$\boxed{1}$ 関数 $y = x^n e^{-x}$ $(n = 1, 2)$ のグラフの概形を、極値・凹凸および遠方での様子に注意して描け。

$$y' = (x-n)x^{n-1}e^{-x}, \quad y'' = (x^2 - 2nx + n(n-1))x^{n-2}e^{-x}$$

となるので、$n = 1$ と $n = 2$ に分けて増減表を書き、さらに無限遠方での様子

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^{-x} = (-1)^n \infty$$

に注意してグラフを描きます。

$\boxed{2}$

(i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ のグラフの概形を描け。

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to-1+0}\int_t^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}$ となる実数 $-1 < c < 1$ を求めよ。

$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ に注意すれば、

$$\int_t^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\arcsin x\Big]_t^c = \arcsin c - \arcsin t$$

となるので、$\displaystyle\lim_{t\to-1+0} \arcsin t = \arcsin(-1) = -\pi/2$ を代入して、

$$\arcsin c + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} \iff \arcsin c = -\frac{\pi}{6}.$$

これから、$c = \sin(-\dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{1}{2}$ がわかる。