$\boxed{1}$

(i) パラメータ表示された滑らかな平面曲線 $(x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

によって計算できるのであるが、その根拠（数学的な証明までは求めていない）を簡単に説明せよ。

(ii) $x \arcsin x$ の微分を利用して、定積分

$$\int_{-1/2}^{0} \arcsin x\, dx$$

の値を求めよ。

(i) 速さを積分することで運動の道のりとして曲線の長さを求めている。
(ii)

$$(x \arcsin x)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

を積分して得られる

$$\Big[x \arcsin x\Big]_{-1/2}^{0} = \int_{-1/2}^{0} \arcsin x\, dx - \Big[\sqrt{1-x^2}\Big]_{-1/2}^{0}$$

を書き直して、

$$\int_{-1/2}^{0} \arcsin x\, dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}.$$

$\boxed{2}$

(i) 3 次式 $x^3 - x^2 + 2$ を実数の範囲で因数分解せよ。

(ii) 不定積分

$$\int \frac{x^3 - x^2 + \lambda x + 3}{x^3 - x^2 + 2}\, dx$$

の具体的な表式に arctan が出てこないように定数 λ を定め、その不定積分を求めよ。

(i) $x+1$ を因数に持つことが視察で（因数定理により）わかるので、

$$x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-x+1)-(x+1)(x-1)=(x+1)(x^2-2x+2).$$

$x^2-2x+2=0$ は実数解をもたないので、これが答えである。

(ii) $x^3-x^2+\lambda x+3$ を x^3-x^2+2 で割り算すると、

$$\frac{x^3-x^2+\lambda x+3}{x^3-x^2+2}=1+\frac{\lambda x+1}{x^3-x^2+2}$$

となるので、

$$\frac{\lambda x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)}=\frac{ax+b}{x^2-2x+2}+\frac{c}{x+1},$$
$$a=\frac{\lambda-1}{5},\quad b=\frac{2}{5}\lambda+\frac{3}{5},\quad c=\frac{1-\lambda}{5}$$

と部分分数に分解して、各項の積分を考えると、arctan が出てくるのは、

$$\frac{ax+b}{(x-1)^2+1}=\frac{a(x-1)}{(x-1)^2+1}+\frac{a+b}{(x-1)^2+1}$$

の第二項であるから、求める条件は、$a+b=0$ すなわち、$\lambda=-2/3$ である。そしてこのとき、求める不定積分は

$$\int dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{(x-1)^2+1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx=x-\frac{1}{6}\log(x^2-2x+2)+\frac{1}{3}\log|x+1|.$$