\pi i(t-1)} + c & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

を得る。

**例 5.2.** $z(t) = t + t^3 e^{i/t}$ $(0 \le t \le 1/2)$ は滑らかな曲線であるが、$z(t)$ $(t > 0)$ が $z(0) = 0$ に近づく様子はそれなりに複雑である。

*Remark* 9. 曲線の定義は、曲面のそれに比べればまだしも、それでも結構微妙な点を含む。例えば、

$$z(t) = \begin{cases} t^2 + it^4 & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - it^4 & -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

と

$$z(t) = \begin{cases} t + it^2 & 0 \le t \le 1, \\ -t - it^2 & -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

は、本来同じ曲線＝軌跡を表わすべきものであるが、上の定義にしたがえば、前者は $C^1$ であり、後者は区分的になめらかなパラメータ表示ということになる。

より一般的に、区分的になめらかな曲線は $C^1$ 曲線であることがわかるのであるが、幾何学的直観に係わる概念は、初めの段階で詮索し過ぎないのがよいだろう。もう少し詳しい説明は、付録の「道の道とすべきは」にて。

**問 54.** 複素平面内の 3 点 $a, 0, ib$ $(a > 0, b > 0)$ をこの順序で結ぶ折れ線のパラメータ表示を与える区分的に滑らかな関数 $z(t)$ を一つ作れ。また、$C^1$ 関数による表示も与えよ。

領域 $D$ の上で定義された連続関数 $f(z)$ と $D$ 内の区分的 $C^1$ 曲線 $C : z(t)$ $(a \le t \le b)$ に対して、積分

$$\int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt$$

はリーマン和

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}), \quad z_k = z(t_k), \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

の極限に一致し[*28]、曲線の向きを保つパラメータのとり方によらない[*29]。これを

$$\int_C f(z)\, dz$$

と書いて $f(z)$ の曲線 $C$ に沿った複素線積分あるいは単に**線積分** (line integral) と呼ぶ。最初の定積分で、形式的に変数を $t$ から $z = z(t)$ に変換したものが上の線積分の記号であることに注意。

[*28] $z'(t)$ の一様連続性（連続関数がリーマン積分可能となる証明の論法）を使う。詳しくは付録 F にて。
[*29] パラメータのとり方に依存しないことは、変数変換（置換積分）の公式からもわかる。

線積分に係わる曲線は、経路 (path) とも言う。また、閉曲線に沿った線積分の場合は、**周回積分** (contour integral) と呼ばれ、積分経路が閉じていることを強調して、

$$\oint_C f(z)\,dz$$

のようにも書く。

同様に積分

$$\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt$$

は、折れ線の長さ

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

の極限に一致し、こちらも曲線のパラメータのとり方によらない。これを曲線 $C$ の**長さ**といい、$|C|$ で表す。

**例 5.3.**

(i) 連続関数 $f(z)$ の原始関数を $F(z)$ とするとき、$\int_C f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)$ である。ここで、$\alpha, \beta$ は曲線 $C$ の始点と終点を表わす（$\partial C = \beta - \alpha$)。とくに $C$ が閉曲線であれば、周回積分の値は 0 である。

(ii) 複素数 $\alpha$ と $r > 0$ に対して、$\oint_{|z-\alpha|=r} \overline{z}\,dz = 2\pi i r^2$ である。ここで、円周には反時計回りの向きを入れておく。とくに、$\overline{z}$ は原始関数をもたない。

線積分については、次の加法性が成り立つ。

- 曲線 $C$ が部分曲線の和 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$（正確には、$C_1, \ldots, C_n$ をつなぎ合わせたもので、$C_1 + \cdots + C_n$ とも書く）であるとき、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

- 曲線 $C$ の向きを反対にしたものを $-C$ で表すとき[*30]、

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

[*30] 具体的なパラメータ表示を一つ挙げると、$-C : z(ta + (1-t)b)$ $(0 \leq t \leq 1)$ である。

線積分の値の評価については、次の**積分不等式**が役に立つ。

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z)| \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \leq \|f\|_C\, |C|.$$

ここで、$\|f\|_C = \max\{|f(z)|; z \in C\}$ とおいた。

**問 55** (*)**.** 加法性と積分不等式を確かめよ。

**問 56** (**)**.** $C^1$ 曲線のパラメータ表示 $z(t)$ で $z''(t)$ が存在して連続である場合に、$\dfrac{d}{ds}((t_k - s)z'(s)) = -z'(s) + (t_k - s)z''(s)$ から得られる等式

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)z''(s)\, ds$$

を利用して、線積分および曲線の長さに対する積分表示が和からの極限に一致することを示せ。（仮定を強めて、一様連続性を使わない証明を試みる。）

**問 57.** なめらかな曲線 $C$: $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ において、弧長 $\tau = \int_a^t |z'(s)|\, ds$ をパラメータに取れば、$|\frac{dz}{d\tau}| = 1$ $(0 \leq \tau \leq |C|)$ であり、このようなパラメータ表示は一つしかない。

一般に $D$ における曲線の形式的な和 $C = C_1 + \cdots + C_n$ を位相幾何の言葉でチェイン (chain)、より正確には 1-chain、という。線積分は、

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)\, dz$$

によりチェインにまで広げられる。

関連して、整数 $k_j$ を係数とする点 $c_j$ の形式的和 $\sum_{j=1}^n k_j c_j$ を 0-chain と呼び、1-chain $C$ に 0-chain $\partial C$ を $\partial C = \sum_{j=1}^n \partial C_j$ で定め、$C$ の境界と呼ぶ。ここで、$\partial C_j$ は $C_j$ の終点と始点の形式的差を表わす。$\partial C = 0$ となるチェインをサイクル (cycle) と呼ぶ。サイクルは、終点の数と始点の数が同じだけある曲線の集まりの和となっているので、閉曲線の（形式的）和と同一視される。サイクル $C$ に関する線積分は、$\oint_C f(z)\, dz$ とも書かれる。

いくつかの単純閉曲線で囲まれた有界領域を**単純領域** (simple domain) ということにする。境界も含めて $D$ に含まれる単純領域 $S$ に対して、その境界を構成する閉曲線 $C_j$ に向きを $S$ が左に見えるように入れ、それを足し上げたサイクルを $\partial S$ で表わす。そうして、$\partial S$ の形のサイクルに符号をつけて加えたものを境界サイクル (boundary) と呼ぶ。一般のサイクルと境界サイクルの違いであるが、$\partial S$ の方は中身がつまった領域の境界で

あるのに対して、サイクルの方は、$D$ の穴を巡る閉曲線も許される。ということで、境界サイクルの違いを無視したサイクルがどれだけあるかが、$D$ の穴のあき具合を記述する。図形に向きの情報を与え、それを境界に引き継ぐことを代数的に処理することで図形の総体的な性質を調べる仕組みは、ホモロジー (homology) と称される。

*Remark* 10. 図形の向きは幾何学的性質として記述されるのであるが、物理的たとえとしては、1 次元であれば棒磁石の極性、2 次元であれば渦電流というのもある。

**定義 5.4.** 開集合 $D \subset \mathbb{C}$ の上で定義された連続関数 $f(z)$ が**不定積分可能** (indefinitely integrable) であるとは、$D$ に含まれる曲線 $C$ に対して、線積分 $\int_C f(z)\,dz$ の値が $C$ の始点と終点だけによること、言い換えると $D$ におけるすべての周回積分の値が $\oint_C f(z)\,dz = 0$ となることを言う。

領域 $D$ で定義された連続関数 $f(z)$ が不定積分可能であるとき、指定された点 $c \in D$ に対して、$c$ を始点とし、$w \in D$ を終点とする曲線 $C_w$ を用意し、関数 $F(w)$ を $F(w) = \int_{C_w} f(z)\,dz$ で定めると、$\alpha, \beta$ を始点・終点とする曲線 $C \subset D$ に対しては $\int_{C_\alpha + C} f(z)\,dz = \int_{C_\beta} f(z)\,dz$ となることから、

$$\int_C f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

がわかる。

一般に、この性質をもつ関数 $F$ を $f$ の**不定積分** (indefinite integral) と呼ぶ。不定積分に定数関数を足したものも不定積分であることに注意。

逆に、他の不定積分 $G$ があれば、$F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha)$ となるので、$F(\beta) - G(\beta) = F(\alpha) - G(\alpha)$ となり、領域においては、勝手な二点 $\alpha, \beta \in D$ をつなぐ曲線が存在するので、$F - G$ は定数関数となる。

**定理 5.5.** 領域 $D$ 上の連続関数 $f$ について、$f$ が原始関数 $F$ をもてば、$F$ は $f$ の不定積分であり、逆に $f$ が不定積分可能であれば、その不定積分は $f$ の原始関数である。

*Proof.* 前半は、例 5.3(i) による。

後半は、$F$ を $f$ の不定積分とするとき、$a + ib \in D$ の近くでの $F(z)$ の値と $F(a + ib)$ との差を、線分 $[a + ib, x + ib]$, $[x + ib, x + iy]$ をつないだ部分、線分 $[a + ib, a + iy]$, $[a + iy, x + iy]$ をつないだ部分という二つの経路で表せば、

$$F(z) - F(a+ib) = \int_a^x f(t+ib)\,dt + i\int_b^y f(x+it)\,dt = i\int_b^y f(a+it)\,dt + \int_a^x f(t+iy)\,dt.$$

これから、$F(z)$ は、$x$, $y$ について偏微分可能であり、

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(z), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f(z).$$

とくに $F(z)$ は $C^1$ 級であり、

$$2\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f(z) + iif(z) = 0, \quad 2\frac{\partial F}{\partial z} = f(z) - iif(z) = 2f(z)$$

となることから、コーシー・リーマン（定理 4.16）により、$F$ は $f$ の原始関数である。 □

*Remark* 11. 一般の経路についてでなくても、実軸に平行または垂直な線分を結んで得られる 2 つの積分路に対する値が一致すれば結論は正しい。

**問 58.** 座標軸に沿った長方形領域 $R$ とその閉包 $\overline{R}$ の近くで連続偏微分可能な関数 $f$ に対して、

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 2i\int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x+iy)\,dxdy$$

である。とくに $\overline{R}$ で正則な関数 $f$ については $\displaystyle\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ である。ここで、$\partial R$ は、$R$ の境界を反時計回りに巡る閉曲線を表わす。（これと定理 5.5 から、正則関数は局所的に原始関数をもつことがわかる。）

**例 5.6** (対数関数). 実変数のときもそうであったように、$z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ の原始関数は $n = -1$ でなければ、$z^{n+1}/(n+1)$ のように整数ベキで表わされる。とくに周回積分は

$$\oint_C z^n\,dz = 0 \quad (n \neq -1)$$

である。

一方 $n = -1$ については、$1/z$ を半径 $r > 0$ の円 $C : z(t) = re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に沿って周回積分すると、

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\,dt = 2\pi i$$

となる。とくに、$1/z$ $(z \neq 0)$ の原始関数は存在しない。

他方、定義域を $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に限定すれば、$1/z$ の原始関数は、$\operatorname{Log} z$ で与えられるのであった。そうすると、上の定理から、$\operatorname{Log} z$ は $1/z$ の不定積分と見ることができ、実際 $z = 1$ での値が一致することから、

$$\operatorname{Log} z = \int_1^z \frac{1}{\zeta}\,d\zeta$$

と表わされる。ここで $\int_1^z$ は、$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 内で 1 から $z$ に至る曲線（例えば線分 $[1,z]$）に関する線積分を表わす。

**問 59** (*)**.** 複素数 $z\notin(-\infty,0]$ に対して、線分 $[1,|z|]$ と円弧 $z(t)=|z|e^{i\theta t}$ $(0\le t\le 1,\ \theta=\arg z\in(-\pi,\pi))$ をつないだ曲線を $C$ とするとき、

$$\int_C \frac{1}{\zeta}\,d\zeta=\mathrm{Log} z$$

を確かめよ。

**問 60** (*)**.** 原点 0 から点 1 への線分を $C_1$, 点 1 から点 $1+i$ への線分を $C_2$, 点 0 から点 $1+i$ への線分を $C_3$ で表わすとき、関数

$$f(z)=z^2,\quad f(z)=e^z,\quad f(z)=x+y$$

に対して、線積分

$$\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz,\qquad \int_{C_3} f(z)dz$$

を計算し比較してみよ。

**問 61** (*)**.** 部分分数表示

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right)$$

を用いて、$1/(z^2+1)$ の $D=[\mathrm{Re}\,z>0]$ における原始関数を Log で表わせ。

**問 62.**

(i) 点 $c=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ を含む長方形領域 $D$ の上で定義された連続関数 $f$ に対して、$z=x+iy\in D$ の関数 $F$ を

$$F(z)=\int_a^x f(t+ib)\,dt+i\int_b^y f(x+it)\,dt$$

で定め、$g(z)=f(z)-f(c)$ とおく。

$$\frac{F(z)-F(c)}{z-c}-f(c)=\frac{1}{z-c}\int_L g(\zeta)\,d\zeta$$

および

$$\lim_{z\to c}\frac{1}{z-c}\int_L g(\zeta)\,d\zeta=0$$

を示せ。ただし、$L$ は、点 $c$ から $z$ に至る折れ線 $[a+ib,x+ib]+[x+ib,x+iy]$ を表す。

(ii) 定理 5.5 の別証明を与えよ。

**問 63.** 正則関数が局所的に原始関数をもつことを、以下の手順で示せ。

(i) $\mathbb{R}^2$ の領域の上で定義された、連続偏微分可能なベクトル場 $(p(x,y),q(x,y))$ が保存的 (conservative) であるとは、$p,q$ が関数 $\phi(x,y)$ を使って $p=\phi_x$, $q=\phi_y$ と表わされること。このとき、$\phi$ をベクトル場 $(p,q)$ のポテンシャルという。またベクトル場 $(p,q)$ が渦なし (rotation-free) であるとは、$p_y=q_x$ となること。（保存的ベクトル場は渦なしである。）

座標に沿った長方形領域上の渦なしベクトル場は保存的である。ヒント：次の $L$ 字線積分がポテンシャルを与える。

$$\phi(x,y)=\int_a^x p(s,b)\,ds+\int_b^y q(x,t)\,dt.$$

(ii) 正則関数 $f=u+iv$ に対して、$(u,-v)$ と $(v,u)$ は渦なし場である。

(iii) 座標に沿った長方形領域 $R\subset\mathbb{C}$ の上で定義された正則関数 $f=u+iv$ に対して、$(u,-v)$ と $(v,u)$ のポテンシャルをそれぞれ $U$, $V$ とするとき、$F=U+iV$ は $f$ の原始関数である。

*Remark* 12. 関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ の曲線 $C:z(t)=x(t)+iy(t)$ に沿った複素線積分

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b (ux'(t)-vy'(t))\,dt+i\int_a^b (uy'(t)+vx'(t))\,dt$$

の実部・虚部は、

$$\int_C (u(x,y)dx-v(x,y)dy),\qquad \int_C (u(x,y)dy+v(x,y)dx)$$

という記号で表わされ、ベクトル場 $(u(x,y),-v(x,y))$, $(v(x,y),u(x,y))$ の平面曲線 $(x(t),y(t))$ $(a\le t\le b)$ に沿った線積分と呼ばれるものになっている。

*Remark* 13. 実変数の場合は、微分可能であれば連続で、連続であれば原始関数の存在が保証されるのであるが、複素変数にするとまるで様子が異なり、正則であっても原始関数が存在しない場合がある。実は、原始関数が存在するという条件の方が、正則性よりも強い、そうしてその強さが解析的というよりは位相的であることが次の節で明かされる。

# 6　積分定理

準備が整ったので、複素解析の華である積分定理について説明しよう。方法はいくつかあって、そのうち、(i) Green の定理を使うもの、(ii) 微小周回積分のオーダー評価によるもの、をよく目にするのであるが、ここでは、ホモトピー不変性[*31](homotopy invariance)が明示的な方法で示そう。

なお、(i) の一種であるが、問 58 あるいは問 63 を経由するのも教育的で、閉曲線の外側からのギザギザ近似を直感的に認めると、ギザギザ近似の内部における不定積分の存在がわかるので、周回積分が 0 となることがわかる。こういったうず電流的な処理は、ホモロジー型積分定理との相性も悪くない。

**命題 6.1.** 複素数値 $C^1$ 関数[*32] $f(s,t)$ $(0 \leq s,t \leq 1)$ に対して、

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 f(s,t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt.$$

*Proof.* これは、右辺を不定積分して二重積分の公式を使うと

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt \right) ds &= \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)ds \right) dt \\
&= \int_0^1 \Big[ f(s,t) \Big]_{s=0}^{s=x} dt \\
&= \int_0^1 f(x,t)dt - \int_0^1 f(0,t)dt
\end{aligned}$$

となって、$\displaystyle\int_0^1 f(s,t)dt$ が $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)dt$ の原始関数であることがわかる。 □

さて、領域 $D$ 内の $C^1$ 曲線の集まり $C_s : z_s(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で、パラメータ $0 \leq s \leq 1$ とともに連続的に変化するものについて考えよう。ここで、$s$ についての連続性は、関数 $h(s,t) = z_s(t)$ が $(s,t)$ について連続性であることを意味する。以下では、より強く、正方形 $\{(s,t); 0 \leq s,t \leq 1\}$ から複素平面内の領域 $D$ に値を取る関数 $h(s,t)$ で、正方形の内部で $C^1$ 級であり、各偏導関数が境界まで連続に拡張できるものを考える。このような性質をもつ $C^1$ 曲線族 $C_s : h(s,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ を $C^1$-homotopy という。

---

[*31] （パラメータに関する）図形の連続的変形に関する不変性のこと。
[*32] 証明からわかるように、$f$ および $f_s$ が連続であればよい。

このとき、$0 < s, t < 1$ に対して成り立つ等式

$$h(s,t) = \int_0^s \frac{\partial h}{\partial s}(u,t)\,du + h(0,t) = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s,u)\,du + h(s,0)$$

は、連続性により、境界でも正しく、したがって、$h(t,0)$, $h(1,t)$, $h(1-t,1)$, $h(0,1-t)$ $(0 \le t \le 1)$ が $C^1$ 曲線を与えることに注意する。この 4 つを繋いで得られる閉曲線を $C$ とする。

さらに $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(s,t)$, $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t)$ が存在し、$0 \le s, t \le 1$ まで連続に拡張できるものと仮定する。このとき、等式

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}$$

が成り立つことに注意する。

*Remark* 14. 逆に、$h_{st}$, $h_{ts}$ が存在しかつ一致して、境界まで連続に拡張できれば、要求されたすべての条件を満たす。

**例 6.2.** 領域 $D$ 内の 2 つの $C^1$ 曲線 $C_j : z_j(t)$ $(0 \le t \le 1,\ j = 0, 1)$ を考える。どの $0 \le t \le 1$ に対しても、点 $z_0(t)$ から点 $z_1(t)$ へ向かう線分 $[z_0(t), z_1(t)]$ が $D$ に含まれるとき、$h(s,t) = sz_1(t) + (1-s)z_0(t) \in D$ $(0 \le s, t \le 1)$ とおけば、$h$ は $C_0$ から $C_1$ への homotopy を与え、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = z_1'(t) - z_0'(t) = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}$$

は $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ の連続関数である。

とくに、$C_0$ が一点 $c$ であるとき、$C_s : h(s,t)$ $(0 \le t \le 1)$ は、$C_1$ と相似な曲線を表し、$h(s,t)$ $(0 \le s \le 1)$ は線分 $[c, z(t)]$ を表す。

**補題 6.3.** 閉曲線 $C$ が領域 $D$ における $C^1$*-homotopy* の外周を表わすとき、$D$ の上で定義された正則関数 $f(z)$ に対して、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

*Proof.* $0 \leq s \leq 1$ に対して、$h(s,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ の表す $C^1$ 曲線を $C_s$ と書くと、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{C_s} f(z)dz &= \frac{d}{ds}\int_0^1 f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(f'(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\frac{\partial h}{\partial t}(s,t) + f(h(s,t))\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(s,t)\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right)dt \\
&= \left[f(h(s,t))\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= f(h(s,1))\frac{\partial h}{\partial s}(s,1) - f(h(s,0))\frac{\partial h}{\partial s}(s,0).
\end{aligned}$$

これを $0 \leq s \leq 1$ について積分すると、閉曲線 $C$ に関する周回積分の等式となる。 □

**系 6.4.** 領域 $D$ 内の $C^1$ 曲線 $C : z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ と点 $c \in D$ に対して、$sz(t)+(1-s)c \in D$ $(0 \leq s, t \leq 1)$ であれば、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz.$$

ここで、$L$ は、点 $z(0)$ から点 $c$ への線分と点 $c$ から点 $z(1)$ への線分をつないだ折れ線分を表す。

**例 6.5.**

(i) 3 点 $a, b, c$ を頂点とする三角形が $D$ に含まれるとき、

$$\int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz = 0.$$

(ii) 領域 $D$ に含まれる多角形の周囲を $C$ で表せば、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

**問 64.** 領域 $D$ の上で定義された正則関数 $f$ と $D$ 内の長方形 $R$ に対して、

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

ここで、$\partial R$ は、$R$ の周囲に反時計回りの向きを入れた区分的になめらかな曲線を表す。

**定義 6.6.** 領域 $D$ に穴があいていない＝単連結 (simply connected) であるとは、$D$ 内の閉曲線が一点に連続変形可能であること。

**問 65.** 単連結領域 $D$ の上で定義された正則関数は、原始関数をもつ。とくに、$D$ 内の $C^1$ 閉曲線 $C$ に対して、

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

**問 66.** $C^1$ 閉曲線 $C$ が $D$ 内で一点に縮められる状況を $C^1$-homotopy の形で定式化し、その場合にも上の補題の結論が正しいことを確かめよ。

**定理 6.7** (Cauchy の積分定理)**.** 有界領域 $D$ の境界 $\partial D$ が区分的に滑らかな閉曲線の集まりであるとき、$D \cup \partial D$ を含む領域で定義された正則関数 $f(z)$ に対して、

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

ただし、領域 $D$ が左側に見えるように境界 $\partial D$ を構成する閉曲線の向きを定めておく。

*Proof.* すべての区分点を含む形で閉曲線 $\partial D$ を $\partial D = C_1 + \cdots + C_n$ と分割し、各 $C_j$ の始点から終点へ向かう線分 $L_j$ で表せば、$L_j$ で囲まれた多角形が $f(z)$ の定義域に含まれるようにできる（$\partial D$ の折れ線近似)。そこで、上の系と例を使えば、

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{L_j} f(z)\,dz = 0.$$

□

**問 67.** 閉曲線 $C$ で、すべての自然数 $n \geq 1$ に対して $\displaystyle\oint_C \overline{z}^n\,dz \neq 0$ となるものを見い出せ。

**例 6.8.** 正数 $a > 0$ と実数 $s, t$ について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+(s+it)x}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(s+it)^2/4a}.$$

$t = 0$ のときは、よく知られたガウス積分の公式である。全体の複素共役をとることで、$\pm t >$ が移り合うので、$t > 0$ の場合を示せば十分。さて $-ax^2 + (s+it)x = -a(x-(s+it)/2a)^2 + (s+it)^2/4a$ であるから、上の積分は

$$e^{(s+it)^2/4a} \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]-it/2a} e^{-az^2}\,dz = e^{(s+it)^2/4a} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-a(x-it/2a)^2}\,dx$$

と表わされる。一方

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

である。そこで、$\pm R, \pm R - it/2a$ を頂点とした長方形の周囲を $C$ で表わし、積分定理を $f(z) = e^{-az^2}$ に使えば、

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-a(x-it/2a)^2}\,dx - \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,dx - i\int_0^{t/2a} e^{-a(-R-iy)^2}\,dy + i\int_0^{t/2a} e^{-a(R-iy)^2}\,dy.$$

この中の最後の二項については、

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{t/2a} e^{-a(\pm R-iy)^2}\,dy\right| &\leq \int_0^{t/2a} \left|e^{-a(\pm R-iy)^2}\right|\,dy = \int_0^{t/2a} e^{-aR^2+ay^2}\,dy\\ &\leq \int_0^{t/2a} e^{-aR^2+a(t/2a)^2}\,dy = \frac{t}{2a}e^{t^2/4a}e^{-aR^2} \to 0 \quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

となるので、求める等式が得られた。

**補題 6.9.** 角領域 $\{z \in \mathbb{C}; \alpha \leq \arg z \leq \beta, |z| > 0\}$ *(*$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$*)* の上で定義された連続関数 $f(z)$ と半径 $R$ の円弧 $C_R : z = Re^{i\theta}$ *(*$\alpha \leq \theta \leq \beta$*)* に対して、

$$\left|\int_{C_R} e^{itz} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi}{t}\|f\|_{C_R} \quad (t > 0)$$

が成り立つ。とくに、$\lim_{R\to\infty}\|f\|_{C_R} = 0$ であれば、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{itz} f(z)dz = 0.$$

ここで、$\|f\|_{C_R} = \max\{|f(z)|; z \in C_R\}$ に注意。

*Proof.*

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} e^{itz} f(z)\,dz\right| &\leq R\|f\|_{C_R}\int_\alpha^\beta e^{-Rt\sin\theta}\,d\theta\\ &\leq R\|f\|_{C_R}\int_0^\pi e^{-Rt\sin\theta}\,d\theta = 2R\|f\|_{C_R}\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\sin\theta}\,d\theta\\ &\leq 2R\|f\|_{C_R}\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi}{t}\|f\|_{C_R}(1-e^{-Rt}) \leq \frac{\pi}{t}\|f\|_{C_R}.\end{aligned}$$

□

**例 6.10.**

(i) 円環 $r \leq |z| \leq R$ の上半分の周囲を $C$ とするとき、

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

を

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{ire^{i\theta}}\,d\theta + \frac{i}{2}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

と書き直して $r \to 0$ とすると、

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

がわかり、補題 6.9 を適用すると

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

(ii) 扇形 $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ の周囲を $C$ とするとき、

$$\oint_C e^{-z^2} dz = 0$$

とガウス積分

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

から

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi i/4} \quad \text{(Fresnel 積分)}$$

を得る。

(iii) $0 < s < 1$ に対して、$f(z) = z^{s-1}e^{iz}$ を (i) の半分の領域 ($r \leq |z| \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi/2]$) の周回積分について同様の議論を行うと、

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{ix}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^{s-1}e^{ix}\,dx = e^{i\pi s/2}\Gamma(s).$$

ここで、$\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\,dy$ は**ガンマ関数** (gamma function) を表わす。
なお、被積分関数の $e^{ix}$ を $\sin x$ に変え、例 10.12 を使うと、$x = 0$ での特異性が改善され、パラメータの範囲は $-1 < s < 1$ まで広げられることがわかる。

**問 68** (*)**.** フレネル積分を求める上で必要な計算を実行せよ。

**問 69.** 複素数 $\alpha, \beta$ で $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ となるものに対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2+\beta t}\,dt = \sqrt{\pi/\alpha}e^{\beta^2/4\alpha}$ である。ヒント：まず $\beta = 0$ の場合をフレネル積分に倣って示し、それを例 6.8 の方法で $\beta \neq 0$ にまで拡張する。

**定理 6.11** (コーシーの積分公式)**.** 積分定理（定理 *6.7*）の状況設定で、点 $z \in D$ に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

*Proof.* まず、ここでの $z \in D$ は、変数ではなく固定されたものであることに注意しておく。その上で、$z$ を中心として半径 $r > 0$ の円 $C_r$ を考えて、$\partial D$ と $C_r$ の間にある領域に積分定理を適用すると、

$$\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

となるので、

$$\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = i\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,dt \xrightarrow{r\to+0} 2\pi i f(z)$$

から求める公式を得る。

なお、最後の極限式のところを丁寧に書きたければ、

$$\left|\int_0^{2\pi}(f(z + re^{it}) - f(z))\,dt\right| \leq \int_0^{2\pi}|f(z{+}re^{it}){-}f(z)|\,dt \leq 2\pi\max\{|f(w){-}f(z)|; |w{-}z| \leq r\}$$

のように評価して、 $f(w)$ の $w = z$ における連続性

$$\lim_{r\to+0}\max\{|f(w) - f(z)|; |w - z| \leq r\} = 0$$

を使えばよい。 □

**系 6.12.** 正則関数は何度でも複素微分可能であり、$z \in D$ のとき、

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

が成り立つ。微分が積分を使って表わされることに注意。

*Proof.* $n$ についての帰納法による。$c$ を始点とし $z$ を終点とする曲線 $\Gamma \subset D$ に対して、くり返し線積分の順序交換（これについてはこの後で補足する）を使うと

$$\begin{aligned}\int_\Gamma dw \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}}\, d\zeta &= \oint_{\partial D} d\zeta f(\zeta) \int_\Gamma \frac{1}{(\zeta - w)^{n+1}}\, dw \\ &= \oint_{\partial D} f(\zeta) \left[\frac{1}{n(\zeta - w)^n}\right]_{w=c}^{w=z} d\zeta \\ &= \frac{1}{n} \oint_{\partial D} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - c)^n}\right) d\zeta\end{aligned}$$

は、$\Gamma$ の始点 $c$ と終点 $z$ のみに依存するので、定理 5.5 により、

$$\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta$$

は、$z \in D$ について微分可能で、

$$\frac{d}{dz} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = n \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

が成り立つ。 □

*Remark* 15.

(i) 有界領域 $D$ における関数 $f(z)$ の値が $D$ の境界である閉曲線 $\partial D$ における値で完全に決まることに注目。

(ii) 積分公式を $z$ について微分して、形式的に線積分と交換したものが系である。ここでは、くり返し線積分の順序交換と不定積分で処理した。一般に微分と積分の順序交換よりもくり返し積分の順序交換の方が安全であることが知られている。

**問 70** (代数学の基本定理)**.** 定数と異なる多項式 $p(z)$ に対して、方程式 $p(z) = 0$ がかならず複素数の解をもつことを、積分公式の応用として示せ。ヒント：仮に $p(z) \neq 0$ ($z \in \mathbb{C}$) として、正則関数 $f(z) = 1/p(z)$ についての積分公式 $f(0) = \oint_{|\zeta|=R} f(\zeta)\, d\zeta$ において $R \to \infty$ を考え矛盾を導く。

次に、正則性が局所的に積分可能であるという性質で特徴づけられることを確かめておく。

**定理 6.13.** 領域 $D$ の上で定義された連続関数 $f$ が正則であるための必要十分条件は、座標軸に平行な辺からなる長方形領域 $R \subset D$ に対して、

$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

となることである。

*Proof.* 必要であることは、積分定理（実は問 58）からわかる。

逆については、5節最後の問により、$f$ は、長方形の内部で不定積分 $F$ をもち、$f = F'$ と表わされる。そうすると $F$ が正則であることから、上の系により $f$ も正則である。 □

**系 6.14.** 連続関数 $f$ ついていて、それが正則であることと、局所的に不定積分可能であることは同値。

<u>くり返し線積分について</u>

$D$, $E$ を領域とし、$h(z,w)$ $(z \in D,\ w \in E)$ を二変数（実変数としては4変数）の連続関数とする。区分的になめらかな曲線 $C \subset D, \Gamma \subset E$ のパタメータ表示をそれぞれ $z(s)$ $(a \leq s \leq b)$、$w(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ とする。このとき、

$$\int_C h(z,w)\,dz = \int_a^b h(z(s),w)z'(s)\,ds, \quad \int_\Gamma h(z,w)\,dw = \int_\alpha^\beta h(z,w(t))w'(t)\,dt$$

となるので、二重積分におけるくり返し積分の公式

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[\alpha,\beta]} h(z(s),w(t))z'(s)w'(t)\,dsdt &= \int_a^b ds \int_\alpha^\beta h(z(s),w(t))z'(s)w'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta dt \int_a^b h(z(s),w(t))z'(s)w'(t)\,ds\end{aligned}$$

により、

$$w'(t)\int_C h(z,w(t))\,dz, \quad z'(s)\int_\Gamma h(z,w)\,dw$$

は、$t$, $s$ の連続関数であり、

$$\begin{aligned}\int_\Gamma dw \int_C h(z,w)\,dz &= \int_\alpha^\beta dt\, w'(t) \int_a^b h(z(s),w(t))z'(s)\,ds \\ &= \int_\alpha^\beta dt \int_a^b h(z(s),w(t))z'(s)w'(t)\,ds \\ &= \int_a^b ds \int_\alpha^\beta h(z(s),w(t))z'(s)w'(t)\,dt \\ &= \int_a^b ds\, z'(s) \int_\alpha^\beta h(z(s),w(t))w'(t)\,dt \\ &= \int_a^b ds\, z'(s) \int_\Gamma h(z(s),w)\,dw \\ &= \int_C dz \int_\Gamma h(z,w)\,dw\end{aligned}$$

が成り立つ。

テイラー展開

関数 $f$ が閉円板 $\overline{D}_r(c)$ を含む領域で正則であるとき、コーシーの積分公式を $|z-c|<r$, $|\zeta-c|=r$ に対して適用すると、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

ここで、$|z-c|/|\zeta-c|<1$ に注意して、

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-c}\frac{1}{1-(z-c)/(\zeta-c)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}$$

を代入すれば、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z-c)^n,\ |z-a|<r,\qquad f_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta$$

なる表示が得られる。

上の式変形で、積分と級数和の順序交換が可能であることは、

$$\begin{aligned}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}f_k(z-c)^k\right|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-c|=r}\sum_{k=n}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-c)^k}{(\zeta-c)^{k+1}}d\zeta\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta-c|=r}\sum_{k=n}^{\infty}|f(\zeta)|\frac{|z-c|^k}{|\zeta-c|^{k+1}}|d\zeta|\\&\le\sum_{k=n}^{\infty}\|f\|_{C_r(c)}\frac{|z-c|^k}{r^k}=\frac{\|f\|_{C_r(c)}}{r-|z-c|}\frac{|z-c|^n}{r^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

からわかる ($|z-c|<r$ に注意)。

**定理 6.15** (テイラー展開)**.** 領域 $D$ で正則な関数 $f(z)$ に対して、$f$ は何度でも微分可能であり、$c\in D$ と $D$ の境界 $\partial D$ との距離を $R>0$ とすれば、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(z-c)^n,\quad |z-c|<R$$

が成り立つ。

右辺は、$z-c$ の自然数幂の和になっていて、$z-c$ のベキ級数と呼ばれる。また、右辺の形を $f(z)$ の $z=c$ におけるテイラー級数 (Taylor series) と呼ぶ。

**例 6.16.** 基本関数のテイラー展開[*33]：すべて $c=0$ のまわりでのテイラー展開[*34]である。

(i) $z\in\mathbb{C}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = 1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots, \\
\cos z &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = 1-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\cdots, \\
\sin z &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = z-\frac{1}{3!}z^3+\cdots.
\end{aligned}
$$

(ii) $|z|<1$ と複素数 $\alpha$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Log}(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n = z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots, \\
(1+z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots.
\end{aligned}
$$

*Remark* 16.

(i) べき関数のテイラー展開があっさりとできてしまったところに注目。実変数だけでこれを示そうとすると、剰余項の評価がうっとうしい。

(ii) $c$ のまわりのテイラー展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-c)^n$ とし、$f$ が定数でないとすると、$f_1, f_2, \dots$ の中に 0 でない項が現れるので、その最初のものを $f_m$ で表わせば、

$$
f(z) = f(c) + (z-c)^m\left(f_m + f_{n+1}(z-c) + f_{m+2}(z-c)^2 + \cdots\right)
$$

となる。ここで、十分小さい $\delta>0$ に対して、$z\in D_\delta(c)$ を考えると、右辺の式は、$f(c)+f_m(z-c)^m$ で近似されるので、$f$ による $D_\delta(c)$ の像は、

$$
\{f(c)+f_m(z-c)^m; z\in D_\delta(c)\} = D_{|f_m|\delta^m}(f(c))
$$

に近く、$f(c)$ を中心とする開円板を含むはずで、これは $f(D)$ が開集合であることを意味する。これは実際正しいのであるが、厳密な証明については、付録の偏角の原理にて。

---

[*33] 最後のベキ関数の展開は、かのニュートンによるもので、これが後の微積分発見の原動力となった。「神は細部に宿る」と言うが如く、ものごとを具体的に知っておくことは大事だ。証明、証明で、眼高手低の人にならぬよう。基本５関数、経を唱えるが如く。

[*34] 0 の周りでのテイラー展開をマクローリン展開と称する謎の習慣があるが、すべてテイラー展開で良い。

**問 71.** 実数 $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ に対して、円弧 $z(t) = e^{it}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ を $C(\alpha, \beta)$ で表す。領域 $\mathbb{C} \setminus C(\alpha, \beta)$ の上で定義された関数

$$f(z) = \int_{C(\alpha,\beta)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

が正則であることを示し、$f$ の $0$ のまわりでのテイラー展開を求めよ。

<u>有理式の部分分数表示と不定積分</u>

割り算により、有理関数 $f(z)$ は多項式と分数式 $q(z)/p(z)$ の和で表わされる。ここで、$p, q$ は共通因子を持たない多項式であり、$\deg q < \deg p$ をみたす。以下、$f(z) = q(z)/p(z)$ とする。こういった関数の不定積分を考える際の基本は、$f$ の部分分数表示[*35](partial fraction decomposition) である。これは純代数的に処理することも可能であるが、ここでは積分公式の諸結果を援用して導いてみよう。

最初に $p(z)$ を因数分解し、

$$p(z) = (z - c_1)^{m_1} \dots (z - c_l)^{m_l}$$

とする。ここで、$c_j$ は $p(z)$ の互いに異なる根で、$m_j$ はその重複度を表わす。したがって、$m_1 + \dots + m_l = \deg p$ である。さて、次数が $\deg p$ より小さい多項式 $h(z)$ を様々にとって得られる分数式 $h(z)/p(z)$ 全体から成るベクトル空間 $V$ を考えると、$(z^k/p(z))_{0 \le k \le \deg p - 1}$ が $V$ の基底を与えので、$V$ は $\deg p$ 次元である。一方、

$$\frac{1}{(z - c_j)^k} = \frac{(z - c_1)^{m_1} \dots (z - c_{j-1})^{m_{j-1}} (z - c_{j+1})^{m_{j1}} \dots (z - c_l)^{m_l}}{p(z)}$$

$(1 \le j \le l, 1 \le k \le m_j)$ は $V$ の元を定め、その総数は $m_1 + \dots + m_l = \deg p$ である。

**命題 6.17** (部分分数表示)**.** この逆数式全体が $V$ の基底を成す。とくに $f(z) = q(z)/p(z)$ は、$1/(z - c_j)^k$ の一次結合の形に唯一通りに表わされる。

*Proof.* 線型代数の結果により、これらが一次独立であることがわかればよい。そこで、

$$f(z) = \sum_{j', k'} \frac{\lambda_{j',k'}}{(z - c_{j'})^{k'}}$$

とする。$c_j$ を中心とする円 $C_j$ を十分小さく取ると、$C_j$ の内部で $\dfrac{1}{(z - c_{j'})^{k'}}$ $(j' \neq j)$

[*35] 英語を直訳して、部分分数分解ともいう。

が正則であるから、

$$\oint_{C_j}(z-c_j)^{k-1}f(z)\,dz=\sum_{k'}\lambda_{j,k'}\oint_{C_j}(z-c_j)^{k-k'-1}\,dz.$$

さらに、$(z-c_j)^{k-k'-1}$ $(k'\neq k)$ が原始関数をもつことから、

$$=\lambda_{j,k}\oint_{C_j}\frac{1}{z-c_j}\,dz=2\pi i\lambda_{j,k}$$

となるので、もし $f(z)\equiv 0$ とすると、$\lambda_{j,k}=0$ でなければならない。 □

部分分数表示の係数 $\lambda_{j,k}$ を具体的に求めてみよう。

$$(z-c_j)^{k-1}f(z)=\frac{f_j(z)}{(z-c_j)^{m_j-k+1}}$$

と置くと、$f_j(z)=(z-c_j)^{m_j}f(z)$ は $f_j(c_j)\neq 0$ をみたす有理式であることから、積分公式により、

$$\lambda_{j,k}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=c_j}\frac{f_j(z)}{(z-c_j)^{m_k-k+1}}\,dz=\frac{f_j^{(m_j-k)}(c_j)}{(m_j-k)!}.$$

とくに、$m_j=1$ であれば $k=1$ に限るので、その係数は

$$\lambda_{j,1}=f_j(c_j)=\lim_{z\to c_j}(z-c_j)f(z)$$

で与えられる。したがって、$m_j=1$ $(1\leq j\leq m)$ のとき、

$$f(z)=\sum_j\frac{f_j(c_j)}{z-c_j}.$$

重複度がある一般の場合に戻って、

$$\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\lambda_{j,k}}{(z-c_j)^k}=\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(z-c_j)^k}\frac{f_j^{(m_j-k)}(c_j)}{(m_j-k)!}=\frac{1}{(z-c_j)^{m_j}}\sum_{n=0}^{m_j-1}\frac{f_j^{(n)}(c_j)}{n!}(z-c_j)^n$$

と書き直すと、

$$\sum_{n=0}^{m_j-1}\frac{f_j^{(n)}(c_j)}{n!}(z-c_j)^n$$

は $f_j(z)$ のテイラー展開の $m_j-1$ 次以下の項であることから、それを $(z-c_j)^{m_j}$ で割ったものが $z-c_j$ の負べきに関する部分となる。

**例 6.18.** $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z^2+z+1)}$ で、$z^2+z+1 = (z-\omega)(z-\omega^2)$ $(\omega = e^{2\pi i/3})$ と因数分解されることに注意すると、分母の根は $-1, \omega, \omega^2$ であるから、$1/(z+1)^2$, $1/(z+1)$ の係数はそれぞれ、

$$\frac{1}{0!}(z+1)^2 f(z)|_{z=-1} = 1, \quad \frac{1}{1!}\,\frac{d}{dz}(z+1)^2 f(z)\bigg|_{z=-1} = \frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+z+1}\bigg|_{z=-1} = 1.$$

また、$1/(z-\omega)$, $1/(z-\omega^2)$ の係数は、

$$\frac{1}{(z+1)^2(z-\omega^2)}\bigg|_{z=\omega} = \frac{1}{(\omega+1)^2(\omega-\omega^2)} = \frac{\omega-1}{3},$$
$$\frac{1}{(z+1)^2(z-\omega)}\bigg|_{z=\omega^2} = \frac{1}{(\omega^2+1)^2(\omega^2-\omega)} = \frac{\omega^2-1}{3}.$$

まとめると、

$$\frac{1}{(z+1)^2(z^2+z+1)} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{3}\frac{\omega-1}{z-\omega} + \frac{1}{3}\frac{\omega^2-1}{z-\omega^2}.$$

**問 72.** $\dfrac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}$ の部分分数表示を与えよ。

一旦、部分分数表示が得られたなら、その不定積分の表示は簡単で、

$$\int \frac{1}{(z-c)^m}\,dz = \frac{1}{m-1}\frac{1}{(z-c)^{m-1}} \quad (z \neq c, m \neq 1)$$
$$\int \frac{1}{z-c}\,dz = \mathrm{Log}(z-c) \quad (z \notin c - [0,\infty))$$

**例 6.19.** 実数 $x$ に対して、定積分

$$\int_0^x \frac{1}{t+i}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{tx+i} x\,dt$$

の値を求めて見よう。これは、関数 $1/z$ を直線 $z = tx + i$ $(0 \leq t \leq 1)$ に沿って線積分したものなので、原始関数 $\mathrm{Log}\, z$ により $\mathrm{Log}(x+i) - \mathrm{Log}(i)$ と表わされる。極表示 $x + i = \sqrt{x^2+1}e^{i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$ を使えば、

$$\mathrm{Log}(x+i) - \mathrm{Log}\, i = \log\sqrt{x^2+1} + i\theta - i\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

ここで、$-\pi/2 < \frac{\pi}{2} - \theta < \pi/2$ が $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$ を満たすことから、

$$\int_0^x \frac{1}{t+i}\,dt = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - i\arctan x.$$

複素関数のテイラー展開が得られたところで、遅ればせながら、複素級数についての基本事項を改めて確認することにしよう。

## 7 級数の収束

級数の収束は、

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k$$

であることからもわかるように数列の収束に過ぎないのであるが、一方でまた、級数特有の性質というものもある。後ほど繰り返し使われる基本的な部分を少し一般的に述べておこう。

正 (または 0) の数の集まり[*36] $(a_i)_{i\in I}$ に対して、次の 2 条件を満たす $A \in [0,\infty]$ がただ一つ定まる[*37]。これを $A = \sum_{i\in I} a_i$ と書いて、$(a_i)_{i\in I}$ の**和**と呼ぶ。

(i) どのような有限部分 $(a_i)_{i\in F}$ に対しても、$\sum_{i\in F} a_i \leq A$ をみたす。

(ii) $A$ は、この性質をもつ最小の数（または無限大）である。

正数の和は、定義からして、和を取る順序のようなものに無関係である（このことを強調して総和と呼ぶこともある）。総和の唯一性の結果として、次の分割和の等式が成り立つ：添え字集合 $I$ が $I = \bigsqcup_{n\geq 1} I_n$ と分割表示されるならば、

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\geq 1} \left( \sum_{i\in I_n} a_i \right).$$

総和はまた単調性を有する：同じ添字集合をもつ正数の集まり $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ が、$a_i \leq b_i$ $(i \in I)$ であるならば、

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

**問 73.** 正数の和に関する上で述べた性質を確かめよ。集合の形式と上限についての良い練習になる。

**問 74.** 正（または 0) の数の集まり $(a_i)_{i\in I}$ が、$\sum_{i\in I} a_i < \infty$ を満たすならば、どのように小さな正数 $\epsilon > 0$ を取ってきても、

$$\{i \in I; a_i \geq \epsilon\}$$

---

[*36] $i$ は添字 (index) の意味で、$I$ は添字集合の意味で使っている。虚数単位と混同せぬよう。添字のかわりにラベルと呼ぶこともある。異なる添字に同じ値の数が対応していてもよい。

[*37] 上限を使えば、$A = \sup\{\sum_{i\in F} a_i; F \subset I$ は有限集合 $\}$ と書くことができる。

は有限集合であることを示せ。このことから、$\{i \in I; a_i > 0\}$ は要素が一列に並べられる集合（可算集合という）であることを導け。

さて、具体的な級数の収束性については、次が基本的である。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx < \infty \iff \alpha > 1,$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

この発散級数の増大度のスピードは、

$$1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

より、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1,$$

すなわち、$\log n$ の程度である。さらに、

$$0 \leq \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \int_k^{k+1} \frac{x-k}{kx}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{kx}dx \leq \frac{1}{k^2}$$

より、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

が存在する。

**問 75.** 正数 $a$ に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a+n} - \log \frac{a+n}{a+1}\right)$$

が存在し、正の数であることを示せ。

**問 76.** 正数 $a$ について、級数

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^a}$$

の収束性を調べよ。

**問 77** (**)**.** 二重和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(k^2+l^2)^{-a}$$

が有限となる $a>0$ の範囲について調べよ。

**定義 7.1.** 複素級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は、

$$\sum_{n\geq 0}|c_n|<\infty$$

であるとき、**絶対収束** (converge absolutely) するという。[*38]

**定理 7.2** (級数の基本定理)**.** 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

は（ある複素数に）収束し、その値は和をとる順番によらない。さらに、不等式

$$\left|\sum_n c_n\right| \leq \sum_n |c_n|$$

が成り立つ。

*Proof.* まず、$c_n$ が実数の場合に主張が正しいことを示す。

$$c_n=a_n-b_n, \quad a_n\geq 0, \quad b_n\geq 0, \quad |c_n|=a_n+b_n$$

のように表せば、絶対収束性から $\sum a_n$ も $\sum b_n$ もともに存在し、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=\sum_n a_n-\sum_n b_n$$

となる。正数の和については加える順序によらないので、この関係式から、$\{c_n\}$ の和も足す順序によらない。

　次に、複素数の場合は、$c_n=x_n+iy_n$ $(x_n, y_n\in\mathbb{R})$ と表示して、

$$\sum_n |x_n|\leq\sum_n |c_n|, \quad \sum_n |y_n|\leq\sum_n |c_n|$$

*38 絶対値 (absolute value) の和が存在するという意味なのか、あるいは絶対的に和が存在するという意味なのか、たぶん後者なのであろう。

に注意すれば、$\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ いずれも絶対収束し、したがって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{n\geq 0} x_n + i \sum_{n\geq 0} y_n$$

も収束し、その値は和をとる順序によらない。不等式は、有限和に対する

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k|$$

の極限として成り立つ。 □

*Remark* 17. 実は、級数の値が和を取る順番に関わらずに存在してすべて一致するのは、絶対収束する場合に限ることが後の問でもあるリーマンの結果からわかる。この意味で、絶対収束するという代わりに総和可能である (summable) ということもある。

**例 7.3.** 複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

であった (例 6.12)。したがって、

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} |z|^n = e^{|z|}$$

より、複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ は絶対収束することがわかる。

**例 7.4.** 複素数 $\mathrm{Re}(z) > 1$ に対して、級数

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

は絶対収束する。これをリーマンの**ゼータ関数**とよぶ。

**問 78** (*)**.** 級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ は絶対収束する。

**問 79.** 多項式 $f(t)$ と複素数 $|z| < 1$ に対して、級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n) z^n$ は、絶対収束する。

もうすこし一般的に、複素数の集団 $(c_i)_{i\in I}$ に対して、$\displaystyle\sum_{i\in I}|c_i| < \infty$ ならば、複素数 $\displaystyle\sum_{i\in I} c_i$ が定まり、

$$\left|\sum_{i\in I} c_i\right| \leq \sum_{i\in I}|c_i|.$$

**例 7.5.**

$$\sum_{n\geq 1}|a_n| < \infty, \qquad \sum_{n\geq 1}|b_n| < \infty$$

のとき、

$$I = \{i = (m,n); m \geq 1, n \geq 1\}, \qquad c_i = a_m b_n$$

とすると、$\displaystyle\sum_{i\in I}|c_i| < +\infty$ であり、

$$\sum_{i\in I} c_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n} b_l = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} b_l\right) = \sum_m a_m \sum_n b_n.$$

左辺は、普通、

$$\sum_{m,n\geq 1} a_m b_n$$

と書く。

**問 80.** 複素数 $z, w$ に対して、

$$\sum_{m\geq 0}\frac{z^m}{m!}\sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!} = \sum_{k\geq 0}\frac{(z+w)^k}{k!}$$

を示せ。

**例 7.6.** $|z| < 1$ のとき、二重級数 $\sum_{k,l\geq 1} z^l/k^{l+1}$ は絶対収束し、

$$\sum_{l=1}^{\infty}\zeta(l+1)z^l = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^l}{k^{l+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{k^{l+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-z} - \frac{1}{k}\right).$$

とくに、$z$ の奇数べきを取り出すと、

$$\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)z^{2m-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k^2 - z^2}.$$

級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

のように、絶対収束しないが値自体は部分和の極限として存在する場合を強調して条件収束 (conditional convergence) と称する。

和の順序を変えることにより、その値がいろいろと変化する様子をみてみよう。そのために、$+$ の項を $p$ 個、$-$ の項を $q$ 個順次取りだし、交互に和をとった級数を考える。プラス・マイナスそれぞれを $n$ ブロック足した和

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}+\dots\\+\frac{1}{2(n-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{2np-1}-\frac{1}{2(n-1)q+2}-\cdots-\frac{1}{2nq}\end{aligned}\tag{1}$$

すなわち、

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2nq}\right)$$

を考えると、これは、

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2np}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2np}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{qn}\right)$$

に等しいので、

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

$$\begin{aligned}\log(2pn)+\gamma_{2pn}-\frac{1}{2}(\log(pn)+\gamma_{pn})-\frac{1}{2}(\log(qn)+\gamma_{qn})\\=\log(2p)-\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log q+\gamma_{2pn}-\frac{1}{2}\gamma_{pn}-\frac{1}{2}\gamma_{qn}\end{aligned}$$

と書きなおせば、$n\to\infty$ のとき、

$$\log(2p)-\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log q=\log(2\sqrt{p/q})$$

に近づく。

**例 7.7.**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2,$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2.$$

**問 81** (*). 複素数列 $(c_n)_{n\geq 0}$ に対して、極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k$$

が存在すれば、$c_n \to 0$ $(n\to\infty)$ であることを示し、逆が成り立つかどうか復習せよ。

**問 82** (B. Riemann). 条件集束する実級数を並べ替えることで、どのような値にも収束するようにできる。

# 8 ベキ級数と収束域

複素数列 $(c_n)_{n\geq 0}$ と複素変数 $z$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

の形の級数を $z$ の**ベキ級数** あるいは整級数 (power series) という[*39]。ベキ級数の**収束域** [*40](domain of convergence) を

$$D = \{z\in\mathbb{C};\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k z^k \text{ が存在する }\}$$

で定義する。ベキ級数を表わす際に関数の記号がしばしば用いられる。

**例 8.1.** 例 6.11 で見たように、次の 3 つのベキ級数の収束域は、複素平面全体である。

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots, \\ \cos z &= 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots, \\ \sin z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots. \end{aligned}$$

[*39] ベキの漢字は冪で、その省略形として巾という字を当てることもあるが、ここでは読み書きに便利なようにカタカナ表記する。冪の意味は、おおいかぶさる、数に数を重ねるの意であったか。なお、整級数の方はフランス語 série entière の訳語であろうか。整数との対応がしっくりしないので、以下では使わない。ちなみに、フランス語では、自然数が entier naturel で、整数は entier relatif というらしい。微妙に理屈っぽいところが面白い、quatre-vingt。

[*40] domain とは呼ばれるものの、収束域は開集合とは限らない。

**例 8.2.**

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

の収束域は、$\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. このことは、

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = (1 - z^n)(1 - z)$$

と、$z \neq 1$ のときの $\lim_{n\to\infty} z^n$ の振る舞いからわかる。

**問 83.** $\sum_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1) z^l$ の収束域を求めよ。

**定理 8.3.**

*(i)* 正数 $r > 0$ に対して、

$$\sum_{k\geq 0} |c_k| r^k < \infty \implies \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\} \subset D.$$

*(ii)* 複素数 $z \in D$ と正数 $r < |z|$ に対して、

$$\sum_{k\geq 0} |c_k| r^k < \infty.$$

*Proof.* (ii) $\lim_{n\to\infty} c_n z^n = 0$ であるから、$|c_n||z|^n \leq M$ となる $M > 0$ が取れ、

$$\sum |c_n| r^n \leq \sum |c_n||z|^n (r/|z|)^n \leq \sum M (r/|z|)^n = \frac{M}{1 - r/|z|} < \infty.$$

□

**系 8.4.** $D \neq \mathbb{C}$ であれば、$\rho = \sup\{|z|; z \in D\} < \infty$ であり、

$$\{|z| < \rho\} \subset D \subset \{|z| \leq \rho\}$$

であることがわかる。この $\rho$ をベキ級数

$$\sum_{k\geq 0} c_k z^k$$

の**収束半径** *(radius of convergence)* という。

また、収束半径の内側では、ベキ級数が絶対収束している。

**問 84.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

の収束域を求めよ。ヒント：$S_n = 1+z+\cdots+z^n$ と置いて $z^n = S_n - S_{n-1}$ という表示を使って書きなおす。一種の部分積分の方法であり、アーベル変換 (Abel transformation) とも呼ばれる。

ここで Bachmann-Landau のオーダー記号について思い出しておこう。複素数列 $(c_n)_{n\geq 0}$ と正数列 $(C_n)_{n\geq 1}$ に対して、次の性質を考える。正数 $M > 0$ と自然数 $N \geq 1$ を適切に選べば、

$$|c_n| \leq MC_n, \quad \forall n \geq N$$

が成り立つ。この状況を $c_n = O(C_n)$ という記号で表す。

**問 85.** $C_n \equiv 1$ の場合、$c_n = O(C_n)$ であるということと、$c_n$ が有界であることが同値。これを確かめよ。

**問 86.** ベキ級数 $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ の収束半径は、

$$\rho = \sup\{r > 0; |c_n| = O(1/r^n)\}$$

で与えられる。

評価数列 $C_n$ としては、$\log n$, $n^a$, $r^n$, $n!$ とその組み合わせがよく使われる。これに関しては、次[*41]が基本的。

**命題 8.5.** 正数 $a > 0$ と $r > 1$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0.$$

これは、$n \to \infty$ のときの増大度を遅い順番に並べたものが、$\log n, n^a, r^n, n!$ であることを意味する。

**問 87.** 指数関数のテイラー展開の形から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ を導け。

**例 8.6.** ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n^2} = z + 2z^4 + 3z^9 + \cdots$$

の収束半径を求めてみよう。$z = 1$ で発散するので、$\rho \leq 1$ である。$0 < r < 1$ に対しては、

$$nr^{n^2} = nr^{n^2/2} r^{n^2/2}$$

*41 例えば、https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/calculus/cal2022.pdf。

と表して、$nr^{n^2/2} \to 0$ $(n \to \infty)$ および、

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n^2/2} \leq \sum_{k=1} r^{k/2} < \infty$$

に注意すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n^2} < \infty$$

であることから、$r \leq \rho$ がわかり、$r < 1$ を 1 に近づけると $1 \leq \rho$ である。したがって、$\rho = 1$.

**問 88.** 2つのベキ級数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, $\sum_{n\geq 1} c_n z^{n-1}$ は、同一の収束域をもつ。

**問 89.** $a > 1$ とする。

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} z^n$$

の収束域を求めよ。

**問 90.** ベキ級数 $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ の収束半径を求めよ。

**命題 8.7.** 2つのべき級数

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n, \quad \sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$$

は、同じ収束半径をもつ。

*Proof.* それぞれの収束半径を $\rho$, $\rho'$ とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \leq |c_0| + r \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$$

より、$r < \rho' \Longrightarrow r < \rho$、すなわち $\rho' \leq \rho$ である。

逆に、$0 < r < \rho$ とするとき、$r(1+\epsilon) < \rho$ となる $\epsilon > 0$ が取れるので、自然数 $N$ を $n \leq (1+\epsilon)^n$ $(n \geq N)$ であるように選んでおけば、

$$r \sum_{n\geq N} n |c_n| r^{n-1} \leq \sum_{n\geq N} |c_n| r^n (1+\epsilon)^n < \infty$$

となって、$r \leq \rho'$ がわかる。 □

*Remark* 18. 見てわかるように、ほとんど $\epsilon$-$\delta$ 論法である。こういう地道な不等式評価の方法が、逆に、その起源であったというべきか。ちなみに、収束半径 $\rho$ というものは、$c_n$ と等比数列 $\rho^n$ とのスピード比較で決まるものなので、$(c_n)$ を $\lim_n (d_n/c_n) r^n \to 0$ $(0 < r < 1)$ となる $(d_n)$ に置き換えても $\rho$ は小さくはならない。

**系 8.8.** ベキ級数 $\sum_{n\geq 2} n(n-1)c_n z^{n-2}$ も同じ収束半径をもつ。

**問 91** (**)**.** $p(n)$ を $n$ の多項式 (ただし $p \not\equiv 0$) とするとき、2 つのベキ級数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} p(n) c_n z^n$ の収束半径は一致する。

**定理 8.9.** ベキ級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ は、収束域の内部で正則であり、その導関数はベキ級数

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

で与えられる。

*Proof.* $g(z) = \sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$ とおくと、$f(z)$ の収束半径 $\rho$ は $g(z)$ の収束半径でもある。そこで、$f(z)$ が $z = w$ $(|w| < \rho)$ で微分可能で $f'(w) = g(w)$ となることを示そう。

実際、$|w| < r < \rho$ となる $r$ を用意して、$|z| < r$ とすると、不等式

$$|z^m - w^m| \leq |z-w|\,|z^{m-1} + z^{m-2}w + \cdots + w^{m-1}| \leq m r^{m-1} |z-w| \quad (m \geq 1)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n|\,\left|(z^{n-1} - w^{n-1}) + (z^{n-2}w - w^{n-1}) + \cdots + (zw^{n-2} - w^{n-1})\right| \\
&\leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \Big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\Big) r^{n-2} \\
&= |z-w| \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{2} |c_n| r^{n-2}
\end{aligned}$$

という評価から

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(w)$$

がわかる。系 8.8 により、最後の和が収束することに注意。とくに $f(z)$ は $|z| < \rho$ で連続であり、$f(z)$ を $g(z)$ で置き換えることで、$f'(z) = g(z)$ の連続性もわかる。 □

**系 8.10.** ベキ級数 $f(z)=\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ の原始関数（の一つ）は、

$$\int_0^z f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} \quad (|z|<\rho)$$

で与えられる。

定理 6.15 で見たように、領域 $D$ の上で定義された正則関数 $f(z)$ は、$a \in D$ と境界 $\partial D$ との距離を $r$ とするとき、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a|<r$$

のようにベキ級数展開されるのであった。とくに、その収束半径 $\rho$ は $r \leq \rho$ であるが、もし $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が収束しない $|z|=r$ が一つでもあれば、ベキ級数の連続性より $\rho = r$ がわかる。

**例 8.11.** 等比級数 $1/(1+z)=1-z+z^2-z^3+\cdots$ の収束域は $|z|<1$ であった。それを不定積分すると、

$$\mathrm{Log}(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,d\zeta = z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots$$

が $|z|<1$ で成り立つ。ここで $\mathrm{Log}(1+z)$ は $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$ で意味をもつことに注意。

右辺のベキ級数は $z=-1$ で発散するので、その収束半径は 1 で、等比級数のそれと一致する。$\mathrm{Log}(1+z)$ の収束域は問 84 でも求めたのであるが、ここでは等比級数との関係で調べてみよう。等比級数の和を有限で切ったもの

$$1-\zeta+\zeta^2-\zeta^3+\cdots+(-1)^{n-1}\zeta^{n-1}=\frac{1}{1+\zeta}+(-1)^{n-1}\frac{\zeta^n}{1+\zeta}$$

を不定積分すると、

$$z-\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n=\mathrm{Log}(1+z)+(-1)^{n-1}\int_0^z \frac{\zeta^n}{1+\zeta}\,d\zeta$$

となるので、$n\to\infty$ のとき、右辺の第二項が 0 に近づく $|z|=1$ $(z\neq -1)$ が収束域の境界部分ということになる。そこで $z=e^{i\varphi}$ $(-\pi<\varphi<\pi)$ とし、線分 $[0,z]$ についての線積分を考えると、

$$\left|\int_0^z \frac{\zeta^n}{1+\zeta}\,d\zeta\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{r^n e^{in\varphi}}{1+re^{i\varphi}}\right| dr \leq \int_0^1 \frac{r^n}{1-|\cos\varphi|}\,dr \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n\to\infty)$$

となるので、収束域 $D$ は閉円板 $\{z\in\mathbb{C}; |z|\leq 1\}$ から $-1$ を除いたものであり、$\mathrm{Log}(1+z)$ のベキ級数表示が $D$ で成り立つ。

**問 92.** $\mathrm{Log}(1+z)$ の原始関数である $(1+z)\,\mathrm{Log}(1+z)-(1+z)$ のテイラー展開およびその収束域を求めよ。

**問 93** (*). 有理関数 $1/(1+z+z^2)$ の $z=0$ のまわりでのテーラー展開およびその収束半径を求めよ。

**例 8.12** (べき級数の組換え)**.** ベキ級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ の収束半径を $\rho>0$ とすると、$f(z)$ は $|z|<\rho$ で正則であるから、$z=c$ $(|c|<\rho)$ のまわりで

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}}{k!}(z-c)^k \quad (|z-c|<\rho-|c|)$$

のようにテイラー展開される。

ここでは、これがもとのベキ級数で $z^n$ を $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c^{n-k}(z-c)^k$ で置き換え、和を組替えたものに一致することを確かめておこう。

実際、形式和 $\sum_{0\le k\le n} f_n\binom{n}{k}(z-c)^k c^{n-k}$ において、$|z-c|+|c|<\rho$ より、

$$\sum_{0\le k\le n}|f_n|\binom{n}{k}|z-c|^k|c|^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|(|z-c|+|c|)^n<\infty$$

となるので、形式和 $\sum_{0\le k\le n} f_n\binom{n}{k}(z-c)^k c^{n-k}$ は絶対収束し、

$$f(z)=\sum_{0\le k\le n} f_n\binom{n}{k}(z-c)^k c^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-c)^k\left(\sum_{n=k}^{\infty} f_n\binom{n}{k}c^{n-k}\right).$$

**命題 8.13** (d'Alembert's ratio test)**.** ベキ級数 $f(z)=\sum_{n\ge 0} c_n z^n$ において、極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

が存在すれば、それが $f(z)$ の収束半径である。

*Proof.* $\rho=\lim_{n\to\infty}|c_n|/|c_{n+1}|$ とする。小さい数 $\epsilon>0$ に対して、$k$ を十分大きくとると、

$$\rho-\epsilon\le\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}\le\rho+\epsilon$$

となるので、$k=N,\ k=N+1,\dots,k=n-1$ について掛合わせると

$$(\rho-\epsilon)^{n-N}\le\frac{|c_N|}{|c_n|}\le(\rho+\epsilon)^{n-N}$$

すなわち、

$$\frac{|c_N|}{(\rho+\epsilon)^{n-N}} \leq |c_n| \leq \frac{|c_N|}{(\rho-\epsilon)^{n-N}}, \quad n > N$$

となって、ベキ級数 $\sum_n c_n z^n$ は、$|z| < \rho - \epsilon$ のとき絶対収束し、$|z| > \rho + \epsilon$ のとき発散する。$\epsilon$ は好きなだけ小さくとれるので、$\rho$ が収束半径に一致することがわかる。 □

**例 8.14.** 複素数 $\alpha$ に対して、一般二項係数を

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

で定めると、

$$\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha-n} \to -1 \ (n \to \infty)$$

であるから、

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

の収束半径は 1 である。

**問 94.** ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

の収束半径を求めよ。

ベキ級数の定める関数の正則性の応用として、ベキ関数の Taylor 展開の公式（= Newton の公式）を再度証明してみよう。開区間 $(-1,1)$ において、ベキ級数

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

で定義された関数を $f(x)$ で表す。関数 $f(x)$ は、ベキ級数の微分の公式により、

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

をみたす。一方、ベキ関数 $(1+x)^\alpha$ も同じ微分方程式をみたすので、

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = 0$$

となる。これから、

$$f(x) = C(1+x)^\alpha$$

となり (問 52)、$x = 0$ での値を比較して、$C = 1$、すなわち求める公式が得られた。

**問 95.** $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ の微分の公式をそれぞれのテイラー展開に対するベキ級数の微分と比較し、テーラー展開の妥当性を確かめよ。

**問 96.** $(1+x)^{-1/2}$ の二項展開から $(1-4z)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}z^n$ を導き、さらにそれを積分して

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}z^{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} \quad (|z|<1/4)$$

を示せ。

*Remark* 19. ベキ級数の収束半径の逆数は、

$$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$$

で与えられ (Cauchy-Hadamard の公式) 、証明も難しくはないが、ここでは、敢えて取り上げない。極限を理解する上での妨げとなるロピタル計算を避けるのと似た意味合いのためである。

# 9 解析関数とベキ級数

これまでに見たように、ベキ級数で表示される関数は何度でも微分可能であることから、正則関数が定義域内の各点の周りでテーラー展開可能である事実を次のようにまとめることができる。

**定理 9.1.** 領域 $D$ の上で定義された複素関数 $f(z)$ に対して、以下の *3* 条件は同値である。

*(i)* 関数 $f$ は正則、すなわち複素微分可能かつ $f'(z)$ が $D$ で連続である。

*(ii)* 関数 $f$ は連続であり、$D$ 内の区分的になめらかな閉曲線 $C$ で、$D$ の部分領域の境界になっているものに対して、

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

*(iii)* 関数 $f$ は、各 $c\in D$ の付近でベキ級数表示をもつ。すなわち、正数 $r>0$ と複素数列 $(f_n)_{n\geq 0}$ で

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z-c)^n \qquad (|z-c|<r)$$

となるものが存在する。

**定義 9.2.** 上の性質 (iii) をもつ関数（すなわち定義域内の各点の近くでベキ級数表示をもつ関数）を**解析関数** (analytic function) と呼ぶ。

*Remark* 20. ベキ級数は収束円の内部で何度でも微分可能であり、導関数について、項別微分の公式が成り立つことから、その係数が $f_n = f^{(n)}(c)/n!$ で与えられること（ベキ級数表示の唯一性）に注意。

上の定理はまた、解析関数が正則性によって特徴付けられるということである。たとえば、解析関数の積および合成関数が再び解析関数であることがこのことから即座にわかる。

**定理 9.3.** 関数 $f(z)$ は、$z = c$ のまわりでテイラー展開可能であるとする。

*(i)* 関数 $g(z)$ が $z = c$ のまわりでテイラー展開可能であれば、その積 $f(z)g(z)$ も $z = c$ のまわりでテイラー展開可能。

*(ii)* 関数 $g(w)$ が $w = f(c)$ のまわりでテイラー展開可能であれば、合成関数 $g(f(z))$ は $z = c$ のまわりでテイラー展開可能。とくに、$g(z) = 1/z$ を考えると、$f(c) \neq 0$ であれば、$1/f(z)$ も $z = c$ のまわりでテイラー展開できる。

ベキ級数の具体的な計算では、上の結果を背景にベキ級数の代数演算を直接実行する方法が有効である。その際に、形式的なレベルでの計算が可能であることがしばしば起こるので、ここでまとめておこう。

積と逆数ベキ級数全体は、代数でいうところの環 (ring) をなす。そこでは、収束性を問わない扱いが可能で、**形式的ベキ級数** (formal power series) とも称される。ベキ級数の形式的和は明らかであり、その積も $f(z) = \sum_{m \geq 0} f_m z^m$ と $g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n$ に対して、

$$f(z)g(z) = \sum_{n \geq 0} (f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + \cdots + f_n g_0) z^n$$

で定めることで、交換法則、結合法則、分配法則が成り立つことがわかる。

**問 97.** これを確かめよ。

**問 98.** ベキ級数 $f(z), g(z)$ の収束半径をそれぞれ $r, s$ とすると、$f(z)g(z)$ の収束半径は $\min\{r, s\}$ 以上である。

形式的ベキ級数 $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ に対して、$f(z)g(z) = 1$ をみたす形式的ベキ級数 $g(z)$ が存在するための必要十分条件は、$f_0 \neq 0$ である。このとき $f(z)g(z) = 1$ をみた

す形式ベキ級数は丁度一つ存在するので、$g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ と書く。

**問 99.** 形式的ベキ級数 $1/f(z)$ の存在と唯一性を確かめよ。

**例 9.4** (ベルヌーイ数)**.**

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

で定められる数列 $(B_n)$ をベルヌーイ数と呼ぶ。

$$1 = (1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!}z^2 + \dots)(B_0 + B_1 z + \frac{1}{2}B_2 z^2 + \dots)$$

を比較して、

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$$

**問 100.**

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}$$

を利用して、$B_{2k+1} = 0$ $(k \geq 1)$ を示せ。

**問 101** (*)**.** 次の関数を形式的ベキ級数として処理し、最初の 3 項まで求めよ。

$$e^z\sqrt{1+z}, \qquad \tan z.$$

**問 102.** 等式

$$\tan z = \frac{\cos z}{\sin z} - 2\frac{\cos(2z)}{\sin(2z)}$$

利用して、$\tan z$ のテイラー展開をベルヌーイ数を用いて表せ。

合成ベキ級数にベキ級数を代入して新たなベキ級数を得る方法が、ベキ級数の**合成** (composition of power series) である。ベキ級数 $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ に対して、二重数列 $(f_l^k)_{k,l\geq 0}$ を

$$(f(z))^k = \sum_{l\geq 0} f_l^k z^l, \quad f_l^k = \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} f_{l_1}\dots f_{l_k}$$

で定めると、$w = f(z)$ をもう一つのベキ級数 $g(w) = \sum_{k\geq 0} g_k w^k$ に代入した結果は、形式的に

$$g(f(z)) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k f_l^k\right) z^l \tag{2}$$

と書ける。ここで $k$ についての和は、一般に無限にわたるので、その収束性が問題となる。ただし、$f_0 = 0$ の場合は、$f_l^k = 0$ $(k > l)$ となるので、形式的な扱いが可能である。

**問 103** (*)**.** 恒等式 $e^{\log(1+z)} = 1 + z$ を形式的ベキ級数の立場から検証せよ。

さて、収束性の問題に戻って、$f(z)$ の収束半径 $\rho_f$, $g(w)$ の収束半径 $\rho_g$ がどちらも 0 でなく、$|f_0| < \rho_g$ としよう。また、自明な場合を除くために、$f(z)$ は定数関数でないとする。このとき、$|f|_r = \sum_n |f_n| r^n$ は $r \geq 0$ について強い意味で増加となり、$r < \rho_f$ で有限の値を取る連続関数である。そこで、$R = \sup\{r > 0; |f|_r \leq \rho_g\}$ とおくと、$|z| < R$ に対して、$|f(z)| \leq \sum_n |f_n||z|^n < \rho_g$ および

$$|f(z)|^k \leq \sum_l |f_l^k||z|^l \leq \left(\sum_n |f_n||z|^n\right)^k$$

を満たし、

$$\sum_{k,l\geq 0} |g_k|\,|f_l^k|\,|z|^l < \infty$$

および (2) が成り立つ。

**問 104.** ベキ級数 $f(z) = z + z^2$ と $g(z) = \log(1 + z)$ の合成である $\log(1 + z + z^2)$ の収束半径を上の方法で見積り、得られる最大値を求めよ。また、収束半径を求めよ。

**例 9.5.**

$$\frac{1}{1 + 3z + 2z^2} = 1-(3z+2z^2)+(3z+2z^2)^2-(3z+2z^2)^3+\cdots = 1-3z+7z^2-15z^3+\cdots.$$

**問 105.** $1/(1 + 3z + 2z^2)$ の部分分数分解を利用して、ベキ級数展開を求めてみよ。

**例 9.6.** Catalan 数の母関数の収束半径と漸近挙動。

**定理 9.7** (逆関数)**.** 複素数 $c$ を含む領域 $D$ の上で定義された正則な関数 $f(z)$ が $f'(c) \neq 0$ を満たせば、$c$ を含む開集合 $U \subset D$ と $f(c)$ を含む開集合 $V$、および $V$ 上の正則関数 $g(w)$ で、$f(g(w)) = w$ $(w \in V)$, $g(f(z)) = z$ $(z \in U)$ となるもの（$f$ の逆関数）が存在する。

*Proof.* $c = a + ib$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ とし、$(a, b)$ を含む $\mathbb{R}^2$ の領域から $\mathbb{R}^2$ への写像 $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ を考えると、コーシー・リーマンにより、$\varphi$ の微分は

$$\varphi'(a, b) = \begin{pmatrix} u_x(a, b) & u_y(a, b) \\ v_x(a, b) & v_y(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(a, b) & -v_x(a, b) \\ v_x(a, b) & u_x(a, b) \end{pmatrix}$$

となる。一方、$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=u_x+iv_x$ であるから、$\det(\varphi'(a,b))=|f'(c)|^2\neq 0$ である。

そこで、逆写像定理を使うと、$c$ を含む開集合 $U\subset D$ と $f(c)$ を含む開集合 $V$、および $V$ 上の連続偏微分可能な関数 $g(w)$ で、$f(g(w))=w$ $(w\in V)$, $g(f(z))=z$ $(z\in U)$ となるもの（$f$ の逆関数）が存在する。鎖則により、$|f'(x+iy)|^2=\det(\varphi'(x,y)\neq 0$ $(x+iy\in U)$ に注意。

最後に $g$ が複素微分可能であることは、$w,w_0\in V$ に対して $z=g(w),z_0=g(w_0)\in U$ とすると、$w\neq w_0$ のとき、$z\neq z_0$ であり、$w\to w_0$ のとき、$z\to z_0$ となるので、

$$\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

よりわかる。 $\square$

*Remark* 21. 逆写像定理を使わない、複素関数的な証明とベキ級数的な証明を付録で与えておいた。

ベキ級数 $f(z)=\sum_{n\geq 0}f_nz^n$ で $f_1\neq 0$ であるものに対して、その逆関数に相当するベキ級数 $g(z)=\sum_{n\geq 0}g_nz^n$ を

$$z=f(g(z))=\sum_{n\geq 0}f_n\left(\sum_{m\geq 0}g_mz^m\right)^n$$

で定める。

**例 9.8.**

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1},\ |z|<1$$

の逆関数のベキ級数表示を求めると、$\tan z$ のテイラー展開と一致するであろうことが確かめられる。

**問 106** (*)**.** $f(z)=2z+z^2$ の逆級数 $g(w)$ を求め、それを $\sqrt{1+w}$ の二項展開と比較せよ。

解析関数の積分表示

ここでは、広義積分を使った解析関数の表示について述べよう。複素領域 $D$ の点 $z$ と正数 $0<t<\infty$ を変数とする連続関数 $f(t,z)$ が、連続可積分関数 $g(t)$ により、

$|f(t,z)| \leq g(t)$ のように押えられていると、広義積分 $\int_0^\infty f(t,z)\,dt$ は絶対収束し、

$$\left|\int_0^\infty f(t,z)\,dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t,z)|\,dt \leq \int_0^\infty g(t)\,dt < \infty$$

を満たす。とくに、

$$\int_0^\alpha |f(t,z)|\,dt \leq \int_0^\alpha g(t)\,dt, \quad \int_\beta^\infty |f(t,z)|\,dt \leq \int_\beta^\infty g(t)\,dt$$

は、$\alpha \to +0$, $\beta \to \infty$ のとき 0 に近づく。一方、$f(t,z)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ の一様連続性により、$\int_\alpha^\beta f(t,z)\,dt$ は $z \in D$ について連続であることから、「しっぽ切り」により、

$$\int_0^\infty f(t,z)\,dt$$

も $z$ の連続関数である。

さらに、各 $t > 0$ について、$f(t,z)$ が $z \in D$ の正則関数であれば、単純閉曲線 $C$ で囲まれた領域 $G \subset D$ について、

$$\oint_C \int_0^\infty f(t,z)\,dz = \int_0^\infty dt \oint_C f(t,z)\,dz = 0$$

が同じく「しっぽ切り」により成り立つので、$\int_0^\infty f(t,z)\,dt$ は $z \in D$ の正則関数である。

また、積分公式により、

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(t,z)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{g(t)}{r^n}$$

が $D_r(z) \subset D$ となる $r > 0$ について分かるので、再び「しっぽ切り」により、

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}\int_0^\infty f(t,z)\,dt &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z| = r} d\zeta \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\int_0^\infty f(t,\zeta)\,dt \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_0^\infty dt \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(t,z)\,dt\end{aligned}$$

であり、

$$\left|\frac{d^n}{dz^n}\int_0^\infty f(t,z)\,dt\right| \leq \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^\infty g(t)\,dt$$

と評価される。

すなわち、$f(t,z) = \sum_{n=0}^\infty f_n(t,c)(z-c)^n$ という表示に対して、$D_r(c) \subset D$ であれば、$t > 0$ の連続関数 $f_n(t,c)$ は

$$|f_n(t,c)| \leq \frac{1}{2\pi r^n} g(t)$$

で押えられ、

$$\int_0^\infty f(t,z)\,dt = \sum_{n=0}^\infty (z-c)^n \int_0^\infty f_n(t,c)\,dt$$

が、左辺の $z=c$ におけるテイラー展開を与える。

以上の議論は $(0,\infty)$ に限らず任意の開区間で成り立つ。また、押え込み $|f(t,z)| \leq g(t)$ は、$D$ 全体でなくても、$D$ の狭い範囲で成りたては、積分後の連続性・正則性がわかる。

**例 9.9.** (i) $|t^{z-1}| \leq t^{\alpha-1}$ $(0 < t \leq 1,\ 0 < a \leq \operatorname{Re} z)$ より、$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt$ は $\operatorname{Re} z > 0$ で正則である。(ii) $|t^{z-1}| \leq t^{b-1}$ $(t \geq 1,\ \operatorname{Re} z \leq b)$ より、$\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ は $\mathbb{C}$ で正則である。この二つを合わせると、ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-1}\,dt$$

は右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ で正則であることがわかる。

先に述べたことに関連して、広義積分と和の関係について補っておこう。リーマン積分の場合には、一様収束に関する積分の連続性として扱われるのであるが、広義積分については、以下で述べる押え込み収束定理で処理するのが簡明である。

連続関数 $f(t)$ $(t > 0)$ は、連続関数列 $(f_n(t))_{n\geq 1}$ $(t > 0)$ の和として、$f(t) = \sum_{n\geq 1} f_n(t)$ $(t > 0)$ と表わされ、$(f_n)_{n\geq 1}$ は

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n(t)|\,dt < \infty$$

を満たすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\int_0^\infty |f(t)|\,dt \leq \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n(t)|\,dt, \quad \int_0^\infty f(t)\,dt = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(t)\,dt.$$

これは、積分の単調連続性に由来するもので、正しい定式化と手順を踏むと難しいものではないが、多少長くなるので「ルベーグ積分と測度」(裳華房)定理 2.17 の特別な場合であることを指摘するにとどめる。

**例 9.10.** 等式 $1/(e^t-1) = \sum_{n=1}^\infty e^{-nt}$ $(t > 0)$ に $t^z$ $(\operatorname{Re} z > 0)$ を掛けた級数表示おいて、

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |t^z e^{-nt}|\,dt = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z}e^{-nt}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z+1}} \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z}e^{-t}\,dt < \infty$$

であり、$\int_0^\infty t^z e^{-nt}\,dt = \Gamma(z+1)/n^{z+1}$ となることから、

$$\int_0^\infty \frac{t^z}{e^t-1}\,dt = \Gamma(z+1)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{z+1}} = \Gamma(z+1)\zeta(z+1) \quad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

がわかる。

**問 107.** しっぽ切りにより、上の等式を直接示せ。

**例 9.11.** $|z| < 1$ のとき、

$$\int_0^\infty \frac{e^{zt}-1}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_0^\infty \frac{t^n}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \frac{z^n}{k^{n+1}} = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k-z} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{l=1}^\infty \zeta(l+1) z^l,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{zt}-e^{-zt}}{e^t-1}\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{2z}{k^2-z^2} = 2\sum_{m=1}^\infty \zeta(2m) z^{2m-1}.$$

# 10　留数計算

領域 $D$ の中に除外点 $c \in D$ があり、正則関数 $f(z)$ が $0 < |z-c| < \delta$（$D$ に含まれる）の上で定義されているとき、$f(z)$ は $z = c$ を孤立特異点 (isolated singularity) に持つという。

孤立特異点には、(i) $|z-c| < \delta$ 上の正則関数を $0 < |z-c| < \delta$ に制限した、見かけの特異点 (removable singularity) と (ii) そうでない真の特異点がある。真の特異点で $f(z) = g(z)/(z-c)^m$ ($m \geq 1$, $g(z)$ は $z = c$ で正則かつ $g(c) \neq 0$) と表わされるものを**極** (pole) と呼び、自然数 $m$ を極の**位数**[*42] (order) と呼ぶ。言い換えると、十分大きな自然数 $m$ に対して、$z = c$ が $(z-c)^m f(z)$ が見かけの特異点になるものが極で、そのような最小の $m$ が位数である。極でない真の特異点は本質的特異点という。今後は真の特異点を単に**特異点** (singularity) と呼ぶ。

**例 10.1.**

(i) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ における $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ に対して、0 は見かけの特異点。というのは、$z \neq 0$ で成り立つベキ級数表示

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots$$

[*42] order を素直に訳せば「順位」であろうか。位（くらい）でも良いのだが、rank と区別がつかなくなる。

で右辺は $\mathbb{C}$ 全体で収束するものになっているから。とくに、$m \geq 1$ のとき、$z=0$ は $(\sin z)/z^{m+1}$ の $m$ 位の極である。

(ii) 複素数 $c, \lambda$ と自然数 $n \geq 0$ に対して、$\mathbb{C} \setminus \{c\}$ 上の正則関数 $\frac{e^{\lambda z}}{(z-c)^{n+1}}$ は、$c$ を極としてもち、その位数は $n+1$ である。

(iii) 複素数 $a \neq b$, $\lambda$ と自然数 $l, m \geq 0$ に対して、$\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ 上の正則関数 $\frac{e^{\lambda z}}{(z-a)^{l+1}(z-b)^{m+1}}$ は $a$, $b$ 2つの特異点をもち、どちらも極で、$a$ の位数は $l+1$, $b$ の位数は $m+1$ である。

(iv) $C \setminus \{0\}$ の上の正則関数 $e^{1/z}$ は 0 を本質的特異点として持つ。というのは、どのような自然数 $m \geq 1$ についても $z^m e^{1/z}$ で $z$ を実軸の正から 0 に近づけると値が発散するから。

**問 108** (*)**.** 関数 $\dfrac{e^z}{\sin z}$ の特異点を求め、それが極である場合は位数も求めよ。

さて、$z=c$ の近く（ただし $z=c$ は除く）で定義された正則関数 $f(z)$ の**留数** (residue[*43]) を、

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-c|=r} f(z)\,dz$$

で定める。$r>0$ は小さければ何でも良く、円周である必要もない。（実は、小さい必要もなく、単に単純曲線の内部の特異点が $z=c$ だけであれば良い。）ということで、留数を表わす際の周回積分を

$$\oint_{|z-c|=r} f(z)\,dz = \oint_{z=c} f(z)\,dz$$

のようにも書き、残りもの[*44]と呼ぶことにする。

次に、応用上大事な極の場合に、その留数を求める計算式を与えよう。定義から $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$ $(g(c) \neq 0)$ と表わされるので、その残りものは、次で与えられる。

$$\oint_{|z-c|=r} \frac{g(z)}{(z-c)^m}\,dz = 2\pi i \frac{g^{(m-1)}(c)}{(m-1)!} = 2\pi i \lim_{z\to c} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = 2\pi i \lim_{z\to c} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-c)^m f(z)\Big).$$

ただし、最初の等式では、積分公式の派生版である系 6.12 を使った。まとめると、

**命題 10.2** (residue formula)**.** 正則関数 $f(z)$ が位数 $m \geq 1$ の極 $c$ をもつとき、その留

---

[*43] 発音とアクセントに注意。英語の residence のような感じ。意味は残りもの。

[*44] こちらを residue と呼ぶのがよいような。

数は、正則関数 $(z-c)^m f(z)$ のテイラー展開の $(z-c)^{m-1}$ の係数である。すなわち、

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=c} f(z)\,dz = \gamma = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to c}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-c)^m f(z)\Big)$$

で与えられる。とくに $m=1$ のとき（*simple pole* と呼ばれる）の留数は、

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=c} f(z)\,dz = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$$

である。

**例 10.3.** 複素数 $\lambda$, $a\neq b$, $c$ と自然数 $l,m,n\geq 0$ を用意する。先の例に関連した以下の留数式が成り立つ。

(i)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=0}\frac{\sin z}{z^{m+1}}\,dz = \begin{cases}(-1)^l/(2l+1)! & (m=2l+1)\\ 0 & (m=2l)\end{cases}.$$

(ii)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=c}\frac{e^{\lambda z}}{(z-c)^{n+1}}\,dz = \frac{\lambda^n}{n!}e^{\lambda c}.$$

(iii)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=a}\frac{e^{\lambda z}}{(z-a)^{l+1}(z-b)^{m+1}}\,dz = e^{\lambda a}\sum_{k=0}^{l}\frac{\lambda^k}{k!}(-1)^{l-k}\binom{l+m-k}{m}(a-b)^{-l-m+k-1}.$$

(iv)

$$\oint_{z=0} e^{1/z}z^{n-1}\,dz = \oint_{|z|=r} e^{1/z}z^{n-1}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\oint_{|z|=r} z^{n-k-1}\,dz = 2\pi i\frac{1}{n!}.$$

**問 109** (*)**.** 関数 $\dfrac{e^z}{\sin z}$ の各特異点における留数を求めよ。

次は積分定理の単なる言い換えにすぎないのであるが、独立した名前[*45]が付けられている。

[*45] もともとの留数の定義が別の形だったためである。これについては、付録のローラン展開の項を参照。

**定理 10.4** (留数定理)**.** 穴なし[*46]領域 $D$ 内に有限個の（互いに異なる）点 $c_1,\dots,c_n$ があり、$f$ は $D\setminus\{c_1,\dots,c_n\}$ で正則な関数とする。さらに、$D$ 内の左まわり単純閉曲線 $C$ で、すべての $c_1,\dots,c_n$ をその内側に含むものを考える。このとき、

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{z=c_j} f(z)\,dz.$$

<u>留数計算</u>

**例 10.5.** 積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+2a\sin\theta+a^2}d\theta \qquad (0<a<1)$$

の計算。

*Proof.*

$$t=\tan\frac{\theta}{2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad d\theta=\frac{1}{1+t^2}dt$$

という置換積分の定石を利用しても計算できるが、ここでは、

$$z=e^{i\theta},\quad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i},\quad d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

なる変数変換を用いて、

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+2a\sin\theta+a^2}d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{(az+i)(z+ia)}dz$$

と書きなおす。ここで、積分域内の特異点は $z=-ia$ だけであり、

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(az+i)(z+ia)}dz = \oint_{z=-ia} \frac{1}{(az+i)(z+ia)}\,dz = 2\pi i\frac{1}{a(-ia)+i} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

検算：$a\to+0$, $a\to1-0$ とするとき、積分値と $2\pi/(1-a^2)$ が一致することを確認。 □

**例 10.6.** 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$$

の計算。

[*46] 領域の穴の数を数学的に記述することは思いの外面倒である。ここでは、単純閉曲線の内側の意味ともども、直感的な理解で済ませに深入りはしない。応用上はそれで十分こと足りる。

*Proof.* $\dfrac{1}{x^4+1}$ の部分分数分解を考えて、としても可能ではあるが計算は結構大変である。線分 $C_1 : [-R, R]$ と上半円 $C_2$ からなる閉曲線 $C$ を考えると、$z^4+1 = (z-\zeta)(z-\zeta^3)(z-\zeta^5)(z-\zeta^7)$ $(\zeta = e^{\pi i/4})$ に注意して

$$\int_C \frac{1}{z^4+1}dz = \oint_{z=\zeta} \frac{1}{z^4+1}\,dz + \oint_{z=\zeta^3} \frac{1}{z^4+1}\,dz.$$

右辺に現れる残りものは、

$$\oint_{z=\zeta} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \frac{2\pi i}{(\zeta-\zeta^3)(\zeta-\zeta^5)(\zeta-\zeta^7)} = -\frac{\pi i}{2}\zeta,$$
$$\oint_{z=\zeta^3} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \frac{2\pi i}{(\zeta^3-\zeta)(\zeta^3-\zeta^5)(\zeta^3-\zeta^7)} = \frac{\pi i}{2}\frac{1}{\zeta}$$

となるので、右辺の和は

$$\frac{\pi i}{2}(\zeta^{-1}-\zeta) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

一方、左辺の積分のうち、

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^4+1}dz$$

で、$z = Re^{i\theta}$ なるパラメータ表示を使うと、$|z^4+1| \geq |z^4| - 1 = R^4 - 1$ であるから、

$$\left|\int_{C_2} \frac{1}{z^4+1}dz\right| \leq \frac{|C_2|}{R^4-1} = \pi\frac{R}{R^4-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となって、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る。 □

**問 110** (*). 留数計算により次の積分を実行せよ。

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx.$$

(ii) 自然数 $n \geq 2$ に対して、

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^n+1}dx.$$

ヒント：扇型領域 $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$ の境界線での積分を考える。

**定理 10.7** (和の公式)**.** 実軸の上で正則な有理関数 $f(z)$ で、$|z| \to \infty$ であるとき $|f(z)| = O(1/|z|^2)$ となるものに対して、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(k) = -\pi \sum (f(z) \text{ の極における } f(z)\cot \pi z \text{ の留数}).$$

*Proof.* 関数 $\pi \cot \pi z$ は、$z = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ に一位の極をもち、そこでの留数は 1 であるから、$\pm(n + 1/2)(1 \pm i)$ を頂点とする正方形領域 $R$ を十分大きく取り、$f$ のすべての極が $R$ に含まれるようにしておけば、

$$\oint_{\partial R} f(z)\pi \cot \pi z dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} f(k) + 2\pi i \sum (f(z) \text{ の極における } f(z)\pi \cot \pi z \text{ の留数}).$$

そこで、大きな $n$ に対して $|\cos(\pi z)| \leq$ 定数 $(z \in \partial R)$ が示されれば、遠方での $f(z)$ の振る舞いから、

$$\left| \oint_{\partial R} f(z) \cot \pi z \, dz \right| \leq \text{定数}\, \|1/|z|^2\|_{\partial R} |\partial R| = \text{定数} \frac{1}{(n + 1/2)^2} 8(n+1/2) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となって、主張が成り立つ。

さて、$z = x + iy$ について、

$$|\cot(\pi z)| = \frac{|e^{i\pi x}e^{-\pi y} + e^{-i\pi x}e^{\pi y}|}{|e^{i\pi x}e^{-\pi y} - e^{-i\pi x}e^{\pi y}|} \leq \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|} \to 1 \quad (y \to \pm\infty)$$

であるから、十分大きな $|y|$ については、$x$ のとり方によらず $|\cot(\pi z)|$ は、ほぼ 1 以下である。とくに、$y = \pm(n + 1/2)$ で $n$ が十分大きいと、そうなる。

つぎに $x = \pm(n + 1/2)$ のとき、

$$|\cot(\pi z)| = \frac{|(-1)^n(\pm i)e^{-\pi y} + (-1)^n(\mp i)e^{\pi y}|}{|(-1)^n(\pm i)e^{-\pi y} - (-1)^n(\mp i)e^{\pi y}|} = \frac{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \leq 1$$

であるから、この場合は正確に 1 以下である。 □

**例 10.8.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2}$$

と書けるので、$f(z) = 1/(z^2 + a^2)$ $(|a| < 1)$ に上の公式を適用すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2}.$$

**問 111.** 両辺の極限 $a \to 0$ を取ることで、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler) を示せ。

**例 10.9.** 例 7.6 と上の例から、

$$2\sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m)(-1)^{m-1}a^{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2}{n^2+a^2} = \pi a \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} - 1 = \frac{2\pi a}{e^{2\pi a}-1} + \pi a - 1$$

となるので、

$$\frac{2\pi a}{e^{2\pi a}-1} = 1 - \pi a + \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m} \frac{(2\pi a)^{2m}}{(2m)!}$$

と比較すれば、ベルヌーイ数を使った

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}}{2} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m} \quad (m \geq 1)$$

なる表式を得る。

**定理 10.10** (フーリエ変換)**.** 上半平面（の近傍）で定義され、有限個の特異点 $c_1, \ldots, c_n$ *(*$\mathrm{Im}\, c_j > 0$*)* のみをもつ正則関数 $f(z)$ で、$f(z) = O(1/|z|)$ *(*$z \to \infty$*)* であるものを考えると、$t > 0$ に対して、

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{itx} f(x) dx = \sum_{j=1}^{n} \oint_{z=c_j} e^{itz} f(z)\, dz$$

となる。

*Proof.* すべての特異点 $\{c_j\}$ を含むような半径 $R > 0$ の上半円と区間 $[-R, R]$ に関する周回積分を考えると、右辺は

$$\oint e^{itz} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} e^{itx} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} e^{itRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) d(Re^{i\theta})$$

に一致する一方で、十分大きな $R > 0$ に対して $|f(z)| \leq M/|z|$ $(|z| = R)$ となる $M > 0$ があるので、

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi} e^{itRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) d(Re^{i\theta}) \right| &\leq \int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\theta} |f(Re^{i\theta})| R\, d\theta \\
&\leq M \int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\theta}\, d\theta = 2M \int_0^{\pi/2} e^{-Rt\sin\theta}\, d\theta \\
&\leq 2M \int_0^{\pi/2} e^{-(2Rt/\pi)\theta}\, d\theta = \frac{4M}{\pi Rt}(1 - e^{-Rt}) \to 0 \quad (R \to \infty)
\end{aligned}$$

より、主張がわかる。 □

**例 10.11.** $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$ $(a > 0)$ であれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ。($t < 0$ の場合は、$t > 0$ の複素共役である。)

**例 10.12.** $0 < s < 1$ に対して、

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

さらに左辺をくり返し積分を使って、

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} dt e^{-t} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-tx}\, dx &= \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} t^{-s} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y}\, dy \\ &= \Gamma(s) \int_0^{\infty} t^{-s} e^{-t}\, dt = \Gamma(s)\Gamma(1-s)\end{aligned}$$

と書き直せば、ガンマ関数の**折り返し公式** (reflection formula) を得る。

ついでながら(例 6.10(iii) 参照)、

$$\begin{aligned}\Gamma(2s) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{2s}}\, dx &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{2s-1} \sin x\, dxdy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y^{2s-1}}{y^2+1}\, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{2\sin(\pi s)}.\end{aligned}$$

*Proof.* $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ における解析関数 $f(z) = e^{(s-1)\log z}/(z+1)$(ただし、$z = r^{i\theta}$ $(r > 0,$ $0 < \theta < 2\pi)$ に対して $\log z = \log r + i\theta$ とする)を、円周 $|z| = R$ と線分 $[0, R]$ の周辺で線積分(パックマン積分)すると、

$$\oint_{|z|=R} f(z)\, dz + \int_0^R f(x+i0)\, dx - \int_0^R f(x-i0)\, dx = 2\pi i\; e^{(s-1)\log z}\Big|_{z=-1} = -2\pi i e^{\pi i s}.$$

ここで、

$$\oint_{|z|=R} |f(z)|\, |dz| \leq \oint_{|z|=R} \frac{|z|^{s-1}}{|z|-1}\, |dz| = 2\pi \frac{R^s}{R-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

および $f(x+i0) = x^{s-1}(x+1)$, $f(x-i0) = e^{2\pi i(s-1)} x^{s-1}/(x+1)$ に注意して極限 $R \to \infty$ を取ると、

$$(1 - e^{2\pi i s}) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{x+1}\, dx = -2\pi i e^{\pi i s}$$

となり、これから求める表式を得る。 □

## 11　一致の原理と解析接続

正則関数 $f(z)$ の値が 0 となる点 $a$ のことを $f$ の**零点** (zero[*47]) という。定数でない解析関数の零点は孤立している。言いかえると、零点集合が定義域の内点に集積しているような解析関数は恒等的に零に等しい。

実際、解析関数 $f(z)$ の (互いに異なる) 零点列 $(a_n)_{n\geq 1}$ の集積点 $a$ が $f$ の定義域に含まれるとすると、$f(z)$ の $z=a$ のまわりでのベキ級数展開

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

は、$f$ の $(a_n)$ での値を使って、まず $c_0 = f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ である。次に、$c_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-c_0}{a_n-a}$ となる。以下、

$$c_m = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - c_0 - c_1(a_n-a) - \cdots - c_{m-1}(a_n-a)^{m-1}}{(a_n-a)^m}$$

のように順次決まっていく。

このことはまた、次のようにも解釈される。今、二つの開円板 $D_1, D_2$ の上で定義された解析関数 $f_1(z), f_2(z)$ があって、ある $a \in D_1 \cap D_2$ の近傍で、$f_1$ と $f_2$ が一致しているとすると、$D_1 \cap D_2$ の上で一致し、したがって、$D_1 \cup D_2$ 上の解析関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{if } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{if } z \in D_2 \end{cases}$$

によって、定めることができる。このような操作を繰り返すことによって、解析関数の定義域を広げていく方法を**解析接続** (analytic continuation[*48]) という。

**例 11.1.** 等比級数

$$\sum_{n\geq 0} z^n$$

の収束半径は 1 であるが、これを解析接続すると、$1/(1-z)$ という、$\mathbb{C} \setminus \{1\}$ で定義された解析関数を得る。

**問 112.**

$$f(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} z^n$$

[*47] zero point ではなく単に zero という。

[*48] 直訳すれば、解析的続き。直訳でよいような。

の解析接続について調べよ。

以下では、$\mathbb{R}$ 上の可積分関数の知識[*49]を使う（使わなくても処理できるが、手間がかかる）ので、それについて書いておこう。

$f(s,z)$ を $s \in \mathbb{R}$ と $z \in D$ の連続関数とし、$D$ 内の有界閉集合 $K$ に対して、$s \in \mathbb{R}$ の連続関数 $f_K(s)$ で、(i) $|f(s,z)| \leq f_K(s)$ かつ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_K(s)\,ds < \infty$ を満たすものが取れるとする。

このとき、広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(s,z)\,ds$ は絶対収束し、かつ $z \in D$ について連続となる。さらに、$D$ 内の区分的になめらかな曲線 $C$ に対して、$\int_C f(s,z)\,dz$ は $s \in \mathbb{R}$ の連続関数であり、広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} ds \int_C f(s,z)\,dz$ も絶対収束し、$\int_C dz \int_{-\infty}^{\infty} f(s,z)\,ds$ に一致する。

次は、問 69 で確かめたことを解析接続の立場から見直したものである。

**例 11.2.** 複素数 $z, w$ で $\mathrm{Re}\, z > 0$ であるものに対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zs^2+ws}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{w^2/4z}$$

である。

*Proof.* $z > 0$ の場合は、例 6.8 で確かめた。さて、$f(s,z) = e^{-zs^2+ws}$ $(s \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}\, z > 0)$ を考えると、右半平面に含まれる有界閉集合 $K$ の場合、$K \subset [\delta, \infty) + i\mathbb{R}$ となる $\delta > 0$ が取れるので、$f_K(s) = e^{-\delta s^2 + s\mathrm{Re}\, w}$ が押え込み関数を与え、絶対収束する広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(s,z)\,ds$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ で連続となり、さらに右半平面内の区分的になめらかな閉曲線 $C$ について、

$$\oint_C dz \int_{-\infty}^{\infty} f(s,z)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} ds \oint_C f(s,z)\,dz = 0$$

となるので、$\int_{-\infty}^{\infty} f(s,z)\,ds$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ の正則関数である。

これを右半平面における正則関数 $\sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{w^2/z}$ と比較すると、半直線 $z > 0$ の上では一致するので、一致の原理によりすべての $\mathrm{Re}\, z > 0$ で一致する。 □

**例 11.3.** 次の等式

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{zt}-1}{e^t-1}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k-z} - \frac{1}{k} \right),$$

は $|z| < 1$ で成り立つのであるが、両辺ともに $\mathrm{Re}\, z < 1$ で正則であることから、この範囲でも成り立つ。

[*49] フビニの定理と呼ばれるものの特殊な場合である。

同様に、 $-1 < \operatorname{Im} z < 1$ のとき、

$$\int_0^\infty \frac{\sin(zt)}{e^t - 1}\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{z}{k^2+z^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}} - \frac{1}{2z}.$$

**例 11.4.** ガンマ関数がみたす等式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ $(\operatorname{Re} z > 0)$ から、$\Gamma(z+1)/z$ $(\operatorname{Re} z > -1, z \neq 0)$ は $\Gamma(z)$ の解析接続であり、$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ $(\operatorname{Re} z > -1,\ z \neq 0)$ を満たす。したがって、同様の手続きを繰り返すことで、$\Gamma(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$ まで解析接続され、$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ $(z \notin \{0, -1, -2, \cdots\}$ を満たす。除外点 $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は単純な極であり、その留数は、

$$\oint_{z=-n} \Gamma(z)\,dz = 2\pi i \frac{(-1)^n}{n!}$$

で与えられる。また、関数等式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (z \notin \mathbb{Z})$$

が成り立つことと $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \geq 1)$ から、$\Gamma(z) \neq 0$ $(z \notin \{0, -1, -2, \cdots\})$ がわかり、$1/\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で定義された正則関数で、その零点 $\{0, -1, -2, \cdots\}$ はすべて単純である。

**問 113.** 可積分関数 $f(x)$ のコーシー変換 (Cauchy transform) を

$$F(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

で定める。

(i) $F(z)$ は、$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ の解析関数である。

(ii) Stieltjes の反転公式

$$2\pi i f(x) = \lim_{y \to 0}(F(x+iy) - F(x-iy))$$

が成り立つ。

(iii) $F(z)$ が、$z = t$ の付近で実軸を越えて解析接続できるならば、$x = t$ の付近で $f(x) = 0$ である。

# 12　対数関数とリーマン面

対数関数 $\log x$ の $x=1$ のまわりでのベキ級数展開

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots$$

の収束半径は 1 であるから、$|z-1|<1$ である複素数 $z$ に対しても

$$\log z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots$$

と定めるのが自然であるが、この定義域は、実数に限定すると、$0<x<2$ となって本来全ての正数に対して定義し得る対数関数の一部しかカバーしない。そこで、複素変数の場合にも解析接続により定義域の拡張を考えたいところである。

結論から言うと、すでに導入した $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 上の正則関数 $\mathrm{Log}\,z$ と、上のベキ級数とが $[0,2]$ の上で等しいので、一致の原理により、そうなっている。すなわち、$\log z$ を $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ の範囲で解析接続したものは $\mathrm{Log}\,z$ に一致し、$1/z$ の不定積分として

$$\log z = \int_1^z \frac{1}{\zeta}\,d\zeta$$

と表わされる。

この「不定積分」表示をさらに拡張すると、経路の取り方（正確には、そのホモトピー）に依存した「多価関数」が出現する。すなわち、上で導入した対数関数 $\mathrm{Log}\,z$ を、その定義域を越えて解析接続すると解析接続の「経路」に依存した「関数」

$$\log z = \int_{C:1\to z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

が得られる。これは、$z$ のみならず、1 から $z$ に到達するまでの経路（のホモトピー）に依存する量なので、正しくは関数と呼べないものではあるが、値の不定性は角の表示の不定性 $2\pi i\mathbb{Z}$ だけであり、関数の様子が「ほぼ決まる」という意味で「多価関数」(multivalued function) と呼び慣わしている。

**例 12.1.** 複素平面で、1 から $z=-1$（の付近）へ、半円 $\{\zeta\in\mathbb{C}; |\zeta|=1, \mathrm{Im}\,\zeta\geq 0\}$ と線分 $\zeta = tz-(1-t)$ $(0\leq t\leq 1)$ に沿って解析接続して得られる対数関数 $\log z$ は、

$$\log z = \pi i + \int_0^1 \frac{z+1}{t(z+1)-1}dt$$

という積分表示を持ち、したがって、

$$\pi i - (z+1) - \frac{1}{2}(z+1)^2 - \frac{1}{3}(z+1)^3 - \dots$$

とテイラー展開される。

準備が整ったので、導入部分で述べた「手品」のタネを明かしておこう。複素数 $\zeta \neq -1$ に対して成り立つ

$$1 - \zeta + \cdots + (-1)^m \zeta^m = \frac{1 + (-1)^m \zeta^{m+1}}{1+\zeta}$$

を $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 内の経路で積分すると、

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m+1} z^{m+1} = \int_0^z \frac{1 + (-1)^m \zeta^{m+1}}{1+\zeta}\, d\zeta$$

を得る。ここで、$m = 2n$, $z = i$ を代入すると、

$$i\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right) = \int_0^i \frac{1 + \zeta^{2n+1}}{1+\zeta}\, d\zeta.$$

右辺の積分は、積分経路を $it$ $(0 \leq t \leq 1)$ に取っておくと、$n \to \infty$ のとき、

$$\int_0^i \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta = \log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} i$$

に近づく。

**例 12.2.** 積分

$$\int_0^\infty x^a F(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_j \mathrm{Res}_{c_j}(z^a F(z))$$

の計算。ただし、$0 < a < 1$, で $F(z)$ は、正半直線 $[0, \infty)$ 上にない有限個の点 $c_1, \dots, c_n$ と 0 を除いた複素平面上で定義された正則関数で、

$$F(z) = O(1/|z|^2)(z = \infty), \quad zF(z) = O(1)(z = 0)$$

なるもの。(無限遠点で 2 位以上の零点、原点で高々 1 位の極。)

*Proof.* 小さな半径 $r$ と大きな半径 $R$ の間の円環状の領域から、正半直線 $(0, \infty)$ を含む上下の開き角 $\epsilon > 0$ の扇形の図形を除いた部分を $D$ とすると、$D$ は単連結であるから、

$D$（の近傍）上の正則関数 $z^a = e^{a \log z}$ として、$(-t)^a = e^{\pi a i}$ となる分枝を取って、関数 $f(z) = z^a F(z)$ に留数定理を適用すれば、

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{z=c_j} f(z)\, dz$$

となる。この左辺の線積分は、

$$\int_r^R f(\rho e^{i\epsilon})e^{i\epsilon}d\rho + \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta - \int_r^R f(\rho e^{i(2\pi-\epsilon)})e^{i(2\pi-\epsilon)}d\rho - \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta$$

であるので、$F(z) = O(1/|z|^2)$ $(z \to \infty)$, $zF(z) = O(1)$ $(z \to 0)$ に注意して極限 $r \to +0$, $R \to \infty$ を取ると、

$$\int_0^\infty f(\rho e^{i\epsilon})e^{i\epsilon}d\rho - \int_0^\infty f(\rho e^{i(2\pi-\epsilon)})e^{i(2\pi-\epsilon)}d\rho$$

となる。ここで、

$$f(\rho e^{i\beta}) = \rho^a e^{ia\beta} F(\rho e^{i\beta})$$

に注意して、さらに極限 $\epsilon \to +0$ を取ると、

$$(1 - e^{2\pi i a}) \int_0^\infty \rho^a F(\rho) d\rho$$

に一致することが判る。 □

**例 12.3.** 上の公式で、$F(z) = \frac{1}{z(z+b)}$ $(b > 0)$ と取ると、原点以外の極は $z = -b$ ($n = 1$, $c_1 = -b$ ということ）であり、$z^{a-1}/(z+b)$ の $z = -b$ における留数は

$$e^{(a-1)\log z}|_{z=-b} = e^{(a-1)(\log b + i\pi)} = -e^{\pi i a} b^{a-1}$$

となるので、

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+b} dx = -2\pi i \frac{e^{\pi i a}}{1 - e^{2\pi i a}} b^{a-1} = \frac{\pi}{\sin \pi a} b^{a-1}$$

のように、例 10.12 が再現された。

リーマンは、複素平面にこだわる限り多価が避けられない対数関数の「一価関数化」を図るために、「無限小螺旋階段」状の「図形」を導入した。より一般に、いくつかの複素変数を「正則同型」で張り合わせた２次元図形（リーマン面 (Riemann surface) という）を考えて複素関数の「棲息する場所」と考えた。

他の有用な例として、**リーマン球面**。これは、二つの複素平面、$\mathbb{C}_z$ と $\mathbb{C}_w$ のうち、原点を除いた部分を、関係、

$$w = \frac{1}{z}$$

により張り合わせたもの。位相（空間）としては、重なっている部分の無駄を省けば、$\{z \in \mathbb{C}_z; |z| \leq 1\}$, $\{w \in \mathbb{C}_w; |w| \leq 1\}$ という二つの円板の周囲を上の関係で張り合わせたものと思えるので、球面と同一視できる。このようにして得られるリーマン面をリーマン球面と呼び $\overline{\mathbb{C}}$ と書く。リーマン球面はまた、複素平面 $\mathbb{C}_z$ に、$w = 0$ に対応する点（無限遠点）$\infty$ を付け加えたものと見ることもでき、$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と書き表すことも多い。

いずれにしても、リーマン球面はただの球面ではなく、複素数による座標表示を併せ持ったものと理解すべきである。

**例 12.4.** 領域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の解析関数 $1/z^n$ は、リーマン球面から原点を除いた $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の解析関数に拡張できて、$\mathbb{C}_w$-表示では、$w^n$ と表わされる。

**例 12.5.** 指数関数は、複素平面から $\log z$ の定めるリーマン面（無限螺旋階段）への正則同型を定める。

**有理型関数**[*50]（meromorphic[*51] function）とは、$\overline{\mathbb{C}}$ に値を取る複素変数可微分関数のこと。リーマン球面に関連した珠玉の結果を、この入門後の話題としていくつか挙げておく。

**定理 12.6.** $\overline{\mathbb{C}}$ 全体で定義された有理型関数は、有理関数に限る。

**定理 12.7.** リーマン球面をリーマン球面に移す正則全単射は、一次分数変換に限る。

**定理 12.8.** 単連結リーマン面は、リーマン球面、複素平面、単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ のいずれかと正則同型になる。

---

*50 有理型は、「ゆうりがた」か「ゆうりけい」か。重箱読みを避けて後者であろうか。それならば、有理形と書いてほしいような。

*51 mero は古代ギリシャ語で part を意味するという。正則関数の商で表されるということなので、分数形がよいような。

# 13　最大値原理とその応用

　正則関数のベキ級数表示を得る際に使った公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

で、$C = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta - z| = r\}$（向きは反時計廻り）としてパラメータ表示 $\zeta = z + re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$、を使うと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta$$

を得る。これから導かれる不等式

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|d\theta$$

により、もし $|f(z)|$ が、$|f(\zeta)|$ $(|\zeta - z| \leq r)$ の最大値になっていたとすると、

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|d\theta \leq |f(z)|$$

となって、

$$|f(z + re^{i\theta})| = |f(z)| \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

ところが最初の公式は、$f(z)$ が、円周上の点 $\{f(z + r^{i\theta}); 0 \leq \theta < 2\pi\}$ の重心に一致することを意味するので、この円周上の点の集まりは実は一点に集中しており、$f(z) = f(z + re^{i\theta})$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ である。$r > 0$ は十分小さい限り任意であるから、$f(\zeta)$ は定数関数でなければならない。

*Remark* 22. 最後のつめのところは、$|f(\zeta)|$ が $z$ の付近で定数であることに注意して、問 53 と合せてもよい。

**問 114.** 絶対値が 1 の連続関数 $f(s)$ $(a \leq s \leq b)$ が $\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(s)\,ds\right| = 1$ を満たせば、$f(s) \equiv 1$ である。

　まとめると、解析関数 $f(z)$ は定数関数でなければ、定義域の内部で $|f(z)|$ が極大値を取ることはない。

**定理 13.1** (maximum modulus principle)**.** 解析関数の絶対値は、定義域の境界で最大値を取る。

この定理は様々な応用を持つ。有名なところでは、初めの方で見た代数学の基本定理の別証明がある。

**定理 13.2.** 複素数を係数とする多項式で定数でないものは、必ず一次式の積に分解される。

*Proof.* もし、定数でない多項式関数 $f(z)$ が零点をもたなければ、$1/f(z)$ は複素平面全体で定義された解析関数で、

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{f(z)}=0$$

となるから、最大値原理に反する。 $\square$

**補題 13.3.** 半円 $\{|z|<r; Re\, z>0\}$ の上で定義された解析関数が、

$$\lim_{z\to iy} f(z)=0 \quad for\ y\in(-r,r),$$

をみたせば、恒等的に零に等しい。

*Proof.* 円全体で連続関数を

$$h(z)=\begin{cases} f(z) & \text{if } \mathrm{Re}\, z>0,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義すれば、$h(z)$ はコーシーの積分定理

$$\oint_C h(z)dz=0$$

を満たし、したがって解析関数である。一方、$h(z)$ は円の左半分で恒等的に零であるから、円の右半分でも零となる。 $\square$

**定理 13.4** (三線定理 (three line theorem))**.** 帯状閉領域 $\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}; 0\le Re\, z\le 1\}$ の上で定義された有界連続関数 $f(z)$ で、$\overline{D}$ の内部で解析的なものに対して、

$$M_x=\sup\{|f(x+iy)|; y\in\mathbb{R}\},\quad 0\le x\le 1$$

とおくと、不等式

$$M_x\le M_0^{1-x}M_1^x,\quad 0\le x\le 1$$

が成り立つ。

*Proof.* もし、$M_0 =$ または $M_1 = 0$ であれば、前の補題から $f(z)$ は恒等的に零となり、したがって定理の主張は自明なものになる。

そこで、$M_0 \neq 0$, $M_1 \neq 0$ と仮定する。関数 $F(z) = f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$ を考えると、これも帯状閉領域で連続かつその内部で解析的でさらに、

$$|F(z)| = |f(z)|M_0^{\mathrm{Re}z-1}M_1^{-\mathrm{Re}z}$$

は有界であり、

$$|F(iy)| = |f(iy)|M_0^{-1} \leq 1, \qquad |F(1+iy)| = |f(1+iy)|M_1^{-1} \leq 1$$

となる。そこで、$\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$ であれば、最大値原理により、$|F(z)| \leq 1$ となって、不等式 $|f(z)| \leq M_0^{1-\mathrm{Re}z}M_1^{\mathrm{Re}z}$ が得られる。

そうでないときでも、（十分大きい）自然数 $n$ に対して、関数 $F_n(z) = F(z)e^{(z^2-1)/n}$ を考えると、

$$|F_n(iy)| = |F(iy)|e^{-(y^2+1)/n} \leq |F(iy)| \leq 1,$$
$$|F_n(1+iy)| = |F(1+iy)|e^{-y^2/n} \leq |F(1+iy)| \leq 1$$

であり、さらに

$$|F_n(z)| = |F(z)|e^{-(y^2+1-x^2)/n} \to 0 \quad \text{as } y \to \infty \text{ with } 0 \leq x \leq 1$$

であるから、$|F_n(z)| \leq 1$ がわかり、$n \to \infty$ とすると、

$$|F(z)| = \lim_{n\to\infty} |F_n(z)| \leq 1$$

となってめでたい。 □

**例 13.5.** 任意に与えられた自然数 $n$ と正数列 $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n$ および実数 $0 \leq x \leq 1$ に対して、不等式

$$\sum_{j=1}^n a_j^x\, b_j^{1-x}\, c_j \leq \left(\sum_{j=1}^n b_j c_j\right)^{1-x} \left(\sum_{j=1}^n a_j c_i\right)^x$$

が成り立つ。

とくに、$b_j = c_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ と取れば、

$$\sum_{j=1}^n a_j^x \leq n^{1-x} \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^x$$

である。

*Proof.* 複素数 $z$ に対して、

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j a_j^z b_j^{1-z}$$

と置くと、$z = x + iy$ に対して、

$$|f(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \left| a_j^{x+iy} b_j^{1-x-iy} \right| = \sum_{j=1}^{n} b_j c_j \left( \frac{a_j}{b_j} \right)^x = f(x)$$

であるから、$f(z)$ は $0 \leq \Re z \leq 1$ で有界であり、三線定理を使えば、

$$|f(x+iy)| \leq f(0)^{1-x} f(1)^x, \qquad 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}$$

となって、とくに $y = 0$ と置けば、最初の不等式が得られる。 □

*Remark* 23. 上の例の最後の不等式に関連して、

$$\left( \sum_{j=1}^{n} a_j \right)^x \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

は次のように初等的に示すことができる。

両辺は $a = (a_1, \dots, a_n)$ の同次式であるから、$a_1 + \cdots + a_n = 1$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^x \geq 1$$

を示せばよく、これは、$0 \leq a_j \leq 1$ に注意して、$a_j^x \geq a_j$ を足し合わせると得られる。

**例 13.6** (Hölder's inequality)**.** 正数 $p \geq 1$, $q \geq 1$ は関係 $p^{-1} + q^{-1} = 1$ を満たすものとする。任意に与えられた自然数 $n$ と複素数列 $z_1, \dots, z_n$, $w_1, \dots, w_n$ に対して、不等式

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j w_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{j=1}^{n} |w_j|^q \right)^{1/q}$$

が成り立つ。

*Proof.* 例 6.5 で、$a_j = |z_j|^p$, $b_j = |w_j|^q$ と置いて、$x = 1/p$ を考えると、上の不等式が得られる。このとき、$a_j$, $b_j$ の中に 0 が含まれていても、極限操作で、不等式自体は正しいことに注意。 □

**問 115.** 上の説明で、極限操作の部分を確かめよ。

# 付録A　グルサの定理

導関数の存在から正則性（導関数の連続性）がしたがうことの E. Grousat による証明の A. Pringsheim による簡略化[*52]を紹介する。

まず最初に、積分定理が成り立つであろう理由を述べよう。境界 $\partial D$ が区分的になめらかな有界領域 $D$ を小さい領域 $D_j$ $(1 \leq j \leq N)$ に分割し $\partial D = \sum_{j=1}^{N} \partial D_j$ とする。各小領域ごとに代表点 $c_j \in D_j$ を用意し、

$$f(z) = f(c_j) + f'(c_j)(z - c_j) + \epsilon_j(z)(z - c_j) \quad (z \in \overline{D_j})$$

と表わす。ここに $\epsilon_j(z)$ は $z \in \overline{D_j}$ の連続関数で、$\lim_{z \to c_j} \epsilon_j(z) = 0$ を満たす。そうすると、

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \oint_{\partial D_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \oint_{\partial D_j} \epsilon_j(z)(z - c_j)\,dz$$

である。ここで、最後の和の各項の大きさを見積もるために、$D$ を縦横 $n$ 等分した状況を考えると、$\delta(D_j) = O(1/n)$, $|\partial D_j| = O(1/n)$ となるので、

$$\left| \oint_{\partial D_j} f(z)\,dz \right| \leq \|\epsilon_j\|_{D_j} \frac{M}{n^2}.$$

そこで、分割を細かくすると、$N = O(n^2)$ であり、$\|\epsilon_j\|$ の値は 0 に近づくので、もしそれが $j$ について一様に 0 に近い $\epsilon > 0$ で押さえられるならば（このことは、$f'$ が $\overline{D}$ で連続であれば正しい)、

$$\left| \oint_{\partial D} f(z)\,dz \right| \leq \epsilon \frac{M}{n^2} N = \epsilon O(1)$$

となるので、$\partial D$ に沿った周回積分の値は 0 でなければならない。

以上の議論を背理法による形に書き整えると、Goursat-Pringsheim が得られる。分割による評価を簡単にするために、$f$ を閉長方形 $R$ の上で複素微分可能な関数とし、$I = \oint \partial R f(z)\,dz \neq 0$ と仮定して矛盾を導く。まず、$R$ を $2 \times 2$ に等分割し、$\partial R = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ と表わすと、

$$|I| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \oint_{C_j} f(z)\,dz \right|$$

[*52] E. Hille, Analytic Function Theory, volume I, Ginn and Company, 1959, §7.2 脚注。

より、$\frac{I}{4} \le \left|\oint_{C_j} f(z)\,dz\right|$ となる $j$ があるので、$C_j$ で囲まれた閉長方形を $R_1$ とする。以下、同様の操作をくり返すことで、閉長方形列 $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots$ を

$$\frac{|I|}{4^k} \le \left|\oint_{\partial R_k} f(z)\,dz\right|$$

であるように絞り出し、$\bigcap_k R_k = \{c\}$ とする。そして、

$$g(z) = \frac{f(z) - f(c)}{z - c} - f'(c)$$

とおけば、$g(z)$ は $R$ 上の連続関数であり、$\partial R$ の長さを $L$ で表すとき、

$$|I| \le 4^k \left|\oint_{\partial R_k} f(z)\,dz\right| = 4^k \left|\oint_{\partial R_k} g(z)(z-c)\,dz\right| \le 4^k \|g\|_{R_k} \frac{L}{2^{k+1}} \frac{L}{2^k} + |I| \le \frac{L^2}{2} \|g\|_{R_k}$$

となる。ところが $\lim_k \|g\|_{R_k} = |g(c)| = 0$ であるから、これは $I \ne 0$ に反する。

あとは、長方形に対する積分定理を経由して $f$ の原始関数 $F$ の存在を示し、$F$ の正則性と正則関数の解析性から、$f = F'$ の連続性が導かれ、したがって、$f$ は正則である。

*Remark* 24. Goursat-Pringsheim は、なぜか三角形についての周回積分の形で示すことが多いが、同じことである。ちなみに、Groursat は長方形を、Pringsheim は三角形を扱ったようである。三角形が便利なのは、即座に多角形に移行できることで、長方形だと、間に原始関数の議論とかが必要になる。

# 付録B　優級数の方法

ベキ級数 $f(z)$ の収束半径についての情報から $1/f(z)$ の収束半径の情報を、コーシーによる優級数の方法で取り出してみよう。この方法は、形式的に計算してからその意義を考えるという意味でオイラー的であり、ややもすれば論理が過剰に強調されがちな現代の数学の中においては、貴重な経験の機会と言えようか。

ベキ級数 $F(z) = \sum F_n z^n$ が $f(z)$ の優級数 (majorant) であるとは、$|f_n| \le F_n$ $(n \ge 0)$ が成り立つこと。

ベキ級数 $f(z)$ の収束半径を $\rho > 0$ とすれば、$f_n = O(R^{-n})$ $(0 < R < \rho)$ である。したがって、$|f_n| \le M/R^n$ $(n \ge 1)$ となる $M > 0$ が存在する。このとき、$F(z) = |f_0| + \sum_{n \ge 1} M z^n / R^n$ が、$f(z)$ の majorant になる。$g(z)$ を定める漸化式を利用して $g(z)$ の majorant $G(z)$ を具体的に求め、それにより、$g(z)$ の収束域についての情報を得よう、というのが majorant の方法である。$f(z)$ の代わりに $f(z)/f_0$ を考えれ

ば十分なので、以下、$f_0 = 1$ と仮定する。このとき、不等式

$$|g_n| \leq |f_1||g_{n-1}| + \cdots + |f_{n-1}||g_1| + |f_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{R^k}|g_{n-k}|, \quad g_0 = f_0 = 1$$

が成り立つので、$g(z)$ の majorant $G(z) = \sum_{n\geq 0} G_n z^n$ を、$G_0 = 1$,

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{R^k} G_{n-k}, \quad n \geq 1$$

で帰納的に定めることができる。

**問 116.** 不等式 $|g_n| \leq G_n$ が成り立つことを $n$ についての帰納法で確かめよ。

ここから、母関数の計算により $G(z)$ を具体的に求めてみよう。和の順序を形式的に交換すれば、

$$\begin{aligned} G(z) - 1 &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{l} \frac{M}{R^k} G_{l-k} z^l = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty} \frac{M}{R^k} G_{l-k} z^l = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M}{R^K} G_j z^{j+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{R^k} z^k \sum_{j=0}^{\infty} G_j z^j = \frac{Mz}{R-z} G(z) \end{aligned}$$

であるから、これを $G(z)$ についての方程式と思って解くと、

$$G(z) = \frac{R-z}{R-(M+1)z}$$

を得る。ここまでは形式的な計算であったが、具体的に得られた $G(z)$ の形を見ると、べき級数 $G(z)$ は、$|z| < R/(M+1)$ で絶対収束し、のみならず ($|z| < R$ にも注意)、$G(z)$ を求める際に行った形式的計算のところがすべて絶対収束級数に対する和の順序交換という形で成り立ち、したがって、$g(z)$ の収束域が $|z| < R/(M+1)$ を含むことが分かった。

**問 117.** ベルヌーイ数の母関数における $R/(M+1)$ を最大化した値は、$6/5$ ($R = 3$, $M = 3/2$) である。この値は、収束半径 $2\pi$ よりも大分小さい。

本文では、ベキ級数の代入によって新たなベキ級数が得られることを、正則関数の合成とそのテイラー展開として理解した。ここでは、優級数の方法により、ベキ級数のみの処理方法を与えよう。すなわち、$f(z)$ の収束半径が 0 でなく、$f_0$ が $g(z)$ の収束円の内部にある場合に、

$$h_l = \sum_{k\geq 0} g_k f_l^k$$

は絶対収束し、ベキ級数 $h(z)=\sum_{l\geq 0} h_l z^l$ の収束半径も 0 でないことを示す。

まず、逆数の際に見たように、$R>0$ が $f$ の収束半径よりも小さければ、$|f_n|\leq M/R^n$ $(n\geq 1)$ となる $M>0$ が存在する。すなわち、$F(z)=|f_0|+\sum_{n\geq 1} Mz^n/R^n$ は、$f(z)$ の優級数である。そこで $|z|<R$ に対しては、

$$|f(z)|\leq \sum_{n=0}^{\infty}|f_n||z|^n\leq |f_0|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M|z|^n}{R^n}=|f_0|+\frac{M|z|}{R-|z|}$$

であるから、これが $g(z)$ の収束半径 $\rho$ よりも小さい時、すなわち

$$|z|<R\left(1+\frac{M}{\rho-|f_0|}\right)^{-1} \tag{3}$$

である時、不等式

$$\sum_{l\geq 0}|f_l^k||z|^l\leq \sum_{l\geq 0}F_l^k|z|^l=\left(|f_0|+\sum_{n\geq 1}\frac{M}{R^n}|z|^n\right)^k=\left(|f_0|+\frac{M|z|}{R-|z|}\right)^k$$

が成り立つ。したがって、

$$\sum_{k,l\geq 0}|g_k||f_l^k||z|^l\leq \sum_{k\geq 0}|g_k|\left(|f_0|+\frac{M|z|}{R-|z|}\right)^k<\infty$$

となることから、各 $l\geq 0$ について、

$$h_l=\sum_{k\geq 0}g_k f_l^k$$

が絶対収束し、

$$\sum_{l\geq 0}|h_l||z|^l\leq \sum_{k\geq 0}|g_k|\left(|f_0|+\frac{M|z|}{R-|z|}\right)^k<\infty$$

であるとわかる。

このとき、絶対収束する二重級数

$$\sum_{k,l\geq 0}g_k f_l^k z^l$$

の和の順序を変えることで、等式

$$\sum_{l=0}^{\infty}h_l z^l=\sum_{k=0}^{\infty}g_k f(z)^k$$

条件 (3) の下で成り立つこともわかる。

**問 118.** ベキ級数の逆元の収束域については、合成関数の結果を適用することも可能である。具体的には、$\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n z^n$ が $\varphi_0 \neq 0$ であれば、

$$\frac{1}{\varphi(z)} = g(f(z)), \quad g(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi_0}{\varphi_0}$$

と見る。このとき、合成関数の収束域についての評価式が、逆元の収束域の評価式に一致することを確認する。

**問 119.** ベキ級数 $f(z) = z + z^2$ と $g(z) = \log(1+z)$ の合成である $\log(1+z+z^2)$ の収束半径を上の方法で見積り、得られる最大値を求めよ。

最後に、ベキ級数に対する逆関数の存在を優級数を使って示そう。

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k$$

の逆関数 $g(z)$ の収束半径について。

$$g(z)^k = \sum_{l\geq k} g_l^k z^l, \quad g_l^k = \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} g_{l_1}\cdots g_{l_k}, \quad g_l^1 = g_l, \quad g_l^l = g_1^l = 1$$

を使って $f(g(z))$ を計算すれば、

$$-g_l = \sum_{k=2}^{l} f_k g_l^k \quad (l \geq 2).$$

ここで、$g_l^k$ $(k \geq 2)$ が、$g_2, \ldots, g_{l-1}$ の正係数多項式 $G_l^k(g_2, \ldots, g_{l-1})$ であることに注意。

$$G_l^l = 1, \quad G_l^{l-1} = (l-1)g_2, \quad G_l^{l-2} = (l-2)g_3 + \binom{l-2}{2} g_2 g_3, \quad \cdots$$

$$G_l^2 = 2g_{l-1} + g_2 g_{l-2} + \cdots + g_{l-2} g_2.$$

したがって、$|f_k| \leq F_k$ $(k \geq 2)$ であるとき、正数列 $G_l$ $(l \geq 2)$ を

$$G_l = \sum_{k=2}^{l} F_k G_l^k(G_2, \ldots, G_{l-1})$$

で定めると、

$$|g_l| \leq G_l$$

である。さらに、$F_k = M/R^k$ $(k \geq 2)$ である場合を考えると、

$$\begin{aligned}
G(z) - z = \sum_{l=2}^{\infty} G_l z^l &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{l} \frac{M}{R^k} G_l^k(G_2, \ldots, G_{l-1}) z^l \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{M}{R^k} G_l^k(G_2, \ldots, G_{l-1}) z^l \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M}{R^k} \left( z + \sum_{l \geq 2} G_l z^l \right)^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M}{R^k} G(z)^k \\
&= \frac{M}{R} \frac{G(z)^2}{R - G(z)}.
\end{aligned}$$

すなわち、形式的べき級数 $G(z) = z + \sum_{l \geq 2} G_l z^l$ は、二次方程式

$$(M+R)G(z)^2 - R(z+R)G(z) + R^2 z = 0$$

をみたす。これから、

$$G(z) = \frac{R(z+R) - R^2\sqrt{1 - 2(1+2M/R)(z/R) + (z/R)^2}}{2(M+R)}$$

という表示を得る。これから、$G(z)$ の収束域 $D$ は、

$$|2(R+2M)z - z^2| < R^2$$

を含むことがわかる。とくに、$|z| \leq R + 2M$ という制限の下に、上の不等式を強く評価すれば、$D$ は

$$|z| < \frac{R^2}{R+2M}$$

を含むことがわかるので、$G(z)$ の収束半径は $R^2/(R+2M)$ 以上であるとわかる。

**問 120.** $G(z)$ の収束半径を求めよ。

**問 121.** $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ の逆関数をベキ級数で表し、その収束半径を求めよ。また、上で与えた見積り $R^2/(R+2M)$ の最大値を求め、これと比較せよ。

# 付録C　偏角の原理

正則関数 $f(z)$ の値が 0 となる点 $a$ のことを $f$ の**零点** (zero) という。零点のまわりでのベキ級数表示は、

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k (z-a)^k, \quad f_m \neq 0, m \geq 1$$

の形である。$m$ を零点 $a$ の重複度 (multiplicity) という。このとき、十分小さい $\delta > 0$ に対して、$f(z)$ は、$|z-a| = \delta$ の上で、

$$|f(z)| \geq |z-a|^m (|f_m| - |f_{m+1}||z-a| - \cdots) = \delta^m (|f_m| - |f_{m+1}|\delta - |f_{m+2}|\delta^2 - \cdots) > 0$$

を満たし、

$$\oint_{|z-a|=\delta} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_a((f'/f) = 2\pi i m$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m f_m (z-a)^{m-1} + (m+1) f_{m+1} (z-a)^m + \cdots}{f_m (z-a)^m + f_{m+1} (z-a)^{m+1} + \cdots} \\ &= \frac{m}{z-a} \frac{1 + (m+1)(f_{m+1}/f_m)(z-a) + \cdots}{1 + (f_{m+1}/f_m)(z-a) + \cdots}\end{aligned}$$

の $a$ における留数は $m$ である。

より一般的に、次が成り立つ。これを偏角の原理 (argument principle) という。

**定理 C.1.** 区分的になめらかな境界 $\partial D$ で囲まれた有界領域 $D$ に対して、$\overline{D}$ を含む開集合上で定義された正則関数 $f(z)$ が $f(z) \neq 0$ *(*$z \in \partial D$*)* を満たせば、$D$ 内の零点は有限個であり、

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sharp\{z \in D; f(z) = 0\}.$$

ただし、右辺の零点の個数は、重複度も込めて数える。

*Proof.* $D$ 内の零点が無限個あれば、$\overline{D}$ 内に集積点 $a$ が存在し、一致の原理により、$f$ は恒等的に 0 になるので、$\{z \in D; f(z) = 0$ は有限集合である。そこで、それを $a_j$ と列挙し、零点 $a_j$ の重複度を $m_j$ とし、$\delta_j > 0$ を小さく取り、積分定理を使うと、

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_j \oint_{|z-a_j|=\delta_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_j 2\pi i m_j = 2\pi i \sharp\{z \in D; f(z) = 0\}.$$

□

偏角の原理の応用として、正則関数 $f$ が開集合を開集合にうつす（開写像という）ことを示そう。

*Proof.* 定義域の点 $a$ に対して、正則関数 $f(z)-f(a)$ の零点である $z=a$ の重複度を $m\geq 1$ とする。$f(z)-f(a)$ に偏角の原理の準備部分をくり返すと、$f(z)-f(a)\neq 0$ $(0<|z-a|\leq\delta)$ となる $\delta>0$ が存在し、

$$\oint_{|z-a|=\delta}\frac{f'(z)}{f(z)-f(a)}\,dz=2\pi im$$

である。一方、$f(z)-w$ は $|z-a|=\delta$ である $z$ と $w\in\mathbb{C}$ の連続関数であるから、$\epsilon>0$ を小さく取ることで、

$$|z-a|=\delta,\ |w-f(a)|<\epsilon\Longrightarrow f(z)-w\neq 0$$

とできる。このとき、

$$w\mapsto\oint_{|z-a|=\delta}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz$$

が $w\in D_\epsilon(f(a)|$ について連続である一方、その値は偏角の原理により、

$$\oint_{|z-a|=\delta}\frac{1}{f(z)-w}\frac{d}{dz}(f(z)-w)\,dz\in 2\pi i\mathbb{N}$$

であるから、

$$\oint_{|z-a|=\delta}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz=2\pi im\quad(w\in D_\epsilon(f(a)))$$

したがって、各 $w\in D_\epsilon(f(a))$ に対して、$f(z)=w$ ちなる $z\in D_\delta(a)$ が重複度込で丁度 $m$ 個ある。とくに、各 $a$ に対して、その近傍 $D_\delta(a)$ を十分小さく取れば、$D_\epsilon(f(a))\subset f(D_\delta(a))$ となる $\epsilon$ が存在する。これは、開集合の $f$ による像は開集合であることを意味する。 □

次に、$m=1$ すなわち $f'(a)\neq 1$ とすると、$w\in D_\epsilon(f(a))$ に対して、$f(c)=w$ となる $c\in D_\delta(a)$ がちょうど一つ存在するので、それを $g(w)$ で表わせば、$D_\delta(a)$ に値を取る $D_\epsilon(f(a))$ 上の関数 $g$ を得る。ここで

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,dz$$

が成り立つことを示そう。実際、

$$\oint_{|z-a|=\delta}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz=2\pi i$$

であることから、$c=g(w)$ は、$D_\delta(a)$ における $f(z)-w$ の重複度 1 の唯一の零点であり、$f'(c)\neq 0$ でなければならない。とくに、$c$ は $D_\delta(a)$ における $zf'(z)/(f(z)-w)$ の唯一の特異点である。一方で、$f(z)-w$ および $f'(z)$ は、$c=g(w)$ のまわりで

$$f(z)-w=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n,\quad f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(z-c)^{n-1}$$

とテイラー展開されるので、

$$\frac{zf'(z)}{f(z)-w}=\frac{z}{z-c}\frac{f'(c)+f''(c)(z-c)+\cdots}{f'(c)+f''(c)(z-c)/2+\cdots}$$

より、$\mathrm{Res}_c(zf'(z)/(f(z)-w))=c$ が得られるからである。

この $g(w)$ の積分表示から、$g$ は正則で

$$g'(w)=\oint_{|z-a|=\delta}\frac{zf'(z)}{(f(z)-w)^2}\,dz$$

は $w\in D_\epsilon(f(a))$ について連続である。

最後に $U=g(D_\epsilon(f(a)))\subset D_\delta(a)$ は開集合であり、$g:D_\epsilon(f(a))\to U$ は全単射かつ $f(g(w))=w$ を満たす。また、$z\in U$ であれば、$z=g(w)$ となる $w\in D_\epsilon(f(a))$ が取れるので、$f(g(w))=w$ を $g$ で移して、$z=g(w)=g(f(g(w)))=g(f(z))$ が成り立つ。

以上により、次が示された。

**定理 C.2** (逆関数)**.** 解析関数 $f(z)$ が $f'(a)\neq 0$ を満たすならば、$b=f(a)$ のまわりで定義された解析関数 $g(w)$ で、$g(f(z))=z,\ f(g(w))=w$ となるもの（$g$ は $f$ の逆関数 *(inverse function)* と呼ばれる）が存在する。

ベキ級数 $f(z)=\sum_{n\geq 0}f_n(z-a)^n$ が、$f_1\neq 0$ を満たせば、その逆関数を $f(a)$ のまわりでのベキ級数として形式的に求めることができる。上の定理は、最初のベキ級数の収束半径が 0 でないときに、そのような逆関数が存在することを意味する。

# 付録D　道の道とすべきは

日常語で曲線というときは、なめらかなものを指すようで、折れ線を曲線という人は稀であろうが、数学の用語としては、ジグザグした動きもすべて曲線 (curve) ということが多い。本文では、その点に配慮した経路 (path=道) という言葉も使ってきたのであるが、そこでは、実用的ではあるが一方で人為的にも思える「区分的に滑らか」という性質を仮

定していた。この余計とも思われる条件を取り除いたらどうなるかは、誰しも気になるところであろう。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の運動 (motion) とは、閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 $\phi$ をいう。2 つの運動が同値であるとは、連続で向きを保つパラメータの変換で相互に移り合えることを指す。運動の同値類を $\mathbb{R}^n$ における道 (みち) といい、運動 $\phi$ の定める道を $[\phi]$ で表す。数学の用語としては、道のことを曲線と称することが多いのであるが、日常用語の曲線に近いのは、$[\phi]$ よりもむしろその像 $\phi[a,b]$ の方である。道 $C=[\phi]$ に対して、パラメータの向きを変えることで得られる道を $-C=-[\phi]$ で表す。

運動 $\phi$ が単純 (simple) であるとは、$\phi(s)=\phi(t)$ $(a\leq s<t\leq b)$ となるのは、$s=a$, $t=b$ に限る場合をいう。また、運動が閉じているとは、$\phi(a)=\phi(b)$ であること。これらの運動に関する性質は、パラメータの取替えで不変であることから、道に対する性質でもある。パラメータ表示に $C^1$ の意味での滑らかさを仮定し、さらに向きを保つパラメータの取替え $t=h(\tau)$ $(\alpha\leq\tau\leq\beta)$ およびその逆に同様の滑らかさを要求して[*53]得られる同一視（同値類）のことを $C^1$ 道と呼ぶ。

運動 $\phi$ に対して、その全変動 (total variation) を

$$\sup\{\sum_{j=1}^{l}|\phi(t_j)-\phi(t_{j-1})|; a=t_0<t_1<\cdots<t_l=b\}$$

で定める。ここで、$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $|x|=\sqrt{(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2}$ は $x$ の長さを表す。運動 $\phi$ の全変動は、パラメータのとり方に依らないので、道 $C=[\phi]$ で定まる量である。これを $C=[\phi]$ の道のりと呼び $|C|$ で表す。

**命題 D.1.** 道 $C$ が区分的に滑らかな関数 $\phi$ で表わされるとき、

$$|C|=\int_a^b\left|\frac{d\phi}{dt}\right|dt.$$

さて、道についてのイメージがわいたであろうか。

**例 D.2.** 関数

$$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x}$$

のグラフとして実現される曲線は、パラメータ表示 $\phi(t)=(t,f(t))$ $(t\in\mathbb{R})$ により、なめらかな道となっているのであるが、$x$ 軸との交点が原点付近に集中して繰り返し現れることに注意しよう。なめらかな道とて侮れないということである。

[*53] 言いかえると、$h'$ の連続性と正値性 $h'(\tau)>0$ $(\alpha\leq\tau\leq\beta)$ を要求して

他に、半径 $r>0$ の円に外から巻き付く曲線

$$\phi(t)=(r+e^{-t})(\cos(at+b),\sin(at+b))$$

のようなものもある。これを、パラメータの範囲が有限閉区間でないという理由で、除外してよいものかどうか。

上の例で $r=0$ とおけば、原点に収束する曲線を表すことになるが、ここで新たなパラメータ $s=e^{-t/2}$ を導入して書きなおすと、

$$\varphi(s)=s^2(\cos(-2a\log s+b),\sin(-2a\log s+b)),s>0$$

という表示を得る。これは、$s=0$ まで、なめらかに拡張できるので、$0\leq s\leq 1$ に限定すれば、原点と半径 1 の円周上の点 $(\cos b,\sin b)$ とを結ぶなめらかな道 $C_b$ を得る。曲線族 $C_b$ $(0\leq b<2\pi)$ は、原点以外に共有点を持たないので、例えば、$C_0$ と $C_\pi$ をつなげることで区分的になめらかな道を得る（巴曲線)。だんだん、不安になってこないか。

さらに、連続性だけを仮定した曲線の例として、カントル関数と呼ばれる連続関数のグラフを取り上げよう。[*54] これは、本来、集合・位相の中で扱うべき大事な内容であるが、幾何と解析の境界に位置する話題であり、漏れ落ちることも多い。困ったことである。

自然数 $N$ に対して、有限集合 $\{0,1,\dots,N-1\}$ を値にとる数列全体を $N^\infty$ という記号で表す。2つの数列 $a=(a_n)$, $b=(b_n)$ は、$a_n=b_n$ となる $n\geq 1$ が多いほど「近い」とみなすことで、コンパクト位相空間となる。さらに、$N^\infty$ から閉区間 $[0,1]$ への連続な全射を、

$$[a]_N=\sum_{k=1}^{\infty}N^{-k}a_k$$

で定めることができる。$3^\infty$ の閉部分集合 $\{(2a_n);(a_n)\in 2^\infty\}$ の像がカントル集合 (Cantor set) と呼ばれるものであり、数 $0\leq t\leq 1$ を 3 進展開した際に、1 という数字が現れないもの全体となっている。

3 進展開を利用して、この Cantor 集合の上だけで「増加」する閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 (Cantor function) を作ってみよう。3 進実数 $c=[c_1c_2\dots]_3$ に対して、2 進実数 $f(c)$ を次のように定める。$c\notin C$ のときには、$n\geq 0$ を「$c_j\neq 1$ for $j\leq n$ and $c_{n+1}=1$」であるように選び、

$$f(c)=\left[\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_n}{2}1\right]_2=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{2^{j+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

[*54] もう少し詳しい説明は、予備知識のところで挙げた URL 参照。

とおく。$c \in C$ のときには、$c_j \neq 1$ for $j \geq 1$ に注意して、

$$f(c) = \left[\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\cdots\right]_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{2^{j+1}}$$

とおく。そうすると、(i) $f$ は単調増加連続関数で、(ii) $[0,1] \setminus C$ の上では微分可能で、$f'(x) = 0$ である。そのグラフは、悪魔の階段 (the devil's staircase) とも呼ばれ、曲線の長さを計算すると、2 であることがわかる。一見、隙間だらけのように見えて、天網恢恢疎にして漏らさず、といったところ。

こんなものでは済まない連続曲線。単純性を犠牲にすれば、こんなこともできる。カントル集合が $2^\infty$ と同相であることに注目して、偶数項と奇数項に組み分けする同相写像 $2^\infty \cong 2^\infty \times 2^\infty$ を経由することで、連続な全射 $C \to [0,1] \times [0.1]$ を得る。さらに $[0,1] \setminus C$ が、可算個の開区間の分割和になっていることに注意すれば、これを $[0,1]$ まで連続に拡張できることがわかる。ということで、道 $[\phi]$ で、その像が正方形 $[0,1] \times [0,1]$ すべてを埋め尽くすものが得られた。こういった一連の埋め尽くし曲線は、最初の発見者にちなんで、ペアノ曲線 (Peano curve) と呼ばれる。[*55]

世にいわれるジョルダンの曲線定理「単純閉曲線は、平面を 2 つの領域に分ける」が、直感的に明らかなどととても言えた代物でないことが実感できよう。

# 付録E　線積分のギザギザ近似

いわゆるグリーンの定理[*56]を直感に訴える形で導くことは難しくない、微分積分の公式を使うだけなので。ただ、その証明となると、そもそも定式化そのものがそれなりに鬱陶しく、面倒なものである。最初の理解としては、そこまでこだわる必要もなく、ほどほどでお茶を濁すのが大人の知恵というものであるが、運悪く気になってしまった人のみならずとも、線積分の積分経路に関する連続性を認識しておくのも悪くないと思うので、積分定理と併せて少しだけ補足しておこう。

---

[*55] できるだけ長く細かくした迷路といったらよいか。http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve を見よ。

[*56] V.J. Katz, The History of Stokes' Theorem, Mathematics Magazine, 52(1979) によれば、ベクトル解析における積分定理の名称については、いろいろな経緯の下、不適切な呼び方が定着してしまっているということである。グリーンの定理および線積分の最初の出処は、コーシーの１８４６年の論文であり、いわゆるベクトル解析の定式化に先立つこと５０年以上も前のことであった。一方、Georg Green が１８２８年に論じたのは、ベクトル解析における発散定理に関係するもので、今ある形の発散定理自体は、Michael Ostrogradsky の１８２６年の論文による。Stokes の定理の名称に至っては、さらに混線気味で、正しくは、Kelvin の定理と呼ぶべきものであるらしい。

まず、領域 $D$ の境界 $\partial D$ が区分的に滑らかであるということの定義を述べよう。これが既にして面倒である。点 $p$ が $D$ の境界点であるとは、$p$ のどのような近傍 $|z-p|<r$ を取ってきても、近傍には、$D$ の点と $D$ 以外の点が混在することをいう。形式的に書けば、

$$\forall r>0, \exists z \in D, \exists z' \in \mathbb{C} \setminus D, |z-p|<r,\ |z'-p|<r.$$

境界点全体を $\partial D$ で表して、$D$ の境界 (boundary) と呼ぶ。そこで、$\partial D$ が区分的に滑らかであるということを、各境界点 $p \in \partial D$ に対して、次のいずれかが満たされることと定義する。

(i) 境界が点 $p$ の付近で滑らかな曲線で表される場合。点 $p$ を正則点と呼ぶ。適当な座標の下、境界が $x$ 軸の一部、$D$ が上半平面の一部として表される。

(ii) 境界が、点 $p$ の付近で区分的に滑らかであり、$p$ がその区分点である場合。境界は、$p$ を端点とする二本の滑らかな曲線からなる。このとき $p$ を特異点と呼ぶ。特異点は、さらに 2 つの場合に分けられる。点 $p$ を原点に写す適当な座標の下、$p$ の近傍と $D$ との共通部分が第一象限によって切り取られる原点の近傍で表わされる場合と、原点で実軸に接する 2 つの曲線（それぞれ第一象限と第四象限内にある）の間の領域で表わされる場合。

この定義のうち、正則点付近での記述で現れた $x$ 軸の正の向きを境界を表す曲線の向きと定める。領域 $D$ が有界であるとき、$\partial D$ は有限個の単純閉曲線からなること、境界の特異点は有限個であることに注意。

さて、区分的になめらかな境界をもつ有界領域 $D$ にその境界を合わせた集合 $\overline{D}$ 上で定義されたベクトル場 $F(x,y)\mathbf{i}+G(x,y)\mathbf{j}$ に関する積分定理とは次のようなものである。

$$\int_{\partial D}(F(x,y)dx+G(x,y)dy)=\int_D\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)dxdy.$$

ここで、左辺は、ベクトル場 $F\mathbf{i}+G\mathbf{j}$ の曲線 $\partial D$ に沿った線積分と呼ばれるもので、$\partial D$ の区分的になめらかなパラメータ表示 $(x(t),y(t))$ $(a \le t \le b)$ を使って、

$$\int_{\partial D}(F(x,y)dx+G(x,y)dy)=\int_a^b\left(F(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+G(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right)dt$$

で定められる。また、右辺に現れる偏導関数は、$D$ 上で存在し連続かつ $\overline{D}$ まで連続に拡張できるものとする。

まず、積分定理の右辺に現れる二重積分がリーマン和の極限として意味をもつことから確かめよう。

**補題 E.1.** 滑らかな曲線は、2 次元的に無視できること。区分的になめらかな境界 $\partial D$ をもつ有界領域 $D$ に対して、$\overline{D} = D \cup \partial D$ 上の連続関数はリーマン積分可能である。

*Proof.* 連続関数を領域 $D$ の上でリーマン積分する際に生じる不連続部分は、境界に由来するので、そこでの変動量がいくらでも小さくなることがわかれば良い。[*57]そのためには、滑らかな平面曲線 $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ に対して、$\phi[a, b]$ を覆う 2 次元閉区間の集まり $R_1, \cdots, R_n$ を適切に選ぶことで、$|R_1| + \cdots + |R_n|$ を好きなだけ小さくできればよい。これを見るために、$M = \max\{|\phi'(t)|; a \leq t \leq b\}$ とし、分割 $\Delta : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ において、

$$|\phi(t) - \phi(t_j)| \leq M|t - t_j|, \quad t \in [t_{j-1}, t_j]$$

であることに注意し、$R_j$ として、$\phi(t_j) \pm M(t_j - t_{j-1})(1, 1)$ を対角点とする正方形を取れば、まず $\phi[t_{j-1}, t_j] \subset R_j$ であり、

$$\sum_{j=1}^{n} |R_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} 4M^2(t_j - t_{j-1})^2 \leq 4M^2|\Delta| \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = 4M^2|\Delta|(b - a)$$

も $|\Delta| = \max\{t_j - t_{j-1}; 1 \leq j \leq n\}$ とともに好きなだけ小さくできる。 □

積分定理が成り立つことの素朴な理由は、微分して積分の公式を使った次の計算による。

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x, \psi(x))\, dx - \int_a^b F(x, \varphi(x))\, dx &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F_y(x, y)\, dydx \\ &= \int_{a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)} F_y(x, y)\, dxdy.\end{aligned}$$

一般の場合は、この計算ができるように $D$ を分割すれば良い、ということであるが、境界に $x = y^2 \sin(a/y)$ のような曲線が現れると分割が有限ではすまなくなり、領域積分・線積分に関する近似の議論が避けられず、それは意外と面倒なものである。

ここでは、コーシーの積分定理を示した際に行った計算を拡張する形でその証明を与えておこう。

正方形領域 $R = [0, 1] \times [0, 1]$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への $C^1$ 写像 $\varphi : (s, t) \mapsto z(s, t)$ で、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$$

[*57] リーマンによる積分可能条件の重積分版である。

が存在し連続であるものを考え[*58]、各 $0 \leq s \leq 1$ に対して、曲線 $C_s$ を $z(s,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で定める。このとき、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{C_s} f(z)\,dz &= \frac{d}{ds}\int_0^1 f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial t}\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial t}\right)\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 f(z(s,t))\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(z(s,t))\frac{\partial z}{\partial s}\right)\,dt \\
&\qquad - \int_0^1 \frac{\partial f(z(s,t))}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial(\overline{z},z)}{\partial(s,t)}\,dt + f(z(s,1))\frac{\partial z}{\partial s}(s,1) - f(z(s,0))\frac{\partial z}{\partial s}(s,0)
\end{aligned}$$

となるので、$0 \leq s \leq 1$ について積分すれば、

$$\oint_{\varphi(\partial R)} f(z)\,dz = \int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial(\overline{z},z)}{\partial(s,t)}\,dsdt.$$

そこで、もし、$\varphi$ が $R$ の内部から領域 $D$ の上への変数変換を与え、$\varphi$ の $\partial R$ への制限が $D$ の区分的になめらかな境界を与えるならば、重積分の変数変換公式[*59]により、

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}dz = 2i\int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy.$$

両辺の実部を比較すると、積分定理

$$\int_{\partial D}(udx - vdy) = -\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\,dxdy$$

を得る。実用的にはこれで十分であろうが、区分的にならめらかな境界をもつ有界領域 $D$ を有限分割することで、この $\varphi$ で表される場合に帰着させられるかどうかは、明らかとは言いがたい。もうひと頑張りが必要である。

コーシーの積分定理の証明では、二重積分の項が現れないこともあり、積分経路を多角形近似することで処理したのであるが、ここでは、二重積分のリーマン和による近似に配慮して、座標軸に平行な折れ線による近似を考えよう。

---

*58 $\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}$ であることに注意。

*59 この証明がまた面倒であるが、行列の LU 分解の変数変換版を用意して処理するのが比較的簡明。これは、気の利いた教科書に書いてある。あるいは、不等式から等式を導くというのもある。こちらは、https://arxiv.org/abs/2212.12566 参照。

まず、なめらかな曲線 $C: z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ と点 $c$ を結んだ放射写像 $\varphi: (s,t) \mapsto sz(t) + (1-s)c$ の場合は、

$$\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(s,t)} = s\overline{(z(t)-c)}\frac{dz}{dt} - s(z(t)-c)\frac{d\overline{z}}{dt}$$

より、

$$\left|\int_C f(z)\,dz - \int_L f(z)\,dz\right| = \left|\int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(s,t)}\,dsdt\right| \leq \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\|_{\varphi(R)} \int_0^1 |z(t)-c| \left|\frac{dz}{dt}\right| dt.$$

ここで、$L$ は、線分 $[z(0), c]$, $[c, z(1)]$ をこの順番でつないだ折れ線を表し、

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\|_{\varphi(R)} = \max\{\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\varphi(s,t))\right|; 0 \leq s, t \leq 1\}$$

である。

さて、区分的になめらかな境界をもつ有界領域 $D$ に対して、境界 $\partial D$ の区分的になめらかなパラメータ表示 $z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ を用意し、すべての特異点を含むように、境界 $\partial D$ の分点 $z_0 = z(0), z_1 = z(t_1), \dots, z_{n-1} = z(t_{n-1})$ を選び、複素数 $c_j$ $(1 \leq j \leq n)$ を $z_j - c_j \in i\mathbb{R}$, $z_{j-1} - c_j \in \mathbb{R}$ で定める（ただし、$z_n = z_0$ とおく）。$|z_{j-1} - c_j| \leq |z_j - z_{j-1}|$, $|z_j - c_j| \leq |z_j - z_{j-1}|$ に注意。$\partial D = C_1 + \cdots + C_n$ と分割し、各 $C_j$ を近似する折れ線で座標軸と平行または垂直なものを $L_j$ で表わし、$L = L_1 + \cdots + L_n$ と置けば、

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz - \int_L f(z)\,dz\right| &\leq \sum_{j=1}^n \left|\int_{C_j} f(z)\,dz - \int_{L_j} f(z)\,dz\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |z(t) - c_j| \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \\ &\leq \delta \left\|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\| |\partial D|.\end{aligned}$$

ここで、

$$\delta = \max\{|z(t) - c_j|; 1 \leq j \leq n, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$$

は、関数 $z(t)$ の一様連続性により、分点を適切に選べば、0 に近づけることができる。一方 $L$ で囲まれた領域を $D_L$ で表わすとき、$\{c_j\}$ の $x$ 座標、$y$ 座標をそれぞれ合わせた細分割を考えると、$D_L$ は長方形領域の分割和 $\sqcup R$ で表わされ、角 $R = [a, a'] \times [b, b']$ につ

いては

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial R} f(z)\,dz &= \int_a^{a'} f(x+ib)\,dx + i\int_b^{b'} f(a'+iy)\,dy \\
&\qquad - \int_a^{a'} f(x+ib')\,dx - i\int_b^{b'} f(a+iy)\,dy \\
&= -\int_a^{a'} dx \int_b^{b'} \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)\,dy + i\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy)\,dx \\
&= 2i\int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy
\end{aligned}
$$

となるので、これを $R$ について足し合わせると、

$$\oint_L f(z)\,dz = 2i\int_{D_L} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\,dxdy.$$

ここで、二重積分の定義から

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{D_L} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy = \int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy$$

となるので、線積分のギザギザ近似と合わせて、

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2i\int_D f(z)\,dxdy$$

を得る。とくに、正則関数 $f$ については、積分定理が成り立つ。

もういちど要点をふりかえると、区分的に滑らかな線積分が座標軸的折れ線で近似（ギザギザ近似と呼ぼう）できるかどうかが問題で、その証明には、一様連続性か積分定理の少し特殊な場合が必要であったということである。したがって、線積分をギザギザ近似して Green の定理を得るという説明は、そのままでは、トートロジーに陥いるおそれがある。

**問 122.** 線積分のギザギザ近似に関連して、

$$|C| = \lim_{\Delta\to 0}|L|$$

が成り立つかどうか考えよ。

# 付録F　Riemann-Stieltjes 積分

本文で述べた線積分と曲線の長さの計算公式について補足しよう。複素数値連続関数 $h(t)$ $(a \leq t \leq b)$ と正数 $\delta > 0$ に対して、

$$H_\delta = \max\{|h(s) - h(t)|; |s - t| \leq \delta\}$$

とするとき、$\lim_{\delta \to 0} H_\delta = 0$ が成り立つ。[*60]

これは、関数の連続性の性質を強めた形になっており、一様連続性 (uniform continuity) と称する。ここでは、これを認めた上で、２つの計算公式を導く。

そのために、$C^1$ 曲線 $z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ のパラメータ区間の分割 $\Delta : a = t_1 < \cdots < t_n = b$ を考え、$z_k = z(t_k)$, $|\Delta| = \max\{t_k - t_{k-1}; 1 \leq k \leq n\}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} |z_k - z_{k-1} - z'(t_k)(t_k - t_{k-1})| &= \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (z'(t) - z'(t_k))\, dt \right| && (4) \\ &\leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |z'(t) - z'(t_k)|\, dt \leq H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1}) && (5) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(z_k)\Big(z_k - z_{k-1} - z'(t_k)(t_k - t_{k-1})\Big) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |f(z_k)| H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq (b - a)\|f\| H_{|\Delta|} \to 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^n f(z(t_k)) z'(t_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\, dt.$$

さらにまた、(5) から導かれる

$$|z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) - H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1}) \leq |z_k - z_{k-1}| \leq |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) + H_{|\Delta|}(t_k - t_{k-1})$$

を $k$ について加えると、

$$\sum_{k=1}^n |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) - (b-a) H_{|\Delta|} \leq \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^n |z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) + (b-a) H_{|\Delta|}$$

[*60] 例えば、http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/real2018.pdf を見よ。

となり、これから

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|z_k - z_{k-1}| = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|z'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

もわかる。

# 付録G　ローラン展開

特異点と留数については本文でも取り上げたのであるが、そこではテイラー展開との関係については触れずじまいだったため、ここで補っておく。関数 $f(z)$ が $0 < |z-a| < \delta$ で正則であるとする。そして円環 (annulus) $A = \{r < |z-a| < R\}$ $(0 < r < R < \delta)$ を考えると、$z \in A$ についての Cauchy の積分公式から、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial A}\frac{\zeta}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

ここで、$|\zeta - a| = R$ のときには、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n\geq 0}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

$|\zeta - a| = r$ のときには、

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n\geq 0}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

を使うと、

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n,$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \qquad n \geq 0 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

なる絶対収束級数表示が得られる。コーシーの積分定理により $c_n, c_{-n}$ は、$0 < r, R < \delta$ のとり方によらず $f$ だけで決まるので、$r$ を $0$ に $R$ を $\delta$ に近づけると

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n \quad (0 < |z-a| < \delta)$$

が絶対収束級数として成り立つ。

逆に、ある正数 $\delta > 0$ と複素数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ があり、$0 < |z-a| < \delta$ を満たす複素数 $z$ に対して、絶対収束級数表示 $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-a)^k$ が成り立つとすると、$n \in \mathbb{Z}$ と $N \geq |n|$ について、$|z-a| = r$ $(0 < r < \delta)$ のとき、

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\sum_{k=-N}^{N} c_k(z-a)^k\right| &\leq \frac{1}{|z-a|^{n+1}}\sum_{|k|>N}|c_k||z-a|^k \\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\sum_{|k|>N}|c_k|r^k\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\left|\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz - 2\pi i c_n\right| &= \left|\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)-\sum_{k=-N}^{N}c_k(z-a)^k}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right| \\ &\leq \oint_{|z-a|=r}\left|\frac{f(z)-\sum_{k=-N}^{N}c_k(z-a)^k}{(z-a)^{n+1}}\right||dz| \\ &\leq \frac{2\pi}{r^n}\sum_{|k|>N}|c_k|r^k \to 0 \quad (N\to\infty)\end{aligned}$$

となるので、

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=a}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

は $f$ のみで定まり、$f$ の特異点 $a$ における留数は $c_{-1}$ で与えられる。

これを関数 $f(z)$ の $z=a$ における**ローラン展開** (Laurent expansion) という。

かくして、留数はローラン展開から読み取れるのであるが、応用上重要である極の場合については、本文でみたように、留数公式と $g(z) = (z-a)^m f(z)$ のテイラー展開を利用するのが簡便である。

**問 123.** 前半の計算で積分と級数和の順序を交換してよいことを確かめよ。

**問 124.** 複素数 $a$ と $0 \leq \epsilon < \delta$ に対して、

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n \quad (\epsilon < |z-a| < \delta)$$

が絶対収束級数として成り立つとき、以下のことを示せ。

(i) ベキ級数 $\sum_{k\geq 0} c_k w^k$ の収束半径は $\delta$ 以上、ベキ級数 $\sum_{k\geq 0} c_{-k} w^k$ の収束半径は $1/\epsilon$ 以上である。

(ii)
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}, \epsilon < r < \delta).$$

**例 G.1.**

(i) 自然数 $n$ と複素数 $a$ に対して、関数 $\dfrac{e^z}{(z-a)^n}$ の特異点は、$z = a$ の一箇所だけで、その点のまわりでのローラン展開は、

$$e^a \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(z-a)^{k-n}$$

となる。

(ii) 関数 $\dfrac{1}{z^2+1}$ の特異点は、$z = \pm i$ の 2 点で、$z = \pm i$ のまわりでのローラン展開は、それぞれ、

$$-\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) + \cdots, \quad \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} + \frac{1}{4} - \frac{i}{8}(z+i) + \cdots$$

となる。

(iii)「悪い」特異点のまわりでのローラン展開の例として

$$e^{1/z} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

# 索引