CAL 2022/7/6

$\boxed{1}$

(i) $x=\pi/6$ の近くにおける $\sin x$ の２次近似式を求めよ。

(ii) $\sin 31^\circ$ の一次近似値を $\sin 30^\circ$ からのずれとして求め、それが $\sin 31^\circ$ より大きいか否かを２次近似式を利用して判定せよ。

(i) 次の通りであるが、$(x-\pi/6)^2$ を展開しては台なしで、近似式の意味が分かっていないと判定される。

$$\begin{aligned}\sin x &\approx \sin(\pi/6)+(x-\pi/6)\cos(\pi/6)-\frac{1}{2}(x-\pi/6)^2\sin(\pi/6)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6)-\frac{1}{4}(x-\pi/6)^2.\end{aligned}$$

(ii) $x=31^\circ=31\pi/180$ を一次近似式に代入すると、

$$\sin 31^\circ \approx \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=0.51511\cdots.$$

後半は、２次近似式を使って、

$$\sin 31^\circ-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}\approx -\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{(180)^2}\approx -0.000076\cdots$$

より、一次近似値は $\sin 31^\circ$ よりも大きい。

$\boxed{2}$ 基本関数のテイラー展開に関連した以下の問に答えよ。

(i) $(a+bt)\sqrt{1-t}$ の $t=0$ のまわりでのテイラー展開を t^2 の項まで求めよ。

(ii) 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(a+bx^2)\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

が存在するように実数 a,b を定め、その極限値を求めよ。

(i) べき関数のテイラー展開（ニュートン展開）を使うと、

$$\begin{aligned}(a+bt)\sqrt{1-t} &= (a+bt)(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2-\cdots) \\ &= a+bt-\frac{1}{2}(a+bt)t-\frac{1}{8}(a+bt)t^2-\cdots \\ &= a+(b-\frac{a}{2})t-(\frac{b}{2}+\frac{a}{8})t^2+\cdots .\end{aligned}$$

(ii) $\cos x$ のテイラー展開と (i) より、

$$\begin{aligned}\cos x-(a+bx^2)\sqrt{1-x^2} &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots-\left(a+(b-\frac{a}{2})x^2-(\frac{a}{8}+\frac{b}{2})x^4+\cdots\right) \\ &= 1-a-(\frac{1}{2}+b-\frac{a}{2})x^2+(\frac{1}{24}+\frac{a}{8}+\frac{b}{2})x^4+\cdots\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(a+bx^2)\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a-(\frac{1}{2}+b-\frac{a}{2})x^2+(\frac{1}{24}+\frac{a}{8}+\frac{b}{2})x^4}{x^4}$$

が存在するのは、$1-a=0=\frac{1}{2}+b-\frac{a}{2}$ すなわち、$a=1,\ b=0$ のときで、
その極限値は

$$\frac{1}{24}+\frac{a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{1}{6}.$$