複素関数宿題

山上 滋

2023 年 4 月 6 日

宿題 1. 等式 $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ を示し、それから $|zw| = |z|\,|w|$ を導け。不等式 $|z+w| \leq |z| + |w|$ が三角不等式と呼ばれる理由を説明せよ。また、$z \neq 0$ のとき、$\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ を示せ。

宿題 2. $z^3 = -i$ の解を図示せよ。

宿題 3. 複素数 $|z| < 1$ に対し、極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right)$$

を求めよ。また、極限値に近づく様子を図示せよ。

宿題 4. te^{ct} の不定積分を求め、それを利用して

$$\int te^{at}\sin(bt)\,dt$$

を計算せよ。

宿題 5. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, $\overline{\cos z} = \cos\overline{z}$, $\overline{\sin z} = \sin\overline{z}$ および $\overline{\mathrm{Log} z} = \mathrm{Log}\overline{z}$ である。

宿題 6. 整数 n に対して、$(z^n)' = nz^{n-1}$ を示せ。ただし、$n < 0$ の場合は $\mathbb{C}^\times$ で考える。

宿題 7. $f(x+iy) = e^x(c\cos y + i\sin y)$ が複素微分可能であるように定数 $c \in \mathbb{C}$ を定めよ。

宿題 8. $f'(z) \equiv 0$ であれば、$f(z)$ は定数である。

宿題 9. 原点 0 から点 1 への線分を C_1, 点 1 から点 $1+i$ への線分を C_2, 点 0 から点 $1+i$ への線分を C_3 で表すとき、関数

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = e^z, \quad f(z) = x + y$$

に対して、線積分

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz, \qquad \int_{C_3} f(z)dz$$

を計算し比較してみよ。

宿題 10. 部分分数表示

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

を用いて、$1/(z^2+1)$ の $D = [\mathrm{Re}\, z > 0]$ における原始関数を Log で表わせ。

宿題 11. 閉曲線 C で、すべての自然数 $n \geq 1$ に対して $\oint_C \bar{z}^n \, dz \neq 0$ となるものを見い出せ。

宿題 12. フレネル積分を求める上で必要な計算を実行せよ。

宿題 13. 定数と異なる多項式 $p(z)$ に対して、方程式 $p(z) = 0$ がかならず複素数の解をもつことを、積分公式の応用として示せ。

宿題 14. 実数 $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ に対して、円弧 $z(t) = e^{it}$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ を $C(\alpha, \beta)$ で表す。領域 $\mathbb{C} \setminus C(\alpha, \beta)$ の上で定義された関数

$$f(z) = \int_{C(\alpha,\beta)} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta$$

が正則であることを示し、f の 0 のまわりでのテイラー展開を求めよ。

宿題 15. 有理関数 $1/(1 + z + z^2)$ の $z = 0$ のまわりでのテーラー展開およびその収束半径を求めよ。

宿題 16. ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

の収束半径を求めよ。

宿題 17. 関数 $\dfrac{e^z}{\sin z}$ の特異点と留数を求め、それが極である場合は位数も求めよ。

宿題 18. 留数計算により次の積分を実行せよ。

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

(ii) 自然数 $n \geq 2$ に対して、

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^n + 1} dx.$$

ヒント：扇型領域 $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$ の境界線での積分を考える。