

1 定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の幾何学的意味は符号付き面積というものであるが、それ意外にも様々な解釈が可能である。

- (i) そのような実例を他に一つ挙げ、簡単に説明せよ。
- (ii) また、その解釈を使って解く定積分の問題を一つ作り、解答とともに記せ。

なお、ありきたりな解釈・問題にはそれなりの点数がつく。

解答例は略。

2 不定積分 $\int \frac{1+e^{2x}}{1+e^x} dx$ について、以下の問に答えよ。

- (i) 変数変換 $t = e^x$ により t についての積分に書き直せ。
- (ii) 不定積分を求めよ。

(i) $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t} dt$ であるから、

$$\int \frac{1+e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{1+t^2}{1+t} \frac{1}{t} dx.$$

(ii) 分子の次数を下げ、さらに部分分数に分解すると、

$$\frac{1+t^2}{(1+t)t} = \frac{(1+t)t+1-t}{(1+t)t} = 1 + \frac{1-t}{(1+t)t} = 1 + \frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}$$

となるので、

$$\int \frac{1+t^2}{1+t} \frac{1}{t} dx = \int dt + \int \frac{1}{t} dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt = t + \log t - 2 \log(t+1)$$

に $t = e^x$ を代入して、

$$\int \frac{1+e^{2x}}{1+e^x} dx = e^x + x - 2 \log(e^x + 1).$$