スケール不変性 vs 共形不変性

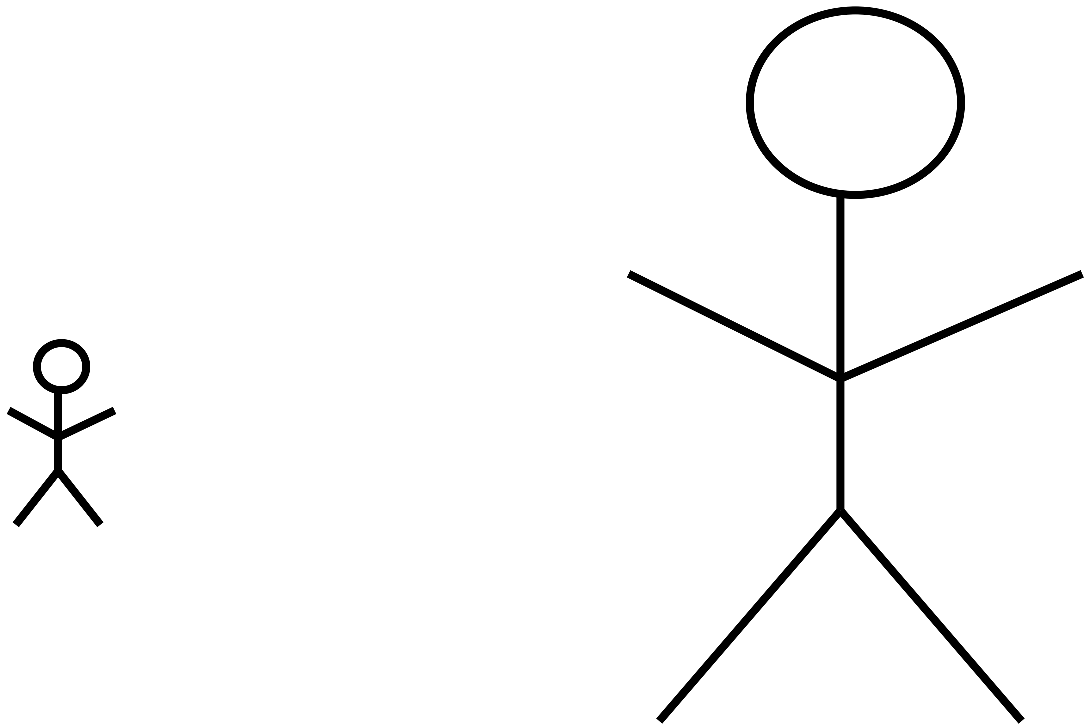
中山　優（IPMU & Caltech）

スケール不変= 共形不変?

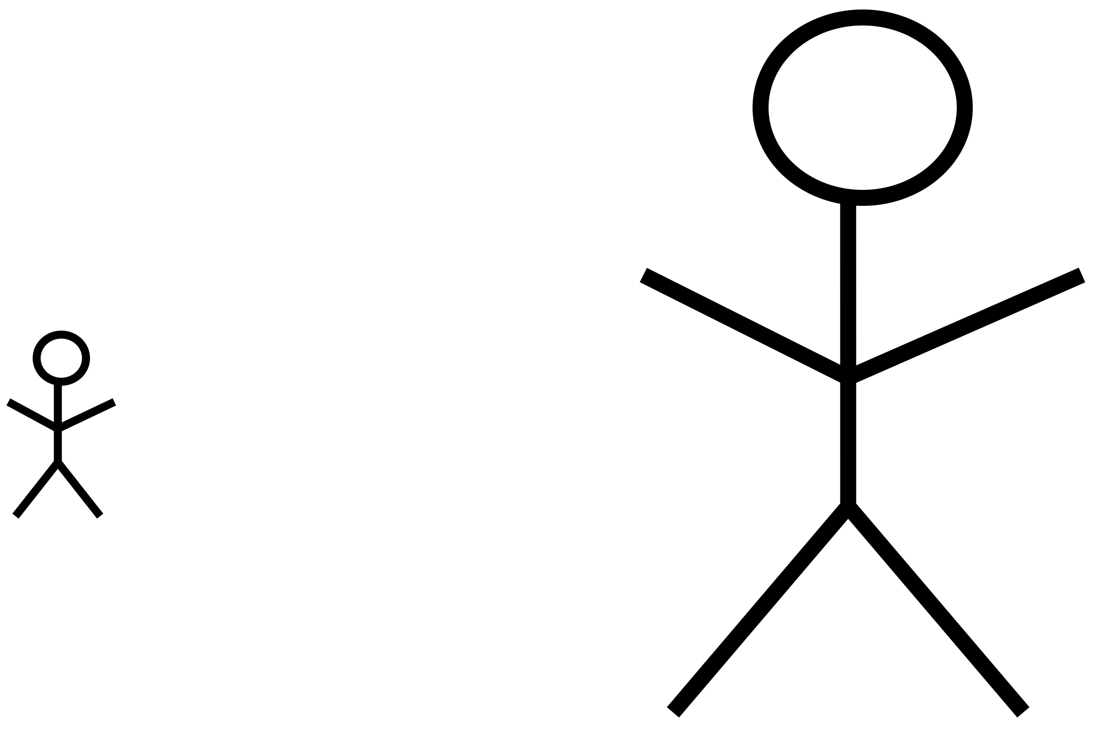
スケール不変＝ 共形不変?

- 場の量子論、繰り込み群はスケール不変な点で分類される（ウィルソンの哲学）
- 共形不変性は2次元における場の理論の分類（＝臨界現象の分類）を可能にした
- スケール不変性は共形不変性を意味しない！

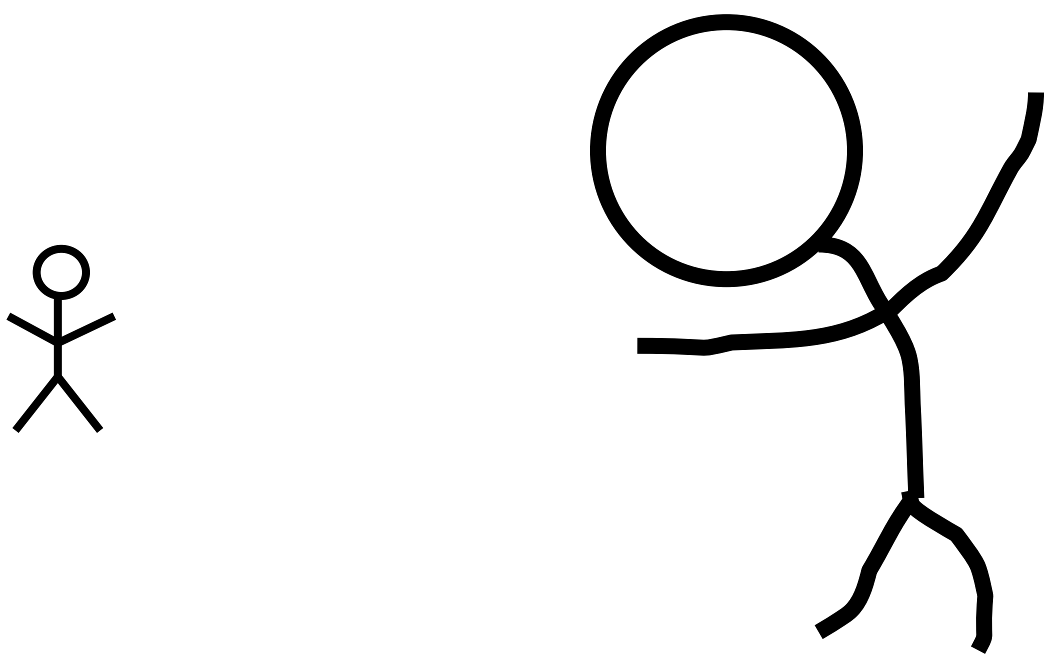
スケール不変



スケール不変



共形不変



スケール不変= 共形不変?

- スケール不変性は共形不変性を意味しない！
- 場の量子論の基本的な大問題
- AdS/CFT
- 臨界現象において実際に示すのは数学的にとても難しい（cf スミルノフ）

素粒子現象論への応用

- スケール不変性が Beyond standard model に隠れている？ Techni-dilaton, unparticle, conformal hidden sector, conformal SUSY breaking.
- ジョージアイは、スケール不変だが、共形不変でない理論を unparticle として提唱
- FCNC, mu problem などに役に立つ
- 共形不変性は理論パラメタに制限を加えるが…

宇宙論への応用

- 宇宙の加速膨張

- インフレーションは de Sitter 空間の物理
- アインシュタイン-エーテル理論、ホジャバ理論などは、指数的加速膨張を与えるが、de Sitter 対称性がない（スケール ⇔共形不変の破れ？）。
- 指数的加速膨張 は de Sitter 対称性と等価？
- CMBの揺らぎは共形不変？？

- 注意：現実には「時間」方向が対称性を破っている

数式で言うと…

- スケール不変性

$$x^\mu \to \lambda x^\mu$$

→EMテンソルのトレースがなんかの微分

$$T^\mu_{\ \mu} = \partial^\mu J_\mu \qquad D_\mu = x_\nu T_\mu^{\ \nu} - J_\mu$$

- 共形不変性

$$x^\mu \to \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a^\mu x_\mu + a^2 x^2}$$

→EMテンソルがトレースレスにできる。

$$J_\mu = \partial^\nu L_{\mu\nu} \quad T^\mu_{\ \mu} \to \tilde{T}^\mu_{\ \mu} = 0$$

ビリアルカレントの由来

- Constant なワイル変換を考えてみる

$$g_{\mu\nu} \to e^{2w} g_{\mu\nu}$$

　　→作用が不変になるためにはラグランジアンは全微分だけ違ってよい。

$$L \to L + wD_\mu J^\mu$$

- この全微分がビリアルカレント
- 場所依存するローカルなワイル変換（～共形変換）のためには部分積分できないので、この項は消えないといけない。

目的と結果

- 場の理論で知られていることのまとめ

- ホログラフィーを用いて、重力的なザモロドチコフ･ポルチンスキーの定理を定式化して、それを示したい。

- 重力理論がヌル･エネルギー条件を満たしていると、定理は成り立つ。

Part 1. 場の理論から

近年の発展で明らかになっていることのまとめ

- 1+1 次元では証明済み
- d+1 で d>3 なら反例が存在する
- d = 2,3 では証明も反例もまだない
- C-定理と密接に関係？

マスレスなスカラーな例

- 素朴なネーターの EM テンソル

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)$$

- トレースはノンゼロ (in d ≠ 2)

$$T_\mu{}^\mu = \frac{2-d}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) = \partial^\mu J_\mu$$

ビリアルカレントの発散ではある

$J^\mu \sim \phi\partial^\mu\phi$　（運動方程式を使う）

→よってスケール不変

- 実は共形不変。なぜなら、ビリアルカレントは自明な形をしていて、EM テンソルを改良できる

$$J^\mu \sim \partial^\mu(\phi^2)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + k(\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2)(\phi^2)$$

QCD + マスレスフェルミオン

摂動論で EM テンソルを計算する

$$T^{\mu}_{\ \mu} = \beta(g)\mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \beta(g) = C_1 g^2 + C_2 g^4 + \cdots$$

- Banks-Zaks 固定点では $N_f \sim \frac{11}{2}N_c$

$$T^{\mu}_{\ \mu} = 0\ , \quad \beta(g_*) = 0$$

- よって共形不変
- 原理的には, beta 関数はスケール不変な固定点でゼロでなくてよい, しかし、ビリアルカレントの候補は摂動論では存在しない…

$$T^{\mu}_{\ \mu} = \beta_i O_i = \partial^{\mu} J_{\mu}\ , \quad J_{\mu} = \ ?$$

- 非摂動論では、どうなっているかは未解明。

Maxwell theory in d > 4

- 5次元以上の場の理論では、スケール不変性と共形不変性は成り立たない

- たとえば 5 次元のマックスウェル理論 (Nakayama et al, Jackiw and Pi)
  - 注：ZPの仮定(4) を実は破っている
- 相互作用がスケール不変に入らないので isolate された特殊な反例

Maxwell theory in d > 4

- EMテンソルと Virial カレント

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{g_{\mu\nu}}{4}(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})$$

$$T^{\mu}_{\ \mu} = \frac{4-d}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{4-d}{4}\partial_{\mu}(F^{\mu\rho}A_{\rho})$$

- 運動方程式を使った。
- Virial カレント $J^{\mu} = F^{\mu\rho}A_{\rho}$ は何かの微分でかけないので EMテンソルはトレースレスにできない。
- Dilatation current はゲージ不変でないがチャージは不変

ザモロドチコフ･ポルチンスキーの定理 (1988):

次の仮定の下で、スケール不変な（１＋１）次元の場の理論は共形不変である。

1. 理論がユニタリである
2. ポアンカレ不変
3. スペクトラムが離散

(4). スケール変換のカレントが存在

場の理論の証明

$$F(x^2) = z^4 \langle T(x) T(0) \rangle$$
$$G(x^2) = z^3 \bar{z} \langle \Theta(x) T(0) \rangle$$
$$H(x^2) = z^2 \bar{z}^2 \langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle \ .$$

$$T \equiv T_{zz} \ , \quad \Theta \equiv T^{\mu}_{\ \mu}$$

$$\bar{\partial} T + 4 \partial \Theta = 0$$

ザモロドチコフにしたがって C を定義する

$$C = 2(F - \frac{1}{2} G - \frac{3}{16} H)$$

$$\dot{C} \equiv x^2 \frac{d}{dx^2} C = -\frac{3}{4} H \leq 0$$ ← C-定理!

繰り込み群の固定点では $\dot{C} = 0$ なので $H = 0$

→ $\langle \Theta(x) \Theta(0) \rangle = 0 \iff \Theta = 0$

4次元では...？？

- まだ場の理論からは不明
- 繰り込み可能なスケール不変な古典作用は共形不変
- 摂動論では、1ループ（おそらく2ループでも）存在しない
- 摂動論で存在するとしたら繰り込み群は cyclic になる

- 4-ε次元の解析がUC サンディエゴのグループ(Grinstein et al) によってなされていて、反例が存在すると主張しているが、彼らの議論はいろいろおかしい

4次元の a-定理とε-予想

- 4次元の conformal anomaly a は繰り込み群に沿って単調減少
- Komargodski と Schwimmer は CFT 間のフローに対して物理的な「証明」を与えた
- 彼らの証明は fixed point がスケール不変であるが共形不変でないときは適用できない
- 技術的には、dilaton が IR セクターと decouple するというところが危険で、共形不変性を仮定しないと今のところ乗り越えられない

- 将来の完全な証明が望まれる！

Part 2. 重力による証明

重力側からの主張

スケール不変性を持つ場の配位
→ 自動的に共形不変性のアイソメトリを持つ（AdS空間になる）

ヌル・エネルギー条件と運動方程式から出す

まずは幾何から始めよ

d+1次元計量に d 次元のポアンカレ不変性＋スケール不変性を要請すると、AdS$_{d+1}$ に決まる。

$$ds^2 = \frac{dz^2}{z^2} + f(z) dx_a^2$$

$$z \to \lambda z \ , \quad x_a \to \lambda x_a$$

$$ds^2 = \frac{dz^2 + dx_a^2}{z^2}$$

$$\delta x_a = 2(\epsilon^a x_b) x_a - (z^2 + x^b x_b)\epsilon_a \ , \delta z = 2(\epsilon^b x_b) z$$

注意：space-time flipped Horava 理論

"Isometry" の拡張には d+1 次元の一般座標変換が必要であった。
つまり、Foliation preserving な Horava 理論だとダメ。

$$ds^2 = \frac{dz^2 + dx_a^2}{z^2}$$

$$\delta x_a = 2(\epsilon^a x_b)x_a - (z^2 + x^b x_b)\epsilon_a \ , \delta z = 2(\epsilon^b x_b)z$$

これは Foliation preserving diff でない。

$$\delta N = \partial_r (N f)$$

$$\delta N^\mu = \partial_r (N^\mu f) + \partial_r \xi^\mu + \mathcal{L}_\xi N^\mu$$

$$\delta g_{\mu\nu} = f \delta_r g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \ .$$

物質場は共形不変性を破る？

非自明な物質場の配位はAdS対称性を破る。

Example 1:非自明なベクトル場

$$A = A_\mu dx^\mu = \frac{a\,dz}{z}$$

Example 2: 非自明なd－1フォーム場

$$B = b\frac{dx_1 \cdots dx_d}{z^d}$$

しかし、実はそのような非自明な配位は ヌル・エネルギー条件を破る

Null energy condition: $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0\ , \quad k^\mu k_\mu = 0$

(例)

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu + \lambda(A_\mu A^\mu)^2$$

$$R_{zz} + R_{tt} = (m^2 + 2\lambda a^2)a^2 = 0$$

基本的に、ヌル・エネルギー条件は、m^2 と λが正である（＝安定性）を要求して、その元で、 $a = 0$ が導ける。

より一般的な場合を考えるためには、strict null energy condition が scale = conformal を示すために十分条件。

Null energy condition: $R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0 \ , \quad k^{\mu}k_{\mu} = 0$

等号が成り立つのは、場の配位が自明なときに限るというのが strict null energy condition

• 今の場合、対称性が高いので関係ないが、「すべての k に対して」とか「任意の null ray に対して積分して(averaged null energy condition) などと条件を弱めることも可能。
•場の配位が自明というのは、計量のアイソメトリで不変であるということ。つまり、計量が AdS だったら、matter も AdS 不変になるべしということ。

仮定の検証

- ポワンカレ不変性
  - 計量の対称性としてあからさまに仮定
- スペクトラムの離散性
  - バルクの場の数が可算有限個だと暗に仮定
- ユニタリ性
  - おそらく、ヌル・エネルギー条件と深く関わっている。ブラックホールの熱力学法則や解の安定性と深い関係。

(strict) null energy condition

- ブラックホールホログラフィーでの意味
- Null energy condition はブラックホールのホライズンの面積が非減少であるという証明のために十分条件を与える
- ブラックホールエントロピーは単調増加
- Strict null energy condition の意味？
- ブラックホールのエントロピーが変わらないとき、non-trivial なことは何も起こっていないということ
- つまり、“ゼロエネルギー” 状態は何も情報を持っていない
- C-定理との関連性？

より深い理解

- 厳密なヌル・エネルギー条件が成り立てば高階の微分を含む理論でも成り立つ
- 議論は次元によらない

- ホログラフィックC定理との関係？

- 超重力のコンパクト化からの直接証明（有効的なヌル・エネルギー条件の検証）

ホログラフィックC定理

- AdS CFT では動径方向 = 繰り込み群のスケール

$$ds^2 = e^{A(r)}(dx^2 - dt^2) + dr^2$$

- A’(r) が CFT のセントラルチャージを決める。
- ここで、A’ の振る舞いはアインシュタイン方程式から

$$a'(r) \sim \frac{d}{dr}(A'(r))^{1-d} \sim (T^0_0 - T^r_r) \geq 0$$

- 最後のところで ヌル・エネルギー条件を使った。
- 1+1 次元では、最後のところは $\langle T^\mu_\mu(x) T^\mu_\mu(0) \rangle$ なのでちょうど、strict null energy condition を要請しておけば、1+1 次元の証明が完全に再現される

さらなる拡張と最近の話題

- カイラルなスケール不変性 vs 共形不変性 (Hofman-Strominger の「定理」とその重力的な対応物）
- Chiral scale inv → warped AdS3 space → chiral conformal invariance
- 一般相対性の重要性：z 方向を特別視してやるとスケール不変性を保ちながら共形不変性を破れる？ Consistent？
- トレースアノマリーに R^2 の項を出せる。New anomaly？

$$T = a(\mathrm{Euler}) + c(\mathrm{Weyl})^2 + bR^2$$

- Wick rotate できるとすると (cf. dS/CFT) Horava gravity, Einstein-Aether 理論などは危険（？）

地獄めぐり (Lorentzian)

以下から結論を選んでください

- Null energy-condition と局所ローレンツ対称性はどちらも破れない
- ホログラフィーは間違っている
- ユニタリ性がひそかに破れている
- ３次元重力だけ特別だ。スケール=共形はデマ

地獄めぐり (Euclidean)

- dS/CFT はユニタリでない？
- Ghost condensate や Horava 重力はユニタリなホログラフィを持たない？
- そもそもホログラフィがなりたたないかも？
- 結局、CMB の揺らぎは共形不変か？

→根拠は全くないが、共形不変だと個人的には嬉しい。

まとめ

- スケール不変　＝　共形不変？
- ホログラフィーは等価を支持（が5次元以上に特殊な反例があるので使った仮定に問題？）
- C定理との関係性？
- 場の理論の直接証明？４次元の反例？