代数幾何学勉強会
ミラー対称性入門

高橋 篤史 (京大数理研)　述
（木原 康明 （名大多元数理） 記）

平成１７年度独立行政法人学術振興会科学研究費若手研究 (B)
課題研究番号 15740019
代表　伊藤由佳理

目 次

1 Introduction

簡単のため, compact Kähler manifold を考える.

$$\partial, \quad \bar{\partial}, \quad \partial^\dagger := -*\bar{\partial}*, \quad \bar{\partial}^\dagger := -*\partial*$$

この４つの作用素の役割を入れかえることで, いろいろ symmetry がある.

- $\partial \longleftrightarrow \bar{\partial}$ complex conjugate.
- $\partial \longleftrightarrow \bar{\partial}^\dagger$ Serre duality

  さらに次の入れかえを考える

- $\partial \longleftrightarrow \partial$ fix
- $\bar{\partial}^\dagger \longleftrightarrow \bar{\partial}^\dagger$ fix
- $\bar{\partial} \longleftrightarrow \partial^\dagger$.

これは一般的には symmetry ではない.

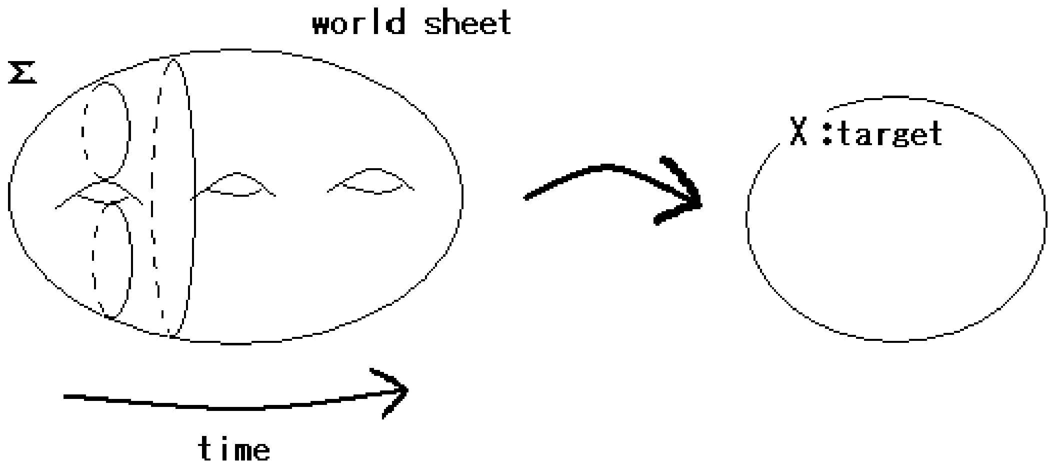
$\begin{pmatrix} \partial_M \\ \bar{\partial_M}^\dagger \\ \bar{\partial_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_W \\ \bar{\partial_W}^\dagger \\ \bar{\partial_W} \end{pmatrix}$ となるような (M, W) を考えられるか？

$\Longrightarrow$ Mirror symmetry.
80 年代後半に, string theory(弦理論) の研究で発見された.

注意 1.1. ただし, これはあくまで近似的な話であって, 一般的には $\partial, \bar{\partial}$ といった作用素に「量子補正」をする必要がある.

2 String theory

string theory とは, 点ではなく, 一次元の自由度を持つ弦が世界を記述するという考え方である.



リーマン面　　　　　　　　　　多様体

こういう写像を考える.

注意 2.1. Σ はクラインのつぼや, 開円板でもよい. それに従って興味深いことがいろいろ考えられる.

String theory を１つ考えるとは, $M'_X := \{f : \Sigma \to X \mid f$ は「ある条件」をみたす$\}$ という空間を考え, その商空間 $M_X := M'_X/\sim$ (ここで $\sim$ は「ある同値」), の上で交叉理論を考えるということ, つまり,

$$Z(\phi) := \int_{M_X} \mathcal{D}f\phi(f)e^{-S_x[\phi]} \qquad : \text{path integral}$$

を考える事である.
特に X を固定した時, X を target とする string theory, または string theory on X という.

数学的に理解しやすい String theory は３種類あって,　ここだけの記号ではあるが, それらを A, B, Het と書くことにする.
このとき, それぞれ

$$\begin{aligned} A &\Longleftrightarrow \text{Symplectic 幾何} \\ B &\Longleftrightarrow \text{複素幾何} \\ Het &\Longleftrightarrow \text{表現論} \end{aligned}$$

という対応関係がある.

これら３つの String theory は独立ではなく, 次のようなことがよくおこる

$$
\begin{tikzcd}
A \text{ on } X \arrow[rr, Leftrightarrow, "\text{等価}"] \arrow[dr, Leftrightarrow, "\text{等価}"'] & & B \text{ on } Y \arrow[dl, Leftrightarrow, "\text{等価}"] \\
& \text{Het on } Z &
\end{tikzcd}
$$

ただしここで, 2 つの String theory が等価であるとは, 交叉理論の間に同型があることとする.

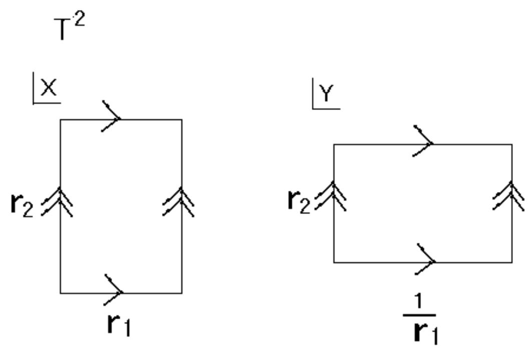
ミラー対称性とは,

$$\text{A on X} \overset{\text{等価}}{\Longleftrightarrow} \text{B on Y}$$

のことである.

両辺の物理量を見比べて, それから導かれる等式を考える. すると数学的に自明でない予想がいくつも現れる.

例 2.2.



A. 面積	$r_1 \cdot r_2$	$\frac{r_2}{r_1}$
B. 複素構造	$\frac{r_2}{r_1}$	$r_1 \cdot r_2$

片側の長さが逆数になっているようなトーラスを考える. 二つの長方形を取り替えることによって, 面積と複素構造の役割が逆転している. 別の書き方をすると,

$$
\begin{cases}
H^1(X, \Omega^1_X) \simeq H^1(Y, TY) \\
H^1(X, TX) \simeq H^1(Y, \Omega^1_Y)
\end{cases}
$$

が成り立っている.

3 Toward a Formulation of Mirror Symmetry

3.1 Problems

問題 3.1. 次はいずれも基本的な問題だが, 一般的に答えるのは非常に難しい.

1. X,Y として, 何をとればよいか？(X と Y をどの *category* で考えるのか.)
2. A *on* X, B *on* Y とは, X, Y に対して何を対応させることか？
3. X に対して, (X,Y) がミラー対となる Y を具体的に作ることができるか？

問題を制限すると, ある程度答えられるものもある.

3.2 Topological Mirror Symmetry

X, Y を Calabi-Yau n-fold, つまり標導束 Ω^n_X,Ω^n_Y が自明な複素多様体とする.

定義 3.2. このとき, (X,Y) が *topological mirror pair* （位相的ミラー対）

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \cdot H^q(X,\Omega_X) & \simeq H^q(Y,\bigwedge^p TY) \qquad for^\forall p,q \\ & \simeq H^q(Y,\Omega_Y^{n-p}) \\ \cdot H^q(X,\bigwedge^p TX) & \simeq H^q(Y,\Omega^p_Y). \end{cases}$$

’89 Candelas et. al. は, 約７千個の位相的ミラー対をなす Calabi-Yau 3-fold を見つけた.

4 Classical Mirror Symmetry

次に同型

$$\bigoplus_{p,q} H^q(X,\Omega^p_X) \overset{vect.sp}{\simeq} \bigoplus_{p,q}(H^q(Y,\bigwedge^p TY)$$

に着目する. 左辺には cup 積 $\bigcup$ により, 右辺には wedge 積 $\bigwedge$ により, それぞれ結合的代数の構造が入る.

問題 4.1.

$$(\bigoplus_{p,q} H^q(X,\Omega^p_X),\bigcup) \overset{vect.sp}{\simeq} (\bigoplus_{p,q}(H^q(Y,\bigwedge^p TY),\bigwedge),$$

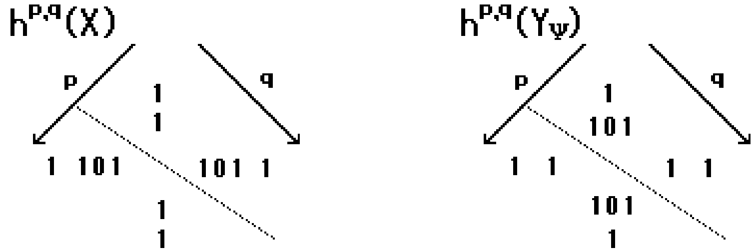
は *algebra isom.* か？

これは一般的には成り立たない. しかし, cup product を $\sharp\{f:\mathbb{P}^1 \xrightarrow{hol} X\}$ で変形すれば, algebra isom. になると考えられた.

以下では, quintic を例にとって, もう少し詳しく説明する.

例 4.2. *Calabi-Yau 3-fold* としてまず考え付くのは, $\mathbb{P}^4$ の中の５次式が定める零点集合 $X := \{5\text{ 次式} = 0\} \subset \mathbb{P}^4$ であろう. その位相的ミラー多様体は $Y_\psi := \widehat{\{x_1^5+\ldots+x_5^5-5\psi x_1\cdots x_5=0\}/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3}$ ($\widehat{\quad}$: *a crepant resolution*) で与えられる. この構成法は *Greene-Plesser* の *orbifold construction* と呼ばれる.

今の場合ホッジ数を $h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p)$ と書き，それを「ダイヤモンド」状に並べた時，



となることが，簡単な計算でわかる．ちょうど上図の点線で「ミラー対称」な形になっており，$\bigoplus_{p,q} H^q(X, \Omega_X^p) \overset{vect.sp}{\simeq} \bigoplus_{p,q} H^q(Y, \bigwedge^p TY)$ が成り立つことがわかる．

4.1 Quantum Cohomology Ring

次に cup 積の「量子補正」を行おう．すなわち quantum cohomology 環を定義する．前野氏のノートも参照されたい．

M_X を定義する時に用いた「ある条件」とは，今の場合，リーマン面から target への写像として安定写像のみを考える，ということである．

定義 4.3. $f : \Sigma \overset{hol}{\longrightarrow} X$ が *stable* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Σ は高々通常特異点をもつ連結で被約な曲線で，$Aut(f : \Sigma \longrightarrow X)$ が有限群となるもの．

$\overline{M}_{0,0}(X, \beta), (\beta \in H_2(X, \mathbb{Z}))$ を stable map の moduli (stack) とする．

定理 4.4. (*Behrend-Manin*)
$\overline{M}_{0,0}(X, \beta)$ は *smooth proper DM stack.* つまり *orbifold* である．

この空間の接空間の次元を計算すると，

$$\begin{aligned} v\dim_{\mathbb{C}} \overline{M}_{0,0}(X, \beta) &= \dim_C H^0(\Sigma, f^*TX) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Sigma, f^*TX) \\ &\quad - \dim_{\mathbb{C}} X - 3 + \int_\beta c_1(X) \\ &= 0 \qquad (\mathrm{Calabi-Yau\ \ 3-fold}) \quad \text{となる．} \end{aligned}$$

したがって，$[\overline{M}_{0,0}(X, \beta)]^{virt} \in H_{v\dim_C \overline{M}_{0,0}(X,\beta)}(\overline{M}_{0,0}(X, \beta), \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ なので，$[\overline{M}_{0,0}(X, \beta)]^{virt}$ を有理数と思うことによって，写像の数を数え上げる事が出来る．$N_\beta := [\overline{M}_{0,0}(X, \beta)]^{virt} \in \mathbb{Q}$ とおく．直感的に言えば，N_β は安定写像を自己同型付きで数え上げたもの，すなわち

$$N_\beta \text{"} = \text{"} \sum_{\substack{f:\Sigma \to X \\ f_*([\Sigma]) = \beta}} \frac{1}{\mathrm{Aut}(f)}$$

である.

$F_X := \sum_{\beta \in H_2(X,Z)} N_\beta q^\beta \in \mathbb{C}[[q]]$ 　という母関数を考え, F_X の $q\frac{d}{dq}$ による三階微分を積の構造定数とすることで, quantum cohomology 環の構造が, $\bigoplus_p H^p(X, \Omega_X^p)$ に入る. 簡単な考察から, 変数 q を 0 にしたとき, quantum cohomology 環の積は cup 積になることがわかる.

4.2 Picard-Fuchs Equation and Classical Mirror Theorem

次に Y_ψ の periods がみたす方程式を考える. 微分方程式 (Picard-Fuchs equation)

$$[(z\frac{d}{dz})^4 - 5z(5z\frac{d}{dz}+1)(5z\frac{d}{dz}+2)(5z\frac{d}{dz}+3)(5z\frac{d}{dz}+4)]\Pi = 0, \quad z := \psi^{-5},$$

の解 $\Pi = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ で, $\omega_i \sim \frac{1}{i!}(\log z)^i \quad z \sim 0$ となるものをとる.

次の定理は, '91 Candelas et. al. において「物理的証明」が与えられていたが, 数学的には Gromov-Witten 不変量の理論および quantum cohomology の基礎が構築された後, Givental によって証明された.

定理 4.5. (*'95 Givental*)

$$F_X(q) = \frac{\omega_1\omega_2 - \omega_0\omega_3}{\omega_0^2}.$$

ただし $q = \exp(\frac{\omega_1}{\omega_0})$.

この定理を用いると, 先のベクトル空間の同型が環の同型となることが示される.

系 4.6.

$$(\bigoplus_p H^p(X, \Omega_X^p), \bigcup_{quantum}) \overset{alg}{\simeq} (\bigoplus_p H^p(Y_\psi, \bigwedge^p TY_\psi), \bigwedge).$$

5 Homologycal Mirror Symmetry

5.1 Motivation

問題 5.1. *Mirror Symmetry* が存在する「理由」を説明せよ.

symplectic 幾何サイドと複素幾何サイドで似たものがいろいろある.

Symplectic		Complex
(M, ω)	$\longleftrightarrow$	(W, Ω)

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\quad c_1(W)=0 \\ Sp(2n,\mathbb{R}) \overset{homotopic}{\longrightarrow} U(N) \overset{homotopic}{\longleftarrow} GL(n,\mathbb{C}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^2(M,\mathbb{R}) & \text{1st order} & H^1(W,TW) \\ \text{un obstructed} & \text{deformation} & \text{un obstructed} \end{array}$$

$$(\bigoplus_{p,q} H^q(M,\Omega_M^p), \bigcup_{quantum}) \overset{alg}{\simeq} (\bigoplus_{p,q} H^q(W, \bigwedge^p TW), \bigwedge)$$

似ているということの「究極的」表現 $\Longrightarrow$ Category の同値（同型）.

これが Homological Mirror Symmetry (HMS) の基本的アイデアである. (Kontsevich '94) 現在では Fukaya - Oh - Ohta - Ono による Floer homology を用いて, HMS は数学の予想となった（はず）.

予想 5.2. *X を Calabi-Yau n-fold とする. このとき三角圏の同値*

$$D^bFuk(X) \simeq D^bcoh(Y)$$

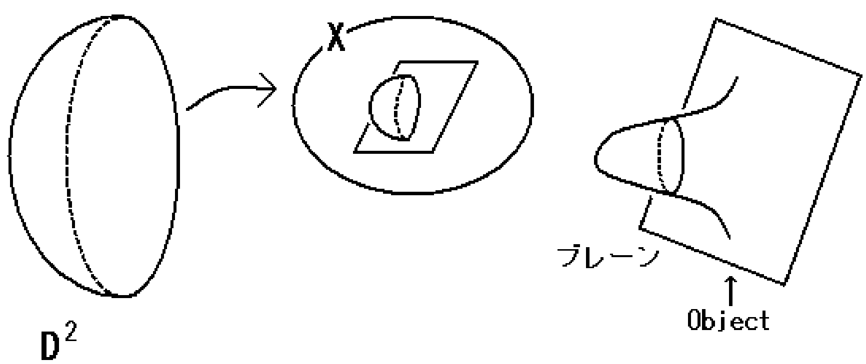
が成り立つような Calabi-Yau n-fold Y が存在する.

問題 5.3. *HMS $\Longrightarrow$ CMS ? つまり (X,Y) : HMS pair $\Longrightarrow$ (X,Y) : CMS pair?*

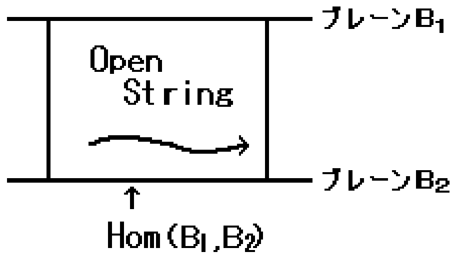
これは正しいと思われている. 二つの圏それぞれの Hochschild cohomology から, $(\bigoplus_{p,q} H^q(M,\Omega_M^p), \bigcup_{quantum}) \overset{alg}{\simeq} (\bigoplus_{p,q} H^q(W, \bigwedge^p TW), \bigwedge)$ が出ると考えられている. 難しいのは, たとえば $HH^*(D^bcoh(X)) \overset{vect}{\simeq} \bigoplus_{p,q} H^q(X, \bigwedge^p TX)$ は環同型か?という問題である.

5.2 Physical Background

ブレーンの考え方.



このようなブレーンを object, ブレーンの間に飛ぶ open string を homomorphism, とする category を考える.



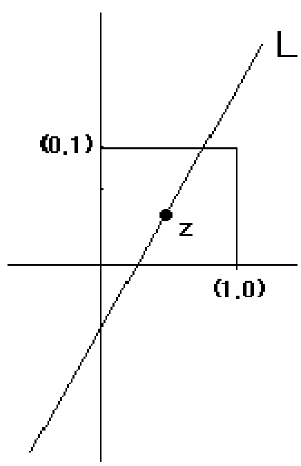
とくに, open string と open string がぶつかってどうなるかという相互作用則を homomorphism の「合成則」として設定する．結果として (weak) A_∞-category が自然に現れ, その導来圏として三角圏が登場する.

5.3 HMS for T^2

定理 5.4. (*Fukaya, Polischuk - Zaslow*)
2 次元トーラス T^2 に対しては, *Homological Mirror Symmetry* 予想は正しい*.*

$$ob(D^b(Fuk(T^2, dz \wedge d\bar{z}))) = \{(L, \mathcal{L}) \mid \text{L : affine Lagrangian },\ \mathcal{L} \to L : \text{linebdle (flat)} \}$$

これを絵で書くと,



傾き (p, q)　　$p, q \in F$
$\mathcal{L}$　　　　$z \in T^2$

$$(p, q; z) \longleftrightarrow \mathcal{E}(L, \mathcal{L}) \text{ ;vector bdle}$$
$$\text{rank} = \text{p}$$
$$\deg = q$$
$$[\det] = z \in Pic^q(T^2)$$

例えば,

$$(1,0;0) \longleftrightarrow \mathcal{O} \ \text{構造層}$$
$$(0,1,0) \longleftrightarrow \mathcal{O}_0 \quad \text{摩天楼層}.$$

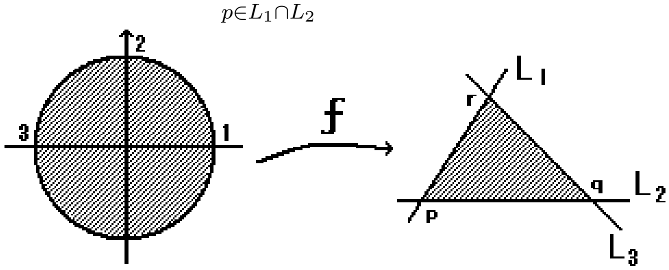
という対応がある. 問題となるのは

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}((L_1,\mathcal{L}_1),(L_2,\mathcal{L}_2)) \otimes \mathrm{Hom}((L_2,\mathcal{L}_2),(L_3,\mathcal{L}_3)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}((L_1,\mathcal{L}_1),(L_3,\mathcal{L}_3)) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}(\mathcal{E}_{L_1},\mathcal{E}_{L_2}) \otimes (\mathrm{Ext}(\mathcal{E}_{L_2},\mathcal{E}_{L_3})) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(\mathcal{E}_{L_1},\mathcal{E}_{L_3})
\end{tikzcd}$$

が可換となるかということである.

これはどうやって示したらいいかというと, テータ関数の和の公式を用いる.

$Hom(L_1, L_2) = \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \mathbb{C}[p]$, $\qquad [p] \leftrightarrow$ テータ関数



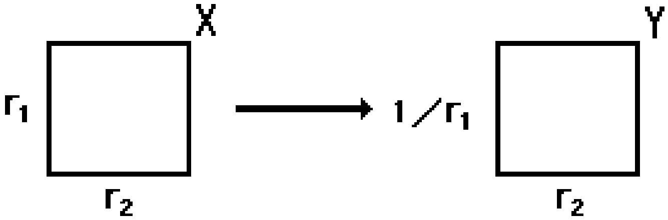
$$f(1) = p$$
$$f(2) = q$$
$$f(3) = r$$

$[p]$,$[q]$ の積を $[p] \cdot [q] = \sum_{f: D^2 \to T^2} \pm e^{2\pi\sqrt{-1} vol f(D^2)} [r]$ という形でもって定義する.

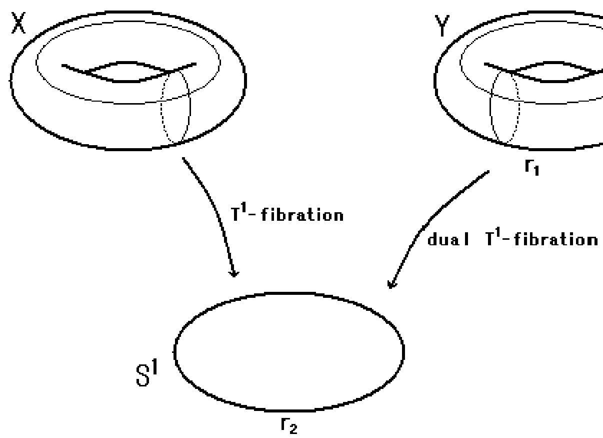
6 Geometric Mirror Symmetry

とくに話をする予定はなかったのであるが, 加藤氏のリクエストにより, 少し幾何学的ミラー対称性に触れることにする. 詳しい話および参考文献は加藤氏のノートを参照していただきたい.

T^2 のとき



これはどういうことかというと,



この現象は単に偶然ではない！

予想 6.1. (*Strominger - Yau - Zaslow*)
(X, Y) を *HMS pair* $(\dim_{\mathbb{C}} X = n)$ とする．このとき，
$^{\exists}B$: *real n- fold s.t.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "T^n\text{-}fib"'] & & Y \arrow[dl, "(T^n)^\vee\text{-}fib"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

つまり, 同じ base space B 上互いに双対なトーラスファイバー空間の構造をもっているということが期待される.

注意 6.2. X, Y はそれぞれ *symplectic, complex* モジュライにおける「良い」*limit point* (*quintic* の例では $z \sim 0$) の十分近くにあるとする.

7 References

この「ミラー対称性入門」で述べたことをすべて含み, かつ数学者の立場から容易に読むことのできる, ミラー対称性の入門的もしくは専門的書籍は, （高橋の知る限り）現在のところありません. そこで, 思いつきをそのまま参考文献として挙げておく事にします. ですので, 重要な文献で触れていないものも多くあることに注意してください.

まずは解説記事をお勧めします

(1) 小木曽 啓示 著, 物理学者キャンデラスからの贈り物, 数学セミナー 1992 年 5 月号.
(2) 小木曽 啓示 著, カラビ-ヤウ多様体とミラー現象, 数学セミナー 1994 年 7 月号.
(3) 細野 忍 著, ミラー対称性, 数学セミナー 1997 年 8 月号.
(4) 細野 忍 著, ミラー対称性, 数学セミナー 1999 年 5 月号.
(5) 小林 正典 著, ミラー対称性予想, 数学セミナー 1999 年 5 月号.

(6) 中島 啓 著, 微分幾何学の未来, 数理科学 2001 年 2 月号.
(7) B. Greene, エレガントな宇宙, 草思社 2001 年 12 月.
(8) 大栗 博司 著, 物理の立場から：超弦理論からの展望, 数学セミナー 2002 年 3 月号.
(9) 深谷 賢治 著, 数学の立場から：回想と妄想, 数学セミナー 2002 年 3 月号.
(10) 高橋 篤史 著, ミラー対称性, 数学セミナー 2002 年 3 月号.
(11) 深谷 賢治 著, 夢を見るために, 数学のたのしみ 30 2002 年 3 月.
(12) 桂 利行 著, 数理物理の新展開 —代数幾何の登場—, 別冊・数理科学 現代物理と現代幾何.
(13) 齋藤 政彦 著, 場の理論と代数幾何, 別冊・数理科学 現代物理と現代幾何.
(14) 高橋 篤史 著, 超弦理論と幾何学, 別冊・数理科学 現代物理と現代幾何.
(15) 細野 忍 著, 弦理論とミラー対称性の幾何学, 別冊・数理科学 現代数理物理の展開.
(16) 小林 正典 著, ミラー対称性とトーリック多様体, 数学セミナー 2004 年 3 月号.

解説記事だけでは物足りない方は

(17) 深谷 賢治 著, シンプレクティック幾何学, 岩波講座現代数学の発展, 1999 年.
(18) 細野 忍 著, ミラー対称性, 数学 第 51 巻 第 3 号 1999 年.
(19) C. Voisin, Mirror Symmetry, (SMF/AMS TEXTS VOL.1) 1999.
(20) D. Cox and S. Katz, Mirror Symmetry and Algebraic Geometry (SURVEYS VOL.68) 2000.
(21) K. Hori et al, Mirror Symmetry, (CLAY MONO VOL.1) 2003.

さらに深く理解するために

(22) S.-T. Yau (ed), Mirror Symmetry I, (AMS/IP VOL.9) 1998.
(23) B. Greene and S.-T. Yau (ed), Mirror Symmetry II, (AMS/IP VOL.1) 2001.
(24) M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa, Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes, Commun. Math. Phys. 165 (1994) 311 - 428.
(25) M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, Proc. of ICM'94 (Zurich).