補題 12.2 (微分作用素の変数変換)**.**

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \frac{\partial y}{\partial u}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \frac{\partial y}{\partial v}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

である。これを、チルダを適宜省略して

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}$$

などと書くことが多い。

とくに、

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\right),$$
$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

となって (J は Jacobian を表す)、微分作用素 D に対して、$\widetilde{D}$ もまた微分作用素であることがわかる。

Proof. 最初の 2 つは、$\widetilde{f}$ に働かせてみるとわかるように、chain rule そのものである。

あとの 2 つは、これを $\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}$ と $\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}$ について解いたもので、具体的には次のように（チルダを省いた形で）計算する。$\partial/\partial x$ について解こうと思ったら、$\partial y/\partial v$, $\partial y/\partial u$ を左から掛け算作用させた等式

$$\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}$$

を辺ごとに引くと、$\partial/\partial y$ が消去され

$$\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x} = J\frac{\partial}{\partial x}$$

を得る。これに $1/J$ を掛け算作用素として左から掛けると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

がわかる。$\partial/\partial y$ についても同様。 □

注意 21. 上では素朴に連立一次方程式を解いたのであるが、組織的に計算するためには、出発点の等式を

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} = {}^t\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$$

と書き表わし（右辺の ^{t} は転置行列を表わす)、${}^t\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$ の逆行列（関数）を左から掛けることで

$${}^t\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$$

を得る。

例 12.3. 一次変換 $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$ の場合、$J = \alpha\delta - \beta\gamma$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \beta\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

を $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ について素朴に解けば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \gamma\frac{\partial}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J}\left(-\beta\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

を得る。

例 12.4. 2 次元極座標変換では、

$$\begin{aligned} \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\ \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

がわかる（左辺でチルダを省略した）。

問 128. 3 次元極座標変換

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

に対してラプラスの微分作用素 (Laplacian)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はどのように変換されるか。計算は少し手間ではあるが、偏微分計算のよい練習になる。

ヒント：3 次元極座標変換を円筒座標変換の合成として計算すると楽である。

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \\ z &= z \end{cases} \qquad \begin{cases} z = r\cos\theta, \\ \rho = r\sin\theta, \\ \varphi = \varphi \end{cases}.$$

前段から、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

これに、後段から得られる

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

を代入するとよい。