CAL 2022/6/8

$\boxed{1}$

(i) 不定積分 $\int xe^{-x^2}\,dx$ を求めよ。

(ii) 不定積分 $\int x^3e^{-x^2}\,dx$ を求めよ。

(i) 変数変換 $t = x^2$ により、

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

(ii) 同じく変数変換 $t = x^2$ により、

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int te^{-t}\,dt.$$

一方、$(te^{-t})' = e^{-t} - te^{-t}$ を不定積分すると、

$$\int te^{-t}\,dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -te^{-t} - e^{-t}$$

より、

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}.$$

$\boxed{2}$ $a > 0$ とする。

(i) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ を利用して $1/\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を求めよ。

(ii) 微分 $(x\sqrt{a^2-x^2})'$ を利用して $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を求めよ。

(i) 変数変換 $x = at$ により、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}a\,dt = \arcsin t = \arcsin\frac{x}{a}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}(x\sqrt{a^2-x^2})' &= \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\end{aligned}$$

の不定積分と (i) より、

$$x\sqrt{a^2 - x^2} = 2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx - \arcsin\frac{x}{a}$$

となるので、

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + \arcsin\frac{x}{a}\right).$$