有限 Chevalley 群の表現論と複素鏡映群

庄司 俊明
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1. 始めに

$GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標表の一部は, Kostka 多項式によって記述できる. それが, Green が対称関数を使った組合わせ論的な議論で $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標表を決定した時の根拠となった事実であった. $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の指標表の一部もやはり, 組合せ論的に記述できる. そこに使われるのは, Weyl 群の既約指標に関する情報と, 分割の概念の拡張である「symbol」に関する組合せ論的な議論である. そこでは群 $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ そのものは表に出て来ない. Sp_{2n} の Weyl 群は, C_n 型 Weyl 群 $W \simeq S_n \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ である. その自然な拡張として複素鏡映群 $G(e,1,n) = S_n \ltimes (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})^n$ (e は任意の自然数) が考えられる. 我々は, $G(e,1,n)$ を仮想的な群 $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ の Weyl 群と思うことにする. 最近 10 年位の間に複素鏡映群を Weyl 群として持つ仮想的な群 (Broué は spetsial group と呼んでいる) の表現論的な性質が色々調べられている. $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ もその一つである. 私は $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ をエキゾチックな古典群と名付けて楽しんでいる. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ や, $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の指標表 (の一部) を記述するのに使われる道具は, すべて $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ に対しても意味を持つ. それで, 今の所それ以上の意味付けはできないが、こうして得られる正方行列を $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ の指標表 (の一部) と呼んでしまおうというのがこの話の趣旨である.

2. 有限群の指標表

有限群 H から行列群 $GL(V)$ への準同型写像 $\rho : H \to GL(V)$ の性質を調べるのが表現論である. V が $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, すなわち $GL(V) \simeq GL_n(\mathbf{C})$ の場合 (H の通常表現と呼ばれる) が基本的である. 表現 ρ に対し, $h \mapsto \mathrm{Tr}\,(\rho(h))$ で定まる H 上の関数を ρ の指標という. 指標は共役類の上で一定値を取る関数, すなわち H の類関数になる. H の表現は既約表現の直和に分解するので既約表現の分類が重要である. 既約表現の指標を既約指標という. 既約表現を同値を除いて分類することと既約指標を分類することは同値になる. H の既約指標の個数は共役類の個数と一致するので, H の既約指標を $\chi_1, \dots, \chi_r$, H の共役類を $c_1, \dots, c_r$ とすると, 正方行列 $X = (\chi_i(c_j))$ が得られる. X を H の指標表という. 例えば H が 3 次対称群 S_3 の場合, 共役類は単位元 c_1, 互換 $(1,2)$ を含む c_2, 巡回置換 $(1,2,3)$ を含む c_3 の 3 種類, 既約指標は, 単位指標 χ_1, 符号指標 χ_2 と鏡映指標 χ_3 の 3 種であり, 指標表は次のようになる.

	c_1	c_2	c_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

指標表が決まれば, 既約指標がすべて決定されたことになる. そこで指標表の決定が表現論の目標になる.

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて有限群の表現論の基礎を作った Frobenius は 1900 年頃対称群 S_n の指標表を決定した. この場合指標表の決定とは, S_n の既約指標の値を計算する統一的なアルゴリズムを与えることに他ならない. S_n の共役類と既約指標はともに n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ でラベル付けられる. ただし自然数の列 $\lambda \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ で $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$ となる λ を n の分割という. n の分割全体の集合を $\mathcal{P}_n$ と表す. S_n の共役類の巡回置換分解が n の分割を与える. $n = 3$ の場合, $c_1 \leftrightarrow (111)$, $c_2 \leftrightarrow (21)$, $c_3 \leftrightarrow (3)$ である. Frobenius は各分割 λ に対する既約指標 χ^λ を組合せ論的に構成し, その値を決定したのだった. $n = 3$ の場合, $\chi_1 = \chi^{(3)}$, $\chi_2 = \chi^{(21)}$, $\chi_3 = \chi^{(111)}$ となっている.

3. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標

$\mathbf{F}_q$ を標数 p の有限体とする. $GL_n(\mathbf{C})$ や $SL_n(\mathbf{C})$ などの行列群の係数 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{F}_q$ でおきかえると有限群 $GL_n(\mathbf{F}_q)$ や $SL_n(\mathbf{F}_q)$ が得られる. 一般に複素簡約 Lie 群の有限体での類似物として得られる有限群を有限簡約群という. 有限簡約群の既約指標の決定は興味深い問題である. この問題に対する最初のアプローチは Frobenius による $SL_2(\mathbf{F}_q)$ の指標表の決定である. その後, 1955 年 Green が高度の組合せ論と, それまでに得られた表現論の成果を駆使して $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標を完全に決定した. 以下に $GL_2(\mathbf{F}_q)$ の指標表を載せておく.

	z^i	$z^i u$	$z^i a^j$	b^k
σ_l	ζ^{2li}	ζ^{2li}	$\zeta^{l(2i+j)}$	ζ^{lk}
$\sigma_l \otimes \mathrm{St}$	$\zeta^{2li} q$	0	$\zeta^{l(2i+j)}$	$-\zeta^{lk}$
R_{lm}	$\zeta^{2li}(q+1)$	ζ^{2li}	$\zeta^{2li}(\zeta^{mj} + \zeta^{-mj})$	0
R'_n	$\zeta^{ni}(q-1)$	$-\zeta^{ni}$	0	$\xi^{nk} + \xi^{-nk}$

ここで, ω を $\mathbf{F}_q$ の乗法群 $\mathbf{F}_q^* \simeq \mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$ の生成元として

$$z = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置いた. b は $b^{q+1}=z$ を満たすある元である. また, σ_l $(0 \le l < q-1)$ は一次指標, St は Steinberg 指標と呼ばれる次数 q の指標である. さらに ξ は1の原始 q^2-1 乗根, $\zeta = \xi^{q+1}$ となっている. 特に巾単共役類は, 1 と u を含むクラスの２種類である. 既約指標として 単位指標 σ_0 と Steinberg 指標 St を取ると, その部分の指標表は次のような簡明な形になる.

	1	u
σ_0	1	1
St	q	0

この例は簡単すぎてあまり適当でないが、一般の $GL_n(\mathbf{F}_q)$ では次のような状況に対応している. $G(\mathbf{F}_q) = GL_n(\mathbf{F}_q)$ とおく. $B(\mathbf{F}_q)$ を上半3角行列全体のなす $G(\mathbf{F}_q)$ の部分群 (Borel 部分群) とし, 誘導表現 $V = \mathrm{Ind}_{B(\mathbf{F}_q)}^{G(\mathbf{F}_q)} 1$ を考える. V の既約表現への分解は, 自己準同型環 $\mathcal{E} = \mathrm{End}_{G(\mathbf{F}_q)} V$ により記述される. $W \simeq S_n$ を $G(\mathbf{F}_q)$ の Weyl 群とするとき, $\mathcal{E}$ は W の群環 $\mathbf{C}[W]$ と同型になり, したがって V に現われる既約表現は S_n の既約指標によってラベル付けられる. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する $G(\mathbf{F}_q)$ の既約指標を ρ_λ と表す. $G(\mathbf{F}_q)$ の巾単共役類は Jordan 標準形により $\mathcal{P}_n$ と1対1に対応する. $\mu \in \mathcal{P}_n$ に対応する巾単類の代表元を u_μ と表す.

$$X_0 = (\rho_\lambda(u_\mu))_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n} \tag{1}$$

を $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標表 X のうち, $\rho_\lambda(u_\mu)$ から得られる部分とする. $n=2$ の場合が前に述べた表になる. 実際 $\mathcal{P}_2 = \{(11),(2)\}$ であり, $\rho_{(2)} = \sigma_0, \rho_{(11)} = St$, $u_{(11)} = 1, u_{(2)} = u$ である.

4. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数と Kostka 多項式

Green により, 行列 X_0 は対称関数の理論を使って組み合せ論的に記述できることが知られている ([M]). 無限個の変数 $x: x_1, x_2, \ldots$ を用意して Schur 関数 $s_\lambda(x)$, 巾和対称関数 $p_\lambda(x)$ を考える. Frobenius の公式により S_n の既約指標は Schur 関数と巾和対称関数の変換行列として表される.

$$p_\mu(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \chi^\lambda(w_\mu) s_\lambda(x)$$

ここに w_μ は μ に対応する S_n の共役類の代表元を表す. Schur 関数のパラメータ t による拡張版として Hall-Littlewood 関数 $P_\lambda(x;t)$ が定義され, Schur 関数との間の変換行列として Koskta 多項式 $K_{\lambda\mu}(t)$ が定義される.

$$s_\mu(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} K_{\lambda\mu}(t) P_\lambda(x;t)$$

ここで $\mathcal{P}_n$ の半順序 $\mu \le \lambda$ を次のように定義する; 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ の後ろの部分に (必要なら) 0 を補って $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n$ と表す．$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ に対して $\mu_1 + \cdots + \mu_k \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ が $k = 1, \ldots, n$ に対して成り立つとき $\mu \le \lambda$. 代数群 $GL_n(\overline{\mathbf{F}}_q)$ における, λ に対応する巾単類 C_λ の閉包 $\overline{C}_\lambda$ に関する包含関係 $\overline{C}_\mu \subset \overline{C}_\lambda$ が $\mu \le \lambda$ と同値であることに注意する．さらに $n(\lambda) = \sum_{i=1}^n (i-1)\lambda_i$ により自然数 $n(\lambda)$ を定義する．

$K_{\lambda\mu}(t)$ は次の性質をみたす. $\mu \le \lambda$ でないとき $K_{\lambda\mu}(t) = 0$, また $\mu \le \lambda$ のとき, $K_{\lambda\mu}(t)$ は次数 $n(\mu) - n(\lambda)$ の $\mathbf{Z}$ 係数の多項式になる．ここで $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(t) = t^{n(\mu)} K_{\lambda\mu}(t^{-1})$ とおくと $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(t) \in \mathbf{Z}[t]$ になる．$\widetilde{K}_{\lambda\mu}(t)$ を変形 Kostka 多項式という．$\widetilde{K}(t) = (\widetilde{K}_{\lambda\mu}(t))_{\lambda,\mu}$ とおいて $\mathcal{P}_n$ を添字集合とする行列を考える．上に述べたことから, $\mathcal{P}_n$ の全順序を半順序 $\mu \le \lambda$ とマッチするように選べば, $\widetilde{K}(t)$ は $\lambda\lambda$ 成分が $t^{n(\lambda)}$ に等しい下 3 角行列になることが分かる．このとき $\rho_\lambda(u_\mu) = \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q)$, すなわち次式が成立する．

$$X_0 = \widetilde{K}(q) \tag{2}$$

なお, Green によって導入された Green 関数 (Green 多項式) $Q^\lambda_\mu(t)$ は次で与えられる．

$$Q^\lambda_\mu(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_n} \chi^\nu(w_\mu) \widetilde{K}_{\lambda\nu}(t).$$

この式で, λ, μ, ν はすべて n の分割であるが, その意味する所は異なっていることに注意する．μ は S_n の共役類, ν は S_n の既約指標を表し, λ は $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の共役類を表現しているのである．

5. 変形 Kostka 多項式の決定

4 節に述べたことから, 行列 X_0 を決定するには変形 Kostka 多項式 $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(t)$ が計算できればよいことになる．実は以下に述べるように $\widetilde{K}(t)$ を計算する統一的なアルゴリズムが存在する．$V \simeq \mathbf{R}^{n-1}$ を $W = S_n$ の鏡映表現とし $R = S(V^*)/I_+$ を W の余不変式環とする．ここに I_+ は 0 次でない W 不変斉次多項式で生成される $S(V^*)$ の両側イデアルである．R は有限次元 $\mathbf{R}$ 代数であり, 自然に次数付き環 $R = \bigoplus_i R_i$ の構造を持つ．$P_W(t) = \sum_{i \ge 0} (\dim R_i) t^i$ を W の Poincaré 多項式という．W の類関数 f に対して,

$$R(f) = (t-1)^n P_W(t) |W|^{-1} \sum_{w \in W} \frac{\det_V(w) f(w)}{\det_V(t \cdot \mathrm{Id} - w)} \tag{3}$$

とおく．$\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対し, $\omega_{\lambda,\mu} = t^N R(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu \otimes \det_V)$ とおき, 行列 $\Omega(t) = (\omega_{\lambda,\mu})$ を定義する．ただし, $N = n(n-1)/2$. $\Omega(t)$ は, W の既約指標と, 余不変式環の情報のみによって定まることに注意する．

さて, 行列 $\widetilde{K}(t)$ は次の行列関係式をみたすことが示される.

$$\widetilde{K}(t)B(t)\,{}^t\widetilde{K}(t) = \Omega(t). \tag{4}$$

ここで, $B(t)$ は正則な対角行列になる. ${}^t\widetilde{K}(t)$ は $\widetilde{K}(t)$ の転置行列である. (4) 式を, $\Omega(t)$ を既知, $\widetilde{K}(t), B(t)$ を未知の行列とする行列方程式とみなす. すると前に述べた $\widetilde{K}(t)$ の性質 (3 角性) より, 行列 $\widetilde{K}(t), B(t)$ が一意的に決定されることが分かる. 特に, $B(t)$ の $\lambda\lambda$ 成分は $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の巾単類 $C_\lambda(\mathbf{F}_q)$ の元の個数 (q を t に変えたもの) に一致する. 以上が Kostka 多項式を計算するアルゴリズムである.

6. 有限簡約群の巾単指標と概指標

Green の結果を他の群に拡張する試みはなかなか成功しなかったが, 1976 年に Deligne と Lusztig が有限簡約群の表現論に l 進コホモロジーの理論を持ち込んだことにより, ブレイク・スルーが実現する. その成果をもとに Lusztig は 1980 年代に有限簡約群の既約表現の分類を完成させた ([L1]).

以下では, 古典群 $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の場合に $GL_n(\mathbf{F}_q)$ と同様の問題を考えたい. $G(\mathbf{F}_q) = Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ とおく. 2 節と同様に Borel 部分群からの誘導表現 $\mathrm{Ind}_{B(\mathbf{F}_q)}^{G(\mathbf{F}_q)} 1$ に含まれる既約表現は Weyl 群の既約指標でラベル付けられる. W の既約指標の集合を $W^\wedge$ とおく. $\chi \in W^\wedge$ に対応する既約表現を ρ_χ と表す. しかし種々の理由からこれらの指標だけを考えるのは適当でない. もう少し枠を広げて, $G(\mathbf{F}_q)$ の巾単指標の巾単類での値を考えることにする.

後の議論のために一般論を少し準備しておこう. G を $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結代数群, $F : G \to G$ を対応する Frobenius 写像する. $G^F = G(\mathbf{F}_q)$ である. G の F 不変な極大トーラス T と, T^F の 1 次指標 θ に対して Deligne-Lusztig の一般指標 $R_T(\theta)$ が定義される. ある $R_T(1)$ ($\theta = 1$ の場合) の分解に現われる G^F の既約指標を巾単指標という. 前に述べた $\mathrm{Ind}_{B(\mathbf{F}_q)}^{G(\mathbf{F}_q)} 1$ の分解に現われる既約指標はすべて巾単指標である. しかし, GL_n の場合を除いてもっと多くの巾単指標がある. $T \subset B$ を F 不変な極大トーラスと F 不変な Borel 部分群の組とし $W = N_G(T)/T$ を G の Weyl 群とする. 以下, G^F は有限 Chevalley 群, すなわち F は W に自明に作用すると仮定する. このとき, G の F 不変な極大トーラスの G^F 共役類は W の共役類と 1 対 1 に対応する. $w \in W$ に対応する極大トーラスを T_w と表す. $\chi \in W^\wedge$ に対し

$$R_\chi = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \chi(w) R_{T_w}(1)$$

とおく. $C(G^F)$ を G^F の類関数の全体のなす線形空間, $C(G^F)_1$ を巾単指標の全体で張られる部分空間とする. $G = GL_n$ の場合, R_χ は既約指標 ρ_χ に一致する. しかし一般に R_χ は $C(G^F)_1$ の正規直交系を与えるが指標にはならない.

Lusztig は巾単指標を分類する過程で, $\{R_\chi \mid \chi \in W^\wedge\}$ を拡張して, $C(G^F)_1$ の正規直交基底 $\{R_z \mid z \in Z_W\}$ を定義した．ただし, Z_W は巾単指標のパラメータ集合で (実際巾単指標の分類は W のみで定まる), 巾単指標を ρ_z $(z \in Z_W)$ と表す．R_z を ρ_z に付随した (巾単) 概指標という．

Lusztig 予想により, R_z は G の指標層の特性関数に (スカラー倍を除いて) 一致する．Lusztig 予想は筆者 [S1] により, G の中心が連結な場合に証明された．しかし巾単概指標については、中心が連結な群に埋め込むことにより, この仮定なしで成立する．

$R_{T_w}(1)$ を巾単元の集合 G^F_{uni} に制限して出来る G^F_{uni} 上の G^F 不変な関数を Green 関数といい, Q_{T_w} と表す． また, R_χ の G^F_{uni} への制限を Q_χ と表す．$G = GL_n$ の場合, $Q_{T_{w_\mu}}(u_\lambda) = Q^\lambda_\mu(q)$, $Q_{\chi^\mu}(u_\lambda) = \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q)$ となっている．

7. $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の巾単指標と symbol

以後, $G = Sp_{2n}$, $p \neq 2$ と仮定する．$G^F = Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ は有限 Chevalley 群である．G^F の巾単指標を記述するために, Lusztig は symbol の概念を導入した ([L1])．$\widetilde{Z}$ を $\Lambda = \binom{S}{T}$, $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $T = \{\mu_1, \dots, \mu_{m'}\}$ $\lambda_i, \mu_j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ となるものの集合とする．$\widetilde{Z}$ をシフト作用: $\binom{S}{T} \mapsto \binom{0\cup(S+1)}{0\cup(T+1)}$, 例えば, $\binom{1\ 2}{1} \mapsto \binom{0\ 2\ 3}{0\ 2}$, により同一視したものを Z とし, Z の元を symbol という．$\Lambda = \binom{S}{T}$ に対し, $|S| - |T|$ を symbolΛ の defect という．Z に次のようにして同値関係 $\Lambda \sim \Lambda'$ を入れる; 適当な代表元 $\Lambda = \binom{S}{T}, \Lambda' = \binom{S'}{T'}$ に対し $S \cup T = S' \cup T'$, $S \cap T = S' \cap T'$ の時, $\Lambda \sim \Lambda'$. すなわち, 適当な代表元に対して, Λ と Λ' が重複度まで含めて同じ成分からできているとき, $\Lambda \sim \Lambda'$ とするのである．例えば, $\binom{1\ 2}{0} \sim \binom{0\ 2}{1}$. この同値類を symbol の族という．$\mathcal{F}$ を defect が奇数の symbol の族とする．$\mathcal{F}$ は次の性質をみたす, 唯ひとつの defect 1 の symbol $\Lambda_{\mathcal{F}} = \binom{S}{T}$ を含む; $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}\}$, $T = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ であって

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \mu_m \leq \lambda_{m+1}.$$

$\Lambda_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ に付随した special symbol という. 奇数 defect の symbol Λ に対し, Λ のランク rk Λ を次のように定義する. $\Lambda \sim \Lambda' = \binom{S}{T}$ を special symbol とする. このとき

$$\mathrm{rk}\ \Lambda = \sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j - m^2.$$

奇数 $d \geq 1$ に対し, defect d, rank n の symbol の集合を Φ^d_n とおき $\Phi_n = \coprod_{d \geq 1:\mathrm{odd}} \Phi^d_n$ とおく.

$G = Sp_{2n}$ の Weyl 群 W は C_n 型 Weyl 群であり, $W \simeq S_n \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ である. 今, $\mathcal{P}_{n,2}$ を $|\alpha| + |\beta| = n$ をみたす分割 α', α'' の組 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha'; \alpha'')$ の集合とする. ただし, α が k の分割の時, $|\alpha| = k$ と表す. すると, W の既約指標の集合 $W^\wedge$ は $\mathcal{P}_{n,2}$ と 1 対 1 に対応する. $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対応する W の既約指標を $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ と

表す. さて, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha'; \alpha'') \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対し, 必要なら適当に 0 を補って

$$\alpha' : \alpha'_1 \le \cdots \le \alpha'_{m+1}, \quad \alpha'' : \alpha''_1 \le \cdots \le \alpha''_m$$

と表す. $\Lambda_0 = \binom{0\ 1\ \cdots\ m}{0\ 1\ \cdots\ m-1}$ とおいて, $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}) = \binom{\alpha'}{\alpha''} + \Lambda_0$ (各成分ごとの和) とおく. すると $\Lambda(\boldsymbol{\alpha})$ は defect 1, rank n の symbol になり, $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \Lambda(\boldsymbol{\alpha})$ が $W^\wedge$ と Φ^1_n との間の全単射を与える.

Lusztig は $G = Sp_{2n}$ の巾単指標が Φ_n でレベル付けられることを示した. $\Lambda \in \Phi_n$ に対応する巾単指標を ρ_Λ と表す. 以下に $n = 2$, すなわち $G = SP_4$ の場合の例を示す.

$$\mathcal{P}_{n,2} = \{(2; -), \quad (11; 0), \quad (01; 1), \quad (000; 11), \quad (00; 2)\}$$

$\Phi_2 = \Phi^1_2 \coprod \Phi^3_2$ であって,

$$\Phi^1_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Phi^3_2 = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2 \\ - \end{pmatrix}$$

また, symbol の族は, 次の 3 個からなる.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2 \\ 1\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}$$

対応する巾単指標は $\{\rho_\Lambda \mid \Lambda \in \Phi^1_2\} \cup \{\rho_\Lambda \mid \Lambda \in \Phi^3_2\}$ であって、前半分が $\Phi^1_2 \simeq W^\wedge$ のもとに $\{\rho_\chi \mid \chi \in W^\wedge\}$ に一致し, 最後の ρ_Λ が cuspidal 巾単指標に対応する.

一方, 族 $\mathcal{F} \subset \Phi_n$ に対し, 非退化な pairing $\{\ ,\ \} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbf{Q}$ が symbol の言葉で定義される. $\mathcal{F} \ne \mathcal{F}'$ ならば $\{\Lambda, \Lambda'\} = 0$ $(\Lambda \in \mathcal{F}, \Lambda' \in \mathcal{F}')$ として Φ_n の pairing に拡張する. symbol $\Lambda \in \Phi_n$ に対して

$$R_\Lambda = \sum_{\Lambda' \in \Phi_n} \{\Lambda, \Lambda'\} \rho_{\Lambda'} \tag{5}$$

により ρ_Λ に付随する概指標 R_Λ が定義される. $\Phi^1_n \simeq W^\wedge$, $\Lambda \leftrightarrow \chi$ のもとに, $R_\Lambda = R_\chi$ となっている.

8. $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数と巾単 symbol

Lusztig [L3] により, $G = Sp_{2n}$ の指標層の特性関数がいつ巾単元の上で 0 になるかは調べられている. そこで Lusztig 予想を概指標 R_Λ に適用して次が分かる. 以下では $q \equiv 1 \pmod 4$ と仮定する.

$$R_\Lambda|_{G^F_{\mathrm{uni}}} = \begin{cases} 0 & \Lambda \notin \Phi^1_n \text{ の場合}, \\ Q_\chi & \Lambda \in \Phi^1_n \text{ の場合}. \end{cases}$$

ただし, $\Phi_n^1 \simeq W^\wedge$, $\Lambda \leftrightarrow \chi$ である.

そこで, Q_χ が計算できればよいが, Green 関数を計算する統一的なアルゴリズムが知られている. それを説明するために少し準備をする. C を G の巾単類, $u \in C^F$ とする. $A_G(u) = Z_G(u)/Z_G^0(u)$ とおく. $A_G(u)$ は $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$ の形の有限アーベル群になる. C^F の G^F 共役類は $A_G(u)$ の元と 1 対 1 に対応する. $a \in A_G(u)$ に対応する G^F 共役類の代表元を $u_a \in C^F$ と表す. 各 $\xi \in A_G(u)^\wedge$ に対し, G_{uni}^F 上の関数 $Y_{u,\xi}$ を

$$Y_{u,\xi}(x) = \begin{cases} \xi(a) & x \text{ が } u_a \text{ に } G^F \text{ 共役の場合} , \\ 0 & x \notin C^F \text{ の場合} \end{cases}$$

により定義する. $\mathcal{N}_G$ をすべての 組 (u,ξ)(の G 共役類) の集合とし, $C(G_{\mathrm{uni}}^F)$ を G_{uni}^F に台を持つ G^F の類関数のなす線形空間とする. すると, $\{Y_{u,\xi} \mid (u,\xi) \in \mathcal{N}_G\}$ は $C(G_{\mathrm{uni}}^F)$ の基底になる. Green 関数決定のアルゴリズムとは $Q_\chi \in C(G_{\mathrm{uni}}^F)$ を $Y_{u,\xi}$ の線形結合で表した時の, 係数を定めるアルゴリズムであり, Weyl 群の Springer 対応と呼ばれる自然な単射 $W^\wedge \to \mathcal{N}_G$ と深く関係している. $G = GL_n$ の場合には, 全単射 $\chi^\lambda \to u_\lambda$ が Springer 対応を与えるが, Sp_{2n} の場合は, はるかに複雑になる. Lusztig は Sp_{2n} の Springer 対応を記述するために, 巾単 symbol の概念を導入した ([L2]). 巾単 symbol は, 7 節の symbol の類似であり, $\Lambda = \binom{S}{T}$, $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}\}$, $T = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ において, 条件として $\lambda_i \in \{0,1,2,\dots\}$, $\mu_j \in \{1,2,\dots\}$, かつ

$$\lambda_i + 2 \le \lambda_{i+1}, \quad \mu_j + 2 \le \mu_{j+1}$$

を付け加えたものである. つまり巾単 symbol の各行に現われる数列は, 隣り合った数との差が常に 2 以上になっている. 巾単 symbol の族や defect も同様に定義できる. rank も適当に定義され rank n, defect d の巾単 symbol の集合を Ψ_n^d と表す. $\Lambda^0 = \binom{0\ 2\ \cdots\ 2m}{1\ 3\ \cdots\ 2m-1}$ とおいて $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha'; \alpha'') \mapsto \boldsymbol{\alpha} + \Lambda^0$ により全単射 $W^\wedge \to \Psi_n^1$ が得られる. $\Psi_n = \coprod_{d:\mathrm{odd}} \Psi_n^d$ とおく (d は負の値も取る). Lusztig は集合 $\mathcal{N}_G$ と Ψ_n との間に自然な全単射の存在することを示した. そこでは, 巾単 symbol の族が G の巾単共役類と 1 対 1 に対応する.

$n=2$ の場合の例をあげておく. $\Psi_n = \Psi_n^1$ であり, 7 節の $\mathcal{P}_{n,2}$ に対応して

$$\Psi_2^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 2\ 4 \\ 2\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

巾単 symbol の族は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 2\ 4 \\ 2\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

各巾単 symbol Λ に対して自然数 $a(\Lambda)$ を次のように定義する.

$$a(\Lambda) = \sum_{\substack{\lambda,\lambda' \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda'}} \min\{\lambda, \lambda'\} - \sum_{\substack{\mu,\mu' \in \Lambda^0 \\ \mu \neq \mu'}} \min\{\mu, \mu'\}.$$

$a(\Lambda)$ は巾単 symbol に関して $n(\lambda)$ の役割を果たす関数であり, 各族の上で一定値を取る. さらに $W^\wedge \simeq \Psi_n^1$ により, $\mathcal{P}_{n,2}$ を Ψ_n^1 と同一視することにより, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して $a(\boldsymbol{\alpha})$ が定義できる.

$\mathcal{N}_G \simeq \Psi_n$, $(u,\xi) \leftrightarrow \Lambda$ のもとに, $Y_{u,\xi} = Y_\Lambda$ と表す. Q_χ を Y_Λ の線形結合で表した時, $\Lambda \in \Psi_n^1$ のみが表れることが知られている. そこで, Q_χ の決定は, $\Psi_n^1 \times W^\wedge$ を添字集合に持つ正方行列 P の決定に帰着する. ところで行列 P の決定に関しては, GL_n の場合のような対称関数による記述が存在する ([S2]). そこでは分割の概念が symbol で置き換えられるのである. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha'; \alpha'') \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して, Schur 関数 $s_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ が定義される; ここでは無限個の変数 x を $x^{(1)}$: $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots$ と $x^{(2)} : x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots$ を取り, Schur 関数 $s_{\alpha'}(x^{(1)})$ と $s_{\alpha''}(x^{(2)})$ の積として $s_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ を定義する. さらに, 巾単 symbol $\Lambda \in \Psi_n^1$ に対して, Hall-Littlewood 関数 $P_\Lambda(x;t)$ が定義され, その変換行列として Kostka 関数 $K_{\Lambda,\boldsymbol{\alpha}}(t)$ が定義される.

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \sum_{\Lambda \in \Psi_n^1} K_{\Lambda,\boldsymbol{\alpha}}(t) P_\Lambda(x;t).$$

そこで変形 Kostak 関数を $\widetilde{K}_{\Lambda,\boldsymbol{\alpha}}(t) = t^{a(\boldsymbol{\alpha})} K_{\Lambda,\boldsymbol{\alpha}}(t^{-1})$ により定義し, $\widetilde{K}(t) = (\widetilde{K}_{\Lambda,\boldsymbol{\alpha}}(t))$ により, $\Psi_n^1 \times \mathcal{P}_{n,2}$ を添字集合とする行列 $\widetilde{K}(t)$ を考える. このとき, $P = \widetilde{K}(q)$ が成立する. 一方, $\widetilde{K}(t)$ は, (4) と同様の行列関係式をみたし, そこから, GL_n の場合と同様の方法によって計算される; Ψ_n^1 に G の巾単類の閉包の包含関係と両立する全順序を入れ, (巾単 symbol の族が巾単類と対応することに注意) $\widetilde{K}(t)$ を族に対応する区分けの行列と思う. すると $\widetilde{K}(t)$ は区分け行列として下 3 角行列になり, また $B(t)$ は区分けの意味で対角行列になる. これらのことから $\widetilde{K}(t)$ が定まる.

さて我々の興味は $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の指標表のうち, 巾単指標 ρ_Λ の巾単類 u_a での値 $X_0 = (\rho_\Lambda(u_a))$ である. 今までの議論から Q_χ は Y_Λ の線形結合で表される. ここで $Y_{u,a}$ を u_a を含む G^F の共役類の特性関数とする.

$$Y_{u,a}(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は } u_a \text{ と } G^F \text{ 共役}, \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

指標表を得るには, Y_Λ を $Y_{u,a}$ の線形結合で表す必要がある. $Y_\Lambda = Y_{u,\xi}$ であるから,

$$Y_{u,\xi} = \sum_{a \in A_G(u)} \xi(a) Y_{u,a}. \tag{6}$$

(6) 式により, $Y_{u,a}$ は巾単 symbol により定義された pairing により, Y_Λ から得られることに注意する.

以上の議論をまとめると, 行列 X_0 は次のように記述できることが分かる. $\mathcal{F}(\Phi_n)$ を ρ_Λ と R_Λ との間の ($\Phi_n \times \Phi_n$ を添字集合とする) 変換行列, $\mathcal{F}(\Psi_n)$ を $Y_{u,a}$ と y_Λ との間の ($\Psi_n \times \Psi_n$ を添字集合とする) 変換行列とする. このとき,

$$X_0 = \mathcal{F}(\Phi_n)^{-1} Z_n \mathcal{F}(\Psi_n) \tag{7}$$

と表される. ただし, Z_n は $\Phi_n \times \Psi_n$ を添字集合とする行列であり, $\Phi_n^1 \times \Psi_n^1$ 以外の成分は 0, $\Phi_n^1 \times \Psi_n^1$ に対応する正方行列は $\widetilde{K}(t)$ により与えられる.

9. $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ の指標表

(7) 式を記述するのに使われるのは, Weyl 群の既約指標に関する情報と, symbol, 巾単 symbol に関する組合せ論的な議論である. Sp_{2n} の Weyl 群は $W \simeq S_n \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ である. その拡張として, 複素鏡映群 $G(e,1,n) = S_n \ltimes (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})^n$ を考える. $\mathcal{P}_{n,e}$ を e 個の分割の組 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(e)})$ で $\sum_{i=1}^{e} |\alpha^{(i)}| = n$ となるもの全体の集合とする. $W = G(e,1,n)$ の既約指標は $\mathcal{P}_{n,e}$ でラベル付けされる. 一方, symbol や 巾単 symbol の行を 2 行から e 行に変えることにより, e-symbol, 巾単 e-symbol が定義でき, rank n, defect 1 の e-symbol や 巾単 e-symbol の集合は $\mathcal{P}_{n,e}$ と全単射になる. ところで, 一般に有限簡約群の巾単指標の分類とその次数の決定は, 対応する Hecke 環の情報で完全に定まる. $G(e,1,n)$ も対応する Hecke 環, Ariki-Koike 代数を持つので, 巾単指標が定まる. Malle [Ma] は巾単指標が e-symbol によってラベル付けられることを示し, 対応する概指標も構成した (e-symbol の Fourier 変換). したがって (7) 式の $\mathcal{F}(\Phi_n)$ の部分は $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ に対しても意味を持つ. 一方, (7) 式の Z_n の部分は, Green 関数 (Kostka 関数) に関する部分であるが、Hall-Littlewood 関数, Kostka 関数は, すべて巾単 e-symbol に対して構成でき, 同様のアルゴリズムによって $\widetilde{K}(t)$ が計算できる ([S2]). 最後に $\mathcal{F}(\Psi_n)$ の部分であるが, 巾単 e-symbol を使って関数 Y_Λ は構成できる. しかし共役類が存在しないから $Y_{u,a}$ に対応するものはない. この関数は Y_Λ の線形結合として, 巾単 symbol の pairing を用いて形式的に構成することになる. いずれにしろ, $\mathcal{F}(\Psi_n)$ も巾単 e-symbol を使って定義することができる (巾単 e-symbol の Fourier 変換). 以上により, (7) 式 の X_0 の表示の類似物を $Sp_{en}(\mathbf{F}_q)$ に対しても構成することができる.

References

[L1] G. Lusztig; Characters of reductive groups over a finite field, Annals of Math. Studies **107**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1984.

[L2] G. Lusztig; Intersection cohomology complexes on a reductive group, Invent. Math. **75** (1984), 205–272.

[L3] G. Lusztig, On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements, J. of Algebra, **104** (1986), 146–194.

[M] I.G. Macdonald; Symmetric functions and Hall Polynomials, second edition. Clarendon Press. Oxford 1995.

[Ma] G. Malle; Unipotent Grade imprimitiver komplexer Spiegelungsgruppen, J. Algebra, **177** (1995), 768–826.

[S1] T. Shoji, Character sheaves and almost characters of reductive groups, Adv. in Math. **111** (1995), 244 - 313, II, Adv. in Math. **111** (1995), 314 - 354.

[S2] T. Shoji; Green functions associated to complex reflection groups. J. Algebra. 245, (2001), 650 - 694.