

# EXPANDING (3+1)-DIMENSIONAL UNIVERSE FROM A MATRIX MODEL FOR SUPERSTRINGS

土屋麻人 (静岡大学)

第五回超弦理論と宇宙@別府望海 2012年2月22日

Sang-Woo Kim氏と西村淳氏との共同研究

PRL **108**, 011601 (2012), arXiv:1108.1540



序

# 宇宙に関する問い

1. なぜ、3+1次元なのか？
  2. 特異点はどのように避けられているか？
  3. インフレーション， ダークエネルギー
  4. ....
- 超弦理論でこれらの問いに答える

# String cosmology

- 多くの知見が string cosmology. によって得られている
- String gas cosmology    Brandenberger & Vafa ('89)
- de Sitter vacuumの実現    Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi ('03), ....
- D-brane inflation    Herdeiro-Hirano-Kalosh ('01), .....
- warped D-brane inflation  
Kachru-Kalosh-Linde-Maldacena-McAllister-Trivedi ('03), .....
- Moduli inflation    Conlon-Quevedo ('05), .....

# String cosmology (続き)

## 無数の真空

理論的に許される真空が無数にある

(3+1)次元以外の高次元、低次元の時空も許される。

(9+1)-dimensions  $\longrightarrow$  (n+1)-dimensions  $n=0, 1, \dots, 9$

## 宇宙の始まりの特異点

Liu-Moore-Seiberg ('02), .....

一般には摂動論は特異点の問題を解決できない

非摂動効果が宇宙の始まりにおいては重要

# 行列模型

非摂動的定式化を用いて、真の真空を唯一のものとして決定し、特異点の問題も解決できる可能性はある

弦の場の理論

行列模型

IIB matrix model

Ishibashi-Kawai-Kitazawa-A.T. ('96)

0D

Matrix theory

Banks-Fischler-Shenker-Susskind ('96)

1D

Matrix string theory

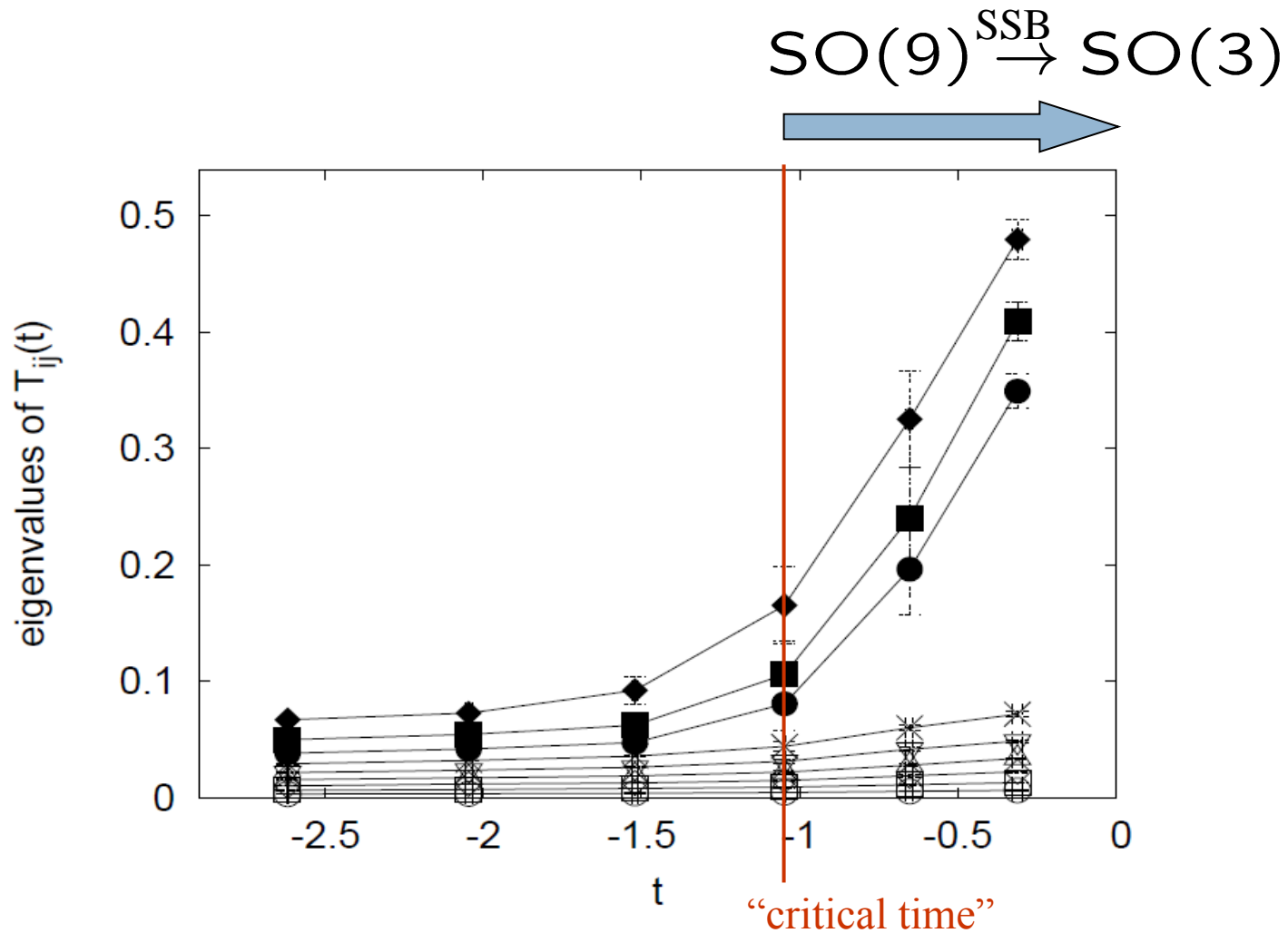
Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde ('97)

2D

10D  
U(N)  
SYM

IIB matrix modelを使って、宇宙に関する問いに答えようとする  
“Lorentzian” がここでは鍵になる

# 主要な結果



# 行列模型を宇宙論に応用する試み

## □ Matrix cosmology in Matrix theory

膨張解(古典解)の研究

Freedman-Gibbons-Schnabl ('05)

## □ Matrix big bang in matrix string theory Craps-Sethi-Verlinde ('05)

ホログラフィーの基づいて特異点の解消を議論

## □ IIB matrix modelで非可換幾何から得られるemergent gravityを

用いた宇宙論

Steinacker ('11), Yang ('10)

モンテカルロシミュレーションに基づく解析はfully quantum mechanical



# 目次

1. 序
2. IIB matrix model
3. Lorentzian modelの定義
4. Lorentzian modelの解析
5. 古典解
6. まとめと展望



# IIB matrix model

# IIB matrix model

$$S = -\frac{1}{g^2} \text{tr} \left( \frac{1}{4} [A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\mu [A_\mu, \Psi] \right)$$

10D U(N) SYMを0次元に次元還元することにより得られる

$A_\mu$  と  $\Psi$  について同次式

$N \times N$  エルミート行列

$A_\mu$  : 10D Lorentz vector ( $\mu = 0, 1, \dots, 9$ )

$\Psi$  : 10D Majorana-Weyl spinor

ラージ  $N$  極限をとる

時空はアприオリに存在しない、ダイナミカルに生成される

Cf.) Matrix theoryとmatrix string theoryでは時間を与えられている

明白なSO(9,1)対称性, 共変的

Cf.) Matrix theoryとmatrix string theoryは光円錐

# 超弦理論の非摂動的定式化である証拠

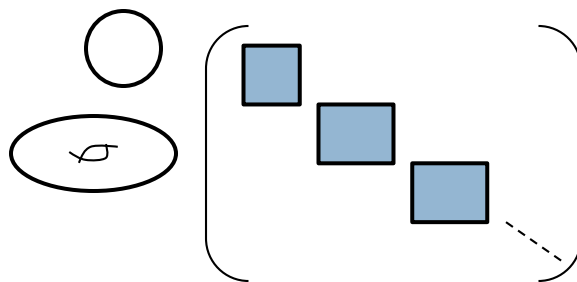
## 1. タイプIIB超弦理論のShild型作用の行列正則化

$$S = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( \frac{1}{4} \{X_\mu(\sigma), X_\nu(\sigma)\}^2 - \frac{i}{2} \bar{\psi}(\sigma) \Gamma^\mu \{X_\mu(\sigma), \psi(\sigma)\} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_\mu(\sigma) \rightarrow A_\mu \\ \psi(\sigma) \rightarrow \Psi \\ \{, \} \rightarrow -i[ , ] \\ \int d^2\sigma \sqrt{g} \rightarrow \text{tr} \end{array} \right.$$



IIB matrix model



2<sup>nd</sup>  
quantized

2.

**10D N=2 SUSY**

$$\{\bar{\epsilon}_1 Q^{(i)}, \bar{\epsilon}_2 Q^{(j)}\}_{A_\mu} = -2\delta^{ij} \bar{\epsilon}_1 \Gamma_\mu \epsilon_2 \mathbf{1}_{N \times N}$$

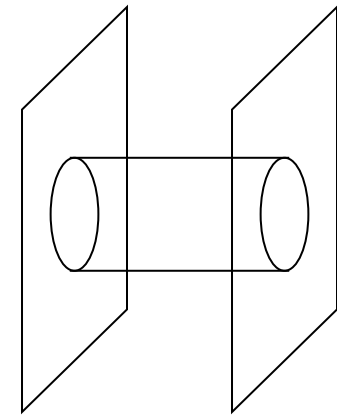
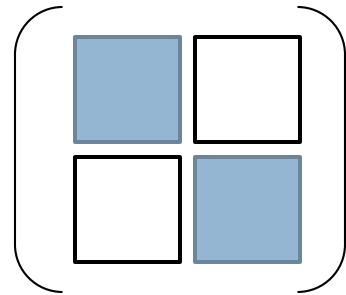


$A_\mu$  : coordinates

10D N=2 SUSYは模型が重力を含むことを強く示唆する

# 超弦理論の非摂動的定式化である証拠 (続き)

## 3. タイプIIB超弦理論におけるD-brane間の相互作用を正しく再現

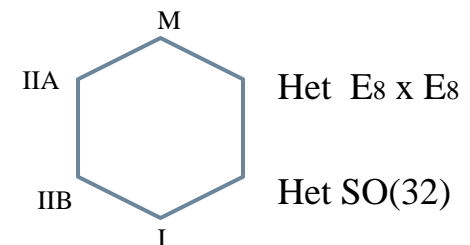


## 4. ループ方程式 $\longrightarrow$ タイプIIB超弦理論の光円錐の弦の場の理論

$$\text{tr} P \exp \left[ i \int k^\mu(\sigma) A_\mu \right] \sim \Psi[k(\cdot)]$$

Fukuma-Kawai-Kitazawa-A.T. ('97)

## 5. 超弦理論の双対性



# Euclidean vs Lorentzian

## Wick回転

$$A_0 = iA_{10} \quad \Gamma^0 = -i\Gamma_{10}$$



## Euclidean model

明白なSO(10) symmetry

### 1) bosonic action

$$S_b = \frac{1}{4g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu})^2 \quad F_{\mu\nu} = -i[A_\mu, A_\nu]$$

#### ➤ Euclidean model

正定値

$[A_\mu, A_\nu] = 0$  で与えられる古典的なflat directionは量子効果により持ち上がる



カットオフなしでwell-defined

Krauth-Nicolai-Staudacher ('98)

Austing-Wheater ('01)

#### ➤ Lorentzian model

$$S_b = \frac{1}{4g^2} \text{tr}(\underbrace{-2(F_{0i})^2 + (F_{ij})^2}_{\text{逆符号, unbounded!}})$$

逆符号, unbounded!



非摂動的にLorentzian model  
を調べる人はいなかった

# Euclidean vs Lorentzian (続き)

## 2) Pfaffian

$$\text{Pf}\mathcal{M}(A) = \int d\Psi \exp\left(\frac{1}{2g^2} \text{tr}(\bar{\Psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \Psi])\right)$$

- Euclidean model      複素      ➡      符号問題
- Lorentzian model      実      ➡      符号問題なし  
good news

## 3) Definition of path integral

- Euclidean model       $Z = \int dAd\Psi e^{-S} = \int dAe^{-S_b} \text{Pf}\mathcal{M}(A)$

- Lorentzian model

$$Z = \int dAd\Psi e^{iS} = \int dAe^{iS_b} \text{Pf}\mathcal{M}(A)$$

Lorentzian worldsheet       $\sigma_2 = i\sigma^0$

$S_b = 0$  (非自明) が支配的 ➡ 経路積分はカットオフなしでは定義されない  
➡ カットオフの導入

符号問題はないことが明らかになる！

# Euclidean modelにおける時空

4次元のユークリッド的時空が現れるか？

同時対角化可能な配位  $[A_\mu, A_\nu] = 0$  が好まれる



10  $N \times N$  エルミート行列

$$(A_\mu)_{ij} = (x_i)_\mu \delta_{ij} + (a_\mu)_{ij}$$

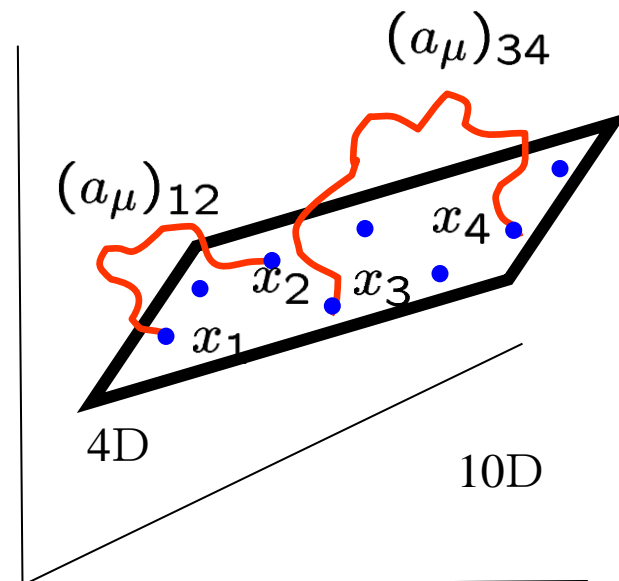
$$\mu = 1, \dots, 10$$

$$i, j = 1, \dots, N$$

$(x_\mu)_i$  に対する低エネルギー有効理論  
~ branched polymer

Aoki-Iso-Kawai-Kitazawa-Tada ('99)

SO(10) からSO(4)へのSSB





# なぜLorentzian modelか？

- 宇宙論において時空の実時間のダイナミクスを調べる必要がある
- 重力の理論では平坦な時空上の場の理論の場合とは対照的に  
Wick回転が自明ではない

ex.) causal dynamical triangulation (CDT) Ambjorn-Jurkiewicz-Loll ('05)

- ガウス展開法による最近の結果 Nishimura-Okubo-Sugino ('11)  
3次元の時空の生成を示唆

ここではLorentzian IIB matrix modelを調べる

# Lorentzian modelの定義

# 時間方向のIRカットオフ

Lorentzian modelを正則化する

(1) 時間方向のIRカットオフ

$$\frac{1}{N} \text{tr}(A_0)^2 \leq \kappa \frac{1}{N} \text{tr}(A_i)^2$$

スケール変換のもとで不変

$$A_\mu \rightarrow \rho A_\mu$$

# Extracting the scale factor

振動する積分を正則化

$$Z = \int dA e^{iS_b} \underbrace{e^{-\epsilon|S_b|}}_{\text{convergence factor}} \text{Pf} \mathcal{M}(A)$$

経路積分の後  $\epsilon \rightarrow 0$  極限をとる

$$Z = \int dA \int_0^\infty dr \delta\left(\frac{1}{N} \text{tr}(A_i)^2 - r\right) e^{iS_b - \epsilon|S_b|} \text{Pf} \mathcal{M}$$

1を挿入

変数のリスケーリング  $A_\mu \rightarrow r^{\frac{1}{2}} A_\mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_b \rightarrow r^2 S_b \\ \text{Pf} \mathcal{M}(A) \rightarrow r^{\frac{8}{2}(N^2-1)} \text{Pf} \mathcal{M}(A) \\ dA \rightarrow r^{\frac{10}{2}(N^2-1)} dA \\ \text{拘束 (1) は不変} \end{array} \right.$$

# IR cutoff in the spatial direction

$r$  積分を先に実行

$$\int_0^\infty dr r^{\frac{18}{2}(N^2-1)-1} e^{r^2(iS_b - \epsilon|S_b|)} \propto \frac{1}{|S_b|^{\frac{18}{4}(N^2-1)}}$$

$S_b = 0$  で発散

この発散を次の拘束でおさえる

(2) 空間方向のIRカットオフ

$$\frac{1}{N} \text{tr}(A_i)^2 \leq L^2$$

$$\int_0^{L^2} dr r^{\frac{18}{2}(N^2-1)-1} e^{r^2(iS_b - \epsilon|S_b|)} \longrightarrow f(S_b)$$

十分大きな  $L$  と  $N$  に対して

$f(x) : x = 0$  に鋭いピークを持つ関数

# 考えるモデル

次のモデルに至る

$$Z = \int dA f \left( \frac{1}{N} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right) \text{Pf} \mathcal{M}(A) \\ \times \delta \left( \frac{1}{N} \text{tr}(A_i)^2 - 1 \right) \theta \left( \kappa - \frac{1}{N} \text{tr}(A_0)^2 \right)$$

- Euclidean modelとは違って符号問題がない  
    ➡ モンテカルロシミュレーションは易しい
- この単純化はスケール因子 $r$  について先に積分することによりおこった これは作用が同次式であるから可能  
    cf.) Matrix theory
- 時間がアприオリには存在しないことが、時間発展の解析を単純化した

# Lorentzian modelの解析

# 時間のダイナミカルな生成

$A_0$  の固有値～時間

SUSYのおかげで、固有値分布は $\kappa \rightarrow \infty$  でスムーズに広がる  
～ 時間のダイナミカルな生成

Cf.) bosonic model

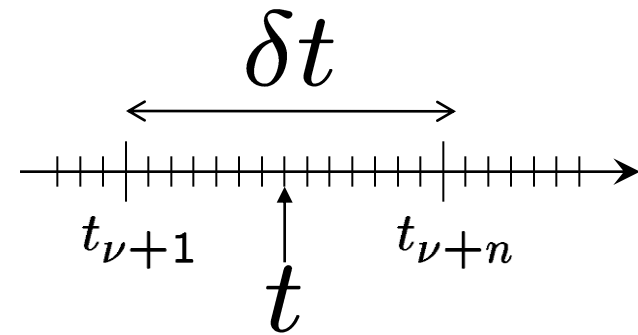
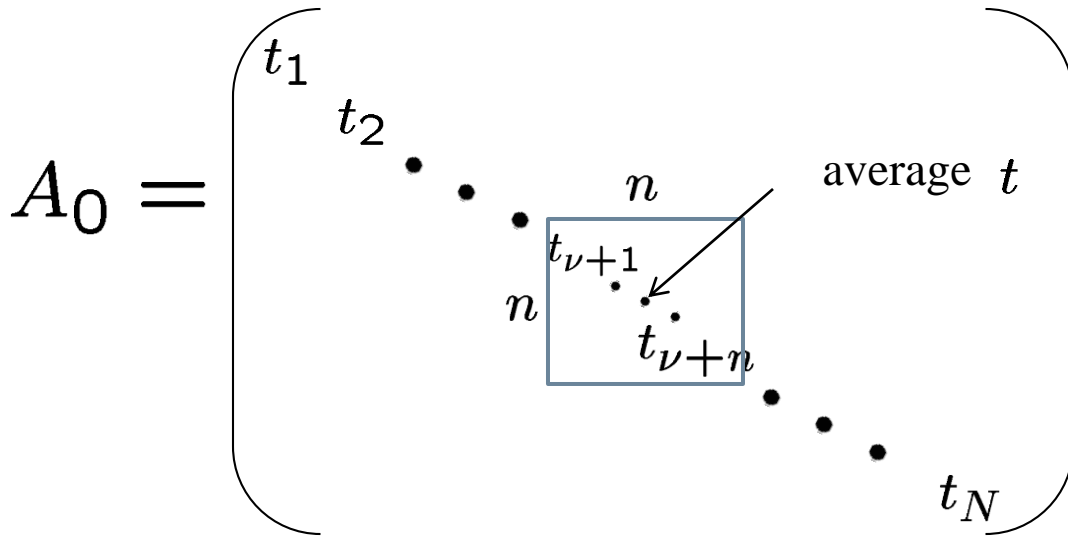
$A_0$  の固有値はお互いに引き合う

➡ 固有値分布は $\kappa \rightarrow \infty$  極限でも有限  
の広がりしかもたない

SUSYが時間の生成に重要な役割を果たしている

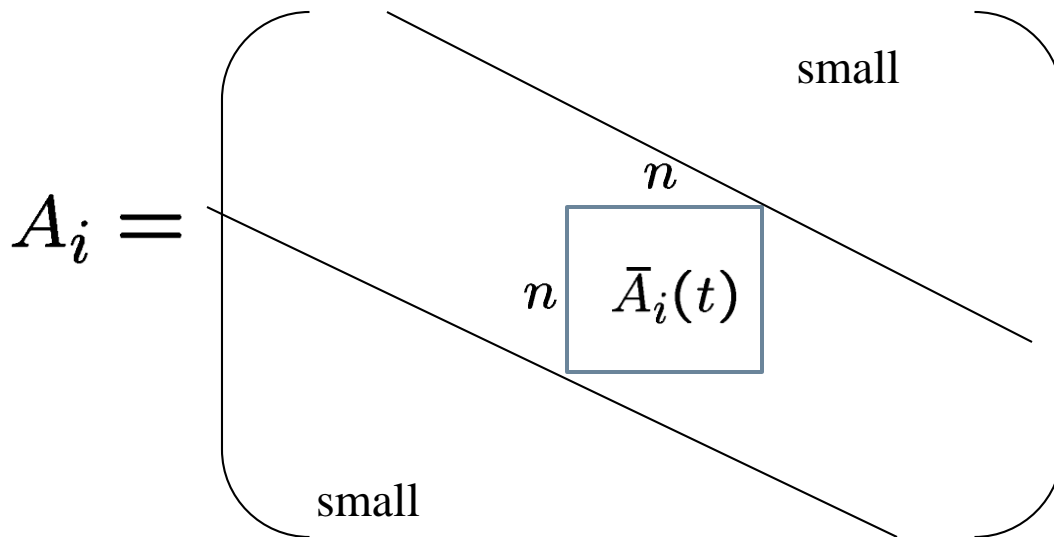


# 時間発展を引き出す



$$\nu = 0, 1, \dots, N - n$$

$$t = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n t_{\nu+a}$$

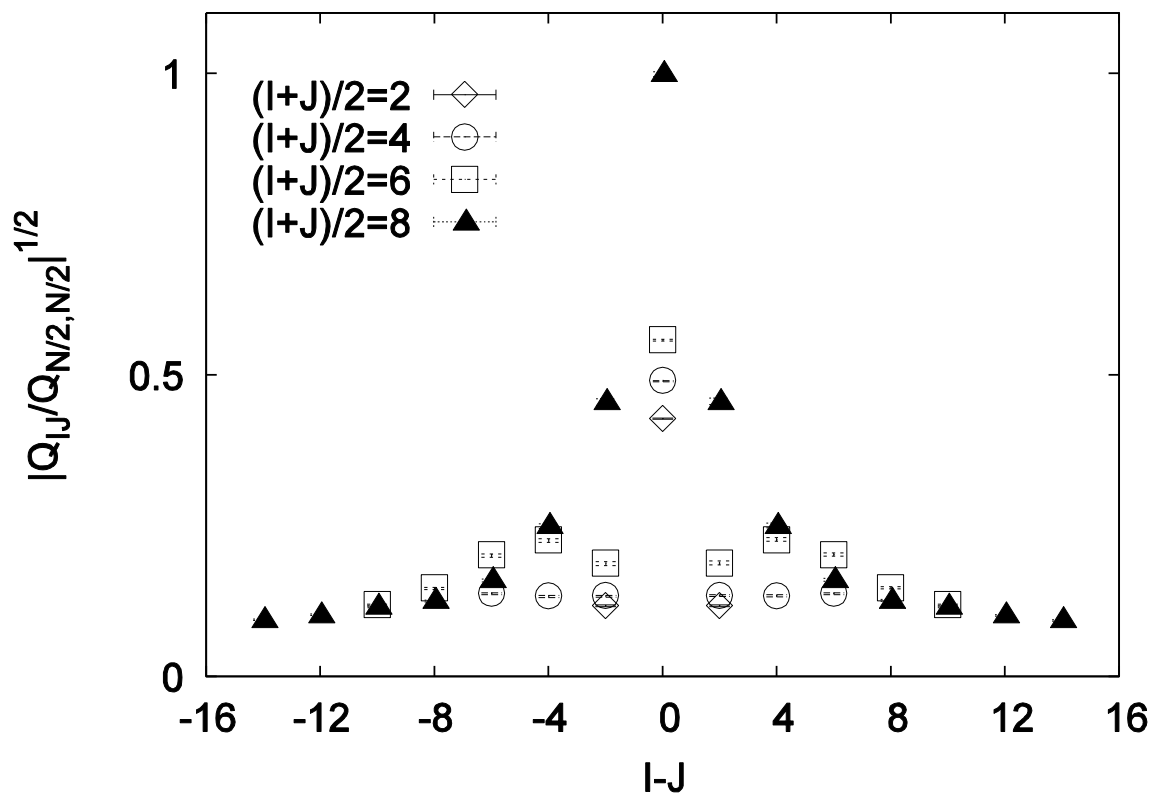


帯状対角の構造を観察  
時間-空間の非可換性は  
小さい

$\bar{A}_i(t)$  は時刻  $t$  での空間  
の構造を表す

# ブロックサイズの決定

$N = 16$



$$(A_i)^2 = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ (I+J)/2=6 & & & \\ (I+J)/2=8 & & & \end{pmatrix}$$

$(I+J)/2=2$   
 $(I+J)/2=4$

$n = 4$  にとる

# 空間のサイズの時間発展

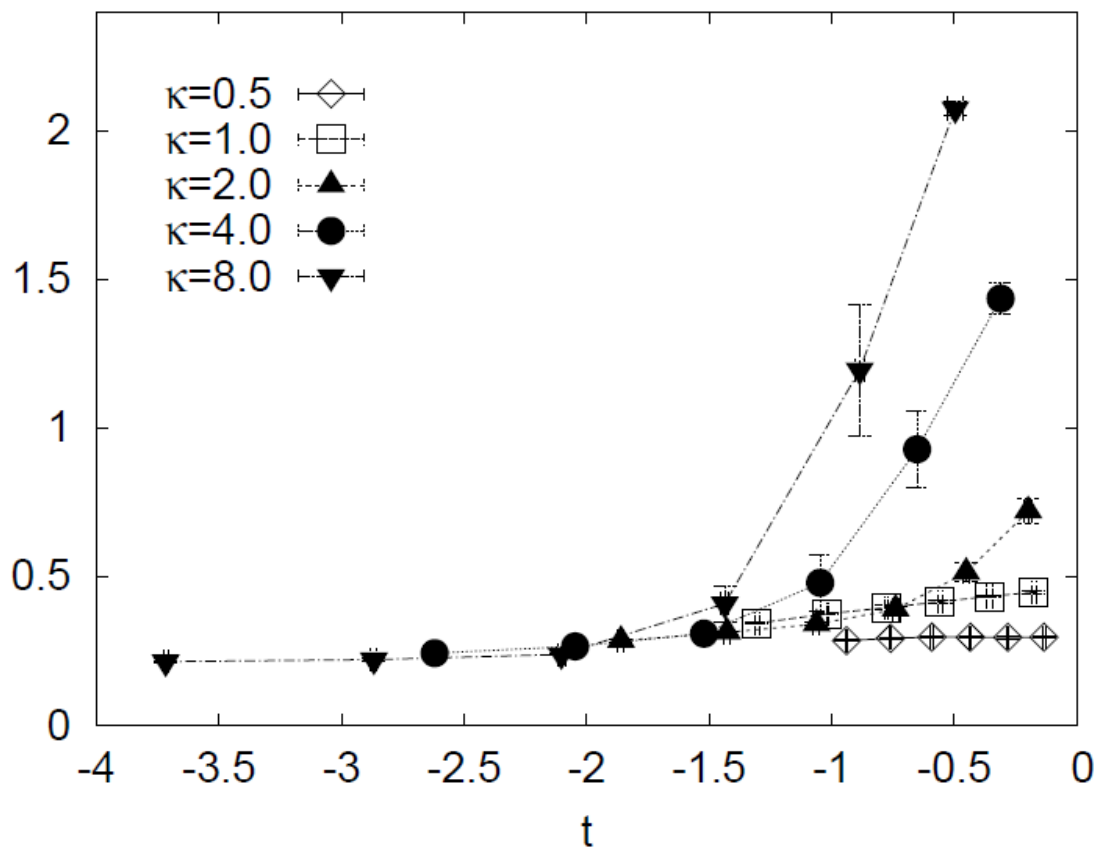
$$R(t)^2 \equiv \frac{1}{n} \text{tr} \bar{A}_i(t)^2$$

$$N = 16$$

$$n = 4$$

$t \rightarrow -t$  のもとで対称  
 $t < 0$  の結果のみ示す

$t = 0$  でのピークは  $\kappa > \kappa_c$  で  
大きくなっていく



# SSB of SO(9) symmetry

$$T_{ij} = \frac{1}{n} \text{tr}\{\bar{A}_i(t)\bar{A}_j(t)\}$$

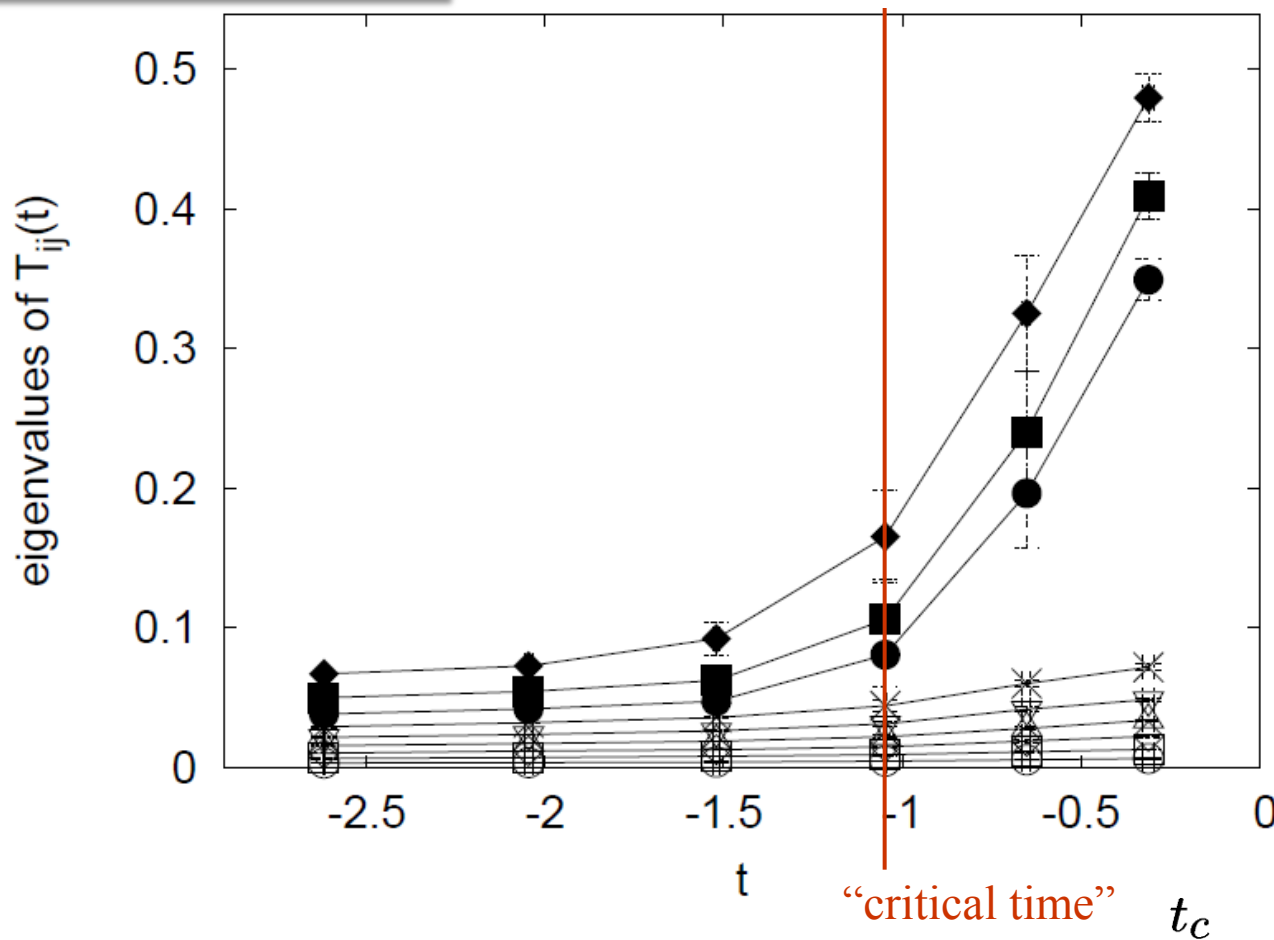
SO(9) <sup>SSB</sup> → SO(3)



慣性モーメント  
テンソル

$N = 16$

$\kappa = 4.0$



# SSBのメカニズム

$$\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 0 \iff 2\text{tr}(F_{0i})^2 = \text{tr}(F_{ij})^2$$

$F_{\mu\nu} = -i[A_\mu, A_\nu]$

large  $\kappa \implies \text{tr}(F_{0i})^2$  が大きくなる、拘束より  $\text{tr}(F_{ij})^2$  も

$\frac{1}{N}\text{tr}(A_i)^2 = 1 \implies$  ある時刻で  $\text{tr}(F_{ij})^2$  を最大化するのが効率的

$\text{tr}(F_{0i})^2$  への寄与が最小になるようにする

$t = 0$  のまわりの  $A_0$  の固有値分布がより密であることから、 $t = 0$  が選ばれる

$\downarrow$

$\left[ t = 0 \text{ での } R(t)^2 = \frac{1}{n}\text{tr}(\bar{A}_i)^2 \text{ のピークが } \kappa \text{ が増加するとともに大きくなる} \right]$

# SSBのメカニズム (続き)

$\frac{1}{N}\text{tr}(A_i)^2 = 1$ のもと  $\text{tr}(F_{ij})^2$  を最大化

$$G = \text{tr}(F_{ij})^2 - \lambda \text{tr}(A_i)^2 \quad \lambda : \text{Lagrange multiplier}$$

$$\longrightarrow 2[A_j, [A_j, A_i]] - \lambda A_i = 0$$

$$A_i = \chi L_i \quad (i \leq d), \quad A_i = 0 \quad (d < i \leq 9)$$

$L_i$   $d$ 個の生成子をもつコンパクト半単純リー代数の表現行列

$$\longrightarrow L_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$d=3!$

# Removing the cutoffs

$R(t)$  がスケールするように、2つのカットオフ $\kappa$ と $L$ を  
 $N \rightarrow \infty$  極限で取り除く

1.  $\kappa \rightarrow \infty$  with  $N \rightarrow \infty$

$$\kappa = \beta N^{1/4}$$

(連続極限)

2.  $L \rightarrow \infty$  with  $\beta \rightarrow \infty$

$R(t_c)$  でスケールを固定する

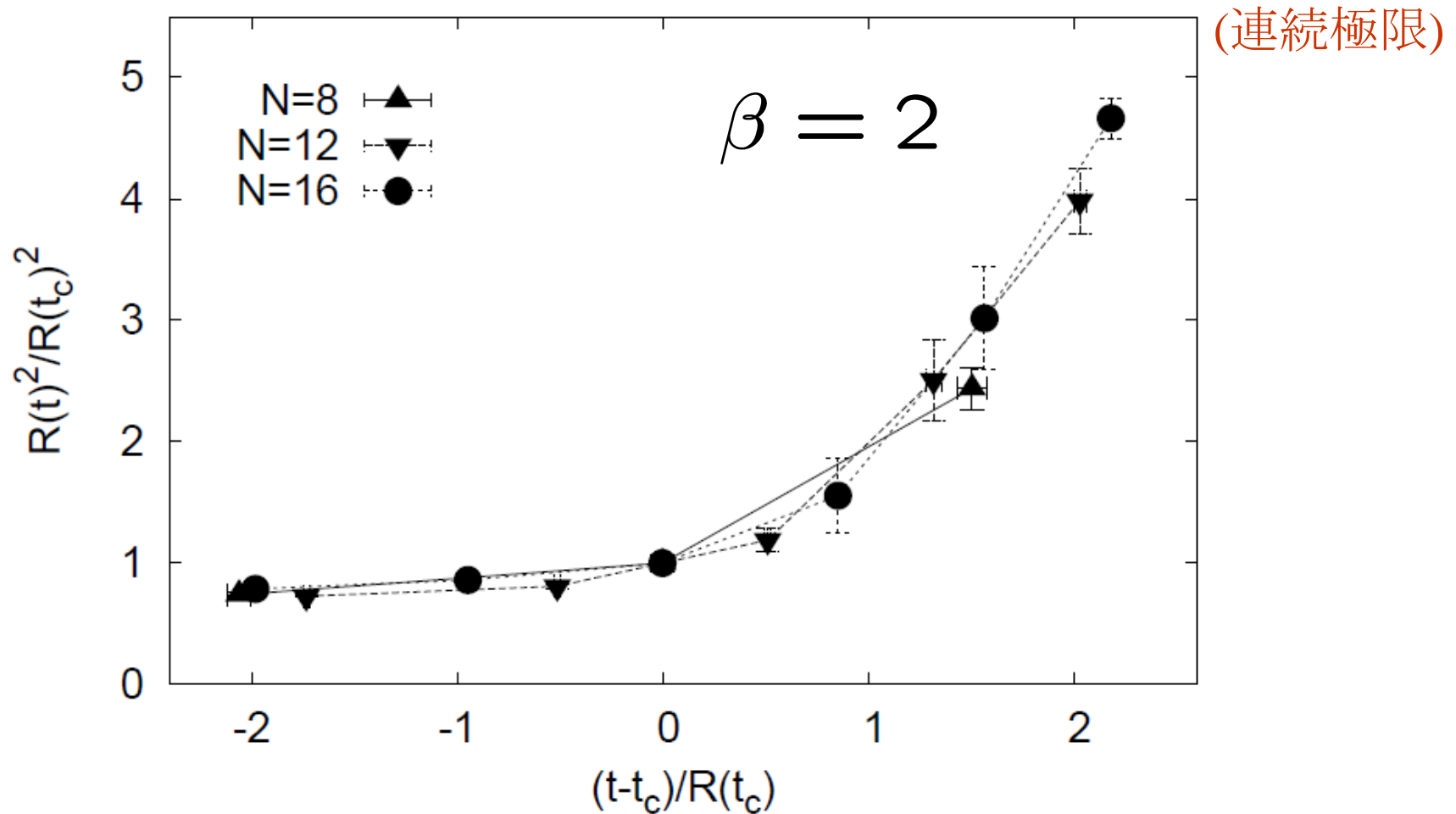
(無限体積極限)

このようにして得られた理論には1つのスケールパラメータ以外のパラメータがない!

非摂動的弦理論に期待される性質

# Large N scaling

$\kappa = \beta N^{1/4}$  での明白なラージNスケーリングが見られる

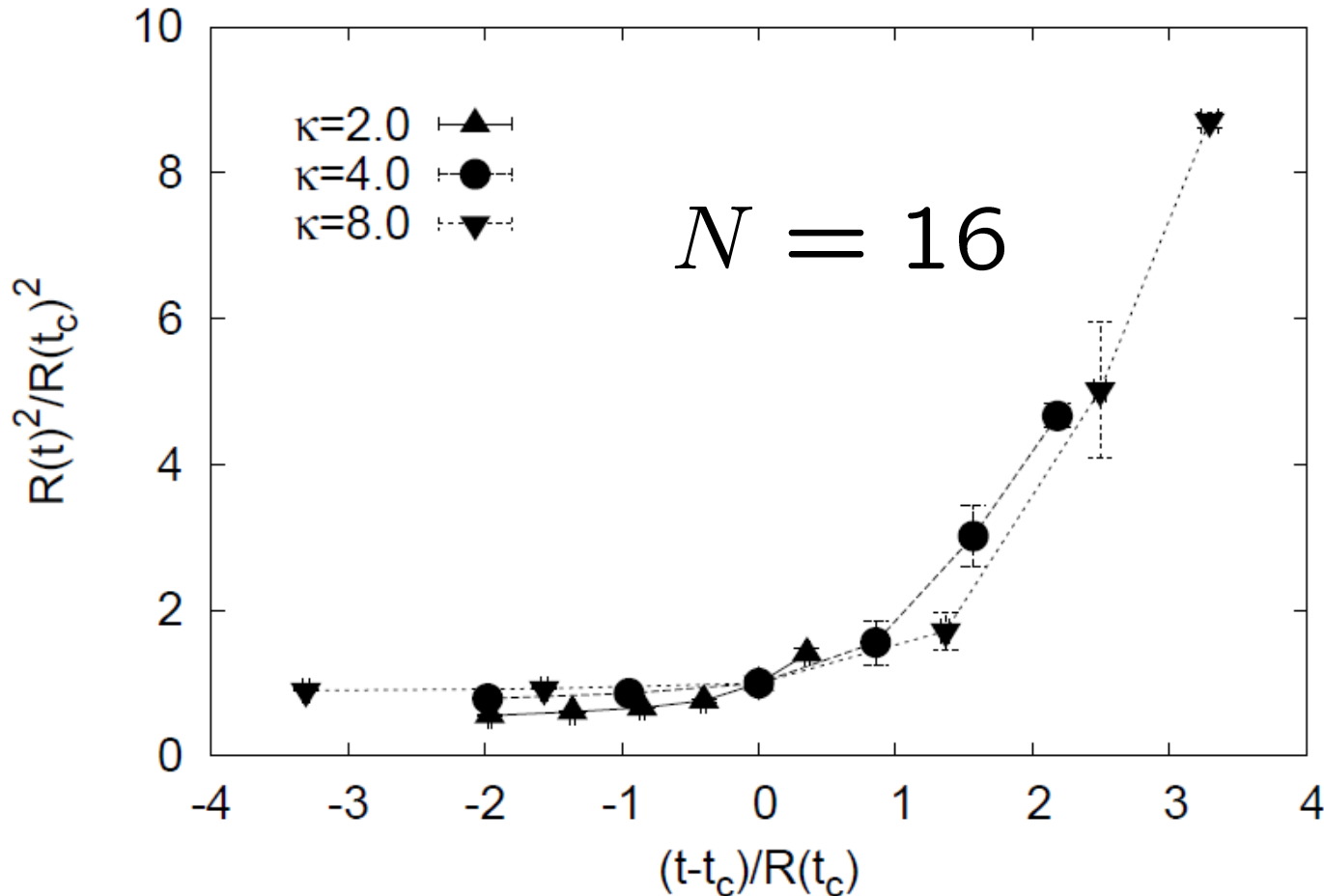




# Infinite volume limit

時間の広がり  $\beta$  が増加するとともに増加  
後での時刻での宇宙のサイズも  $\beta$  が増加するとともに増加

(無限体積極限)



# 古典解

# 後の時刻を見る

- モンテカルロシミュレーションの結果は宇宙の誕生(ごく初期)を見ているようである
- 後の時刻を見るにはより大きな $N$ が必要
- $SO(9)$  から  $SO(3)$  への自発的対称性の破れのメカニズムは空間一空間の非可換性に依拠している  
(時間一空間の非可換性は小さい)
- 可換な時空が後の時刻に現われるのか？

# 古典解

- 後の時刻では、作用が膨張のため大きくなり、古典解による記述が良くなることが素朴には期待できる
- 相補的なアプローチとして、古典解を調べる
- ラージ $N$ の極限では無限個の古典解が存在する  
(perturbative string theoryにおける無数の真空に類似)
- どの解がモンテカルロシミュレーションの結果につながるのか見出す必要がある
- 可換な空間をもった膨張する宇宙を表す解の例をいくつか見つけた

# SO(4)対称な解 (R x S<sup>3</sup>時空) の例

$$\text{EOM} \quad \frac{\delta}{\delta A_\mu} \left( -\frac{1}{4} \text{tr}([A_\mu, A_\nu]^2) - \frac{\lambda}{2} \text{tr}(A_i)^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} \text{tr}(A_0)^2 \right) = 0$$

$$A_0 = bT_0 \otimes 1_k$$

$$A_1 = \alpha b T_1 \otimes M_1, \quad A_2 = \alpha b T_1 \otimes M_2, \quad A_3 = \alpha b T_1 \otimes M_3, \quad A_4 = \alpha b T_1 \otimes M_4$$

$$A_5 \sim A_9 = 0$$

$SL(2, R)$  algebra

$$[T_0, T_1] = iT_2 \quad [T_0, T_2] = -iT_1 \quad [T_1, T_2] = -iT_0$$

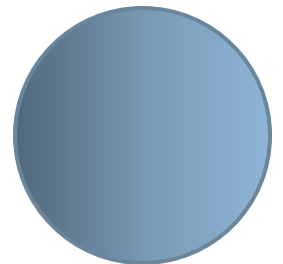
$$M_i = \text{diag}(n_i^{(1)}, \dots, n_i^{(k)}) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$|n^{(I)}| = 1 \quad (I = 1, \dots, k)$$

$$\lambda = -b^2, \quad \tilde{\lambda} = -\alpha^2 b^2$$

空間-空間は可換

S<sup>3</sup>



# SO(4)対称な解 (R×S<sup>3</sup>時空) の例 (続き)

primary unitary series

$$(T_0)_{mn} = n\delta_{mn}$$

$$(T_1)_{mn} = -\frac{i}{2} \left( n - i\rho + \frac{1}{2} \right) \delta_{m,n+1} + \frac{i}{2} \left( n + i\rho - \frac{1}{2} \right) \delta_{m,n-1}$$

ブロックサイズを3にとれる

空間のサイズ

$$R(n) = \sqrt{\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{A}_i(n)^2)} = \frac{\alpha b}{\sqrt{3}} \sqrt{n^2 + \rho^2 + \frac{1}{4}} \longrightarrow R(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + t_0^2}$$

時間一空間の非可換性

$$\frac{-\frac{1}{3} \text{tr}([\bar{A}_0(n), \bar{A}_1(n)]^2)}{\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{A}_0(n))^2 \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{A}_1(n))^2} = \frac{1}{n^2 + \frac{2}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

時間一空間も可換

連続極限

$$b \rightarrow 0 \text{ with } t = nb, \quad \rho b = t_0$$

$$\lambda = -b^2 \rightarrow 0 \quad \text{consistent!}$$

$$\tilde{\lambda} = -\alpha^2 b^2 \rightarrow 0$$

# SO(4)対称な解 (R×S<sup>3</sup>時空) の例 (続き)

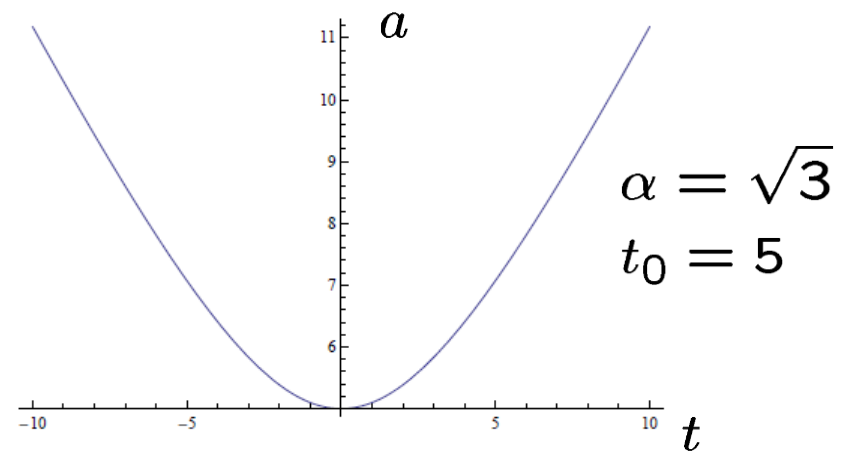
$$R(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + t_0^2} \equiv a(t)$$

➔  $H = \frac{\dot{a}}{a} \sim a^{-\frac{3}{2}(1+w)} \quad w = -\frac{1}{3} \left( \frac{2t_0^2}{t^2} + 1 \right)$

$$t = t_0 \longrightarrow w = -1$$

$$t \rightarrow \infty \longrightarrow w = -\frac{1}{3}$$

加速膨張から速度一定の膨張へ



# まとめと展望




# まとめ

- Lorentzian IIB matrix model は非摂動的によく定義される
- モデルを正則化するために2つのカットオフ  $\kappa$  と  $L$  を導入
- 2つのカットオフはラージN極限で取り除ける
- こうして得られた理論には1つのスケールパラメータ以外のパラメータが存在しない

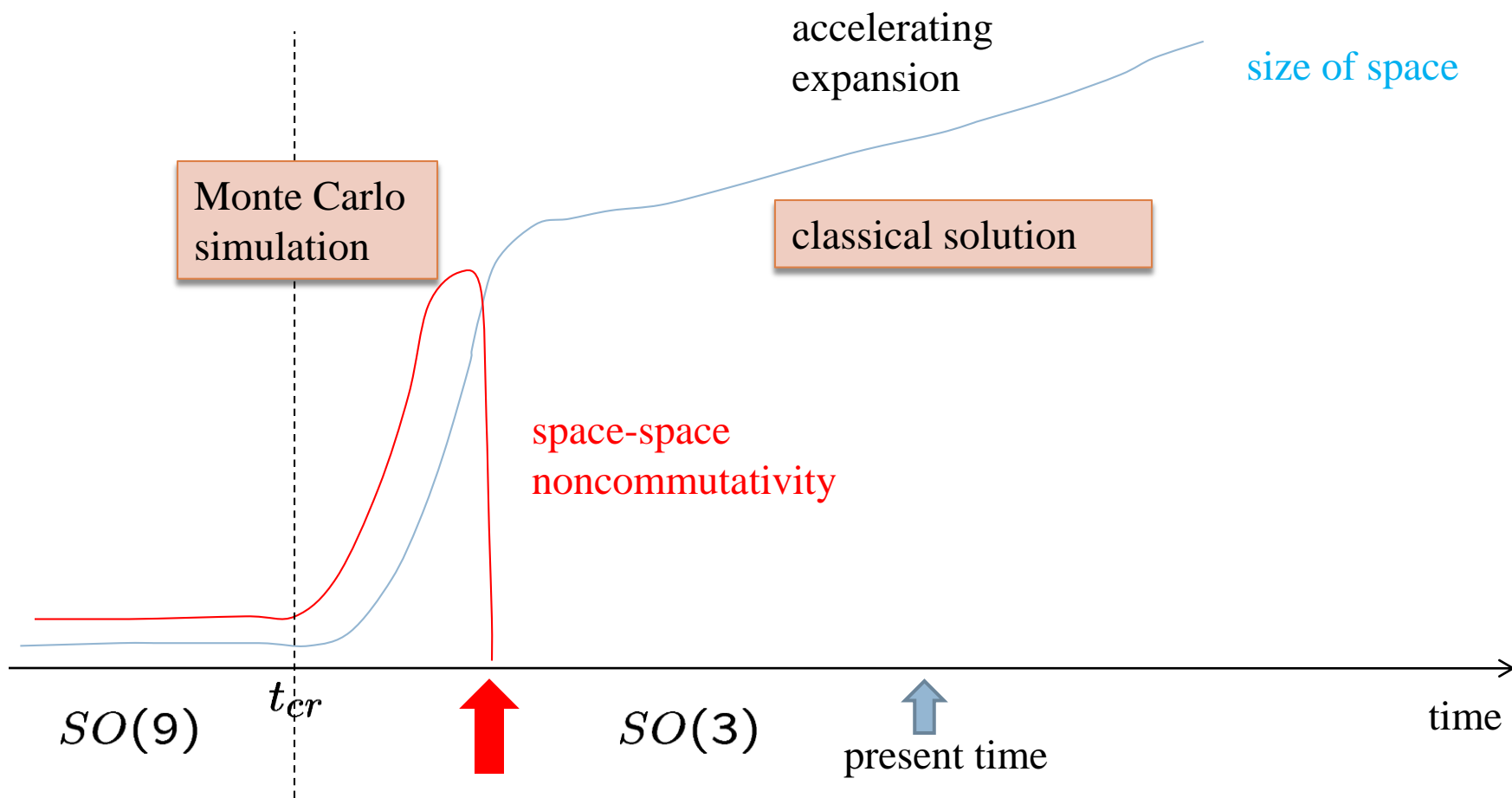
これは非摂動的弦理論に期待される性質

- スケール因子について先に積分することにより、符号問題のないモデルを得る  
cf.) Euclidean modelは符号問題のためにモンテカルロシミュレーションが難しい
- 実時間の量子ダイナミクスを場の理論の場合と比べて簡単に調べられる

# まとめ (続き)

- 臨界時刻の後でSO(9)はSO(3)に自発的に破れる
  - 臨界時刻の後で3次元空間のサイズは時間とともに増加
  - 宇宙の始まりの特異点は非可換性より自然に避けられている
  - SUSYの役割
    - cf.) bosonic model
      - $A_0$  の固有値が互いに引き合う
- 
- $\kappa \rightarrow \infty$  でも固有値分布は広がらない
  - 膨張もSSBもない
- 古典解の解析

# 推察



空間一空間の非可換性があるダイナミカルな理由により消える

# 展望

- アルゴリズムを改良して、モンテカルロシミュレーションを続ける
- 古典解を調べる 古典解のまわりの量子補正
- 繰り込み群のような方法を開発する  
帯状対角 時間についてlocal
- 1/D展開、平均場近似
- 後の時刻に到達で可換な時空が得られるか？
- 後の時刻で4つの相互作用と物質場がどのように現われるか？
- インフレーションのメカニズムの解明  
→ CMBのデータの詳細
- ダークエネルギー
- 宇宙の将来 big rip or big crunch?