

# AdS時空における数値相対論に向けて

京大 棚橋典大

# Contents

1. Introduction
2. ホログラフィック超伝導体における動的過程  
[木下、村田、棚橋]
3. RS-IIブレーンワールドモデルにおける  
数値相対論に向けて  
[西條、柴田、田中、棚橋]

# 1. Introduction

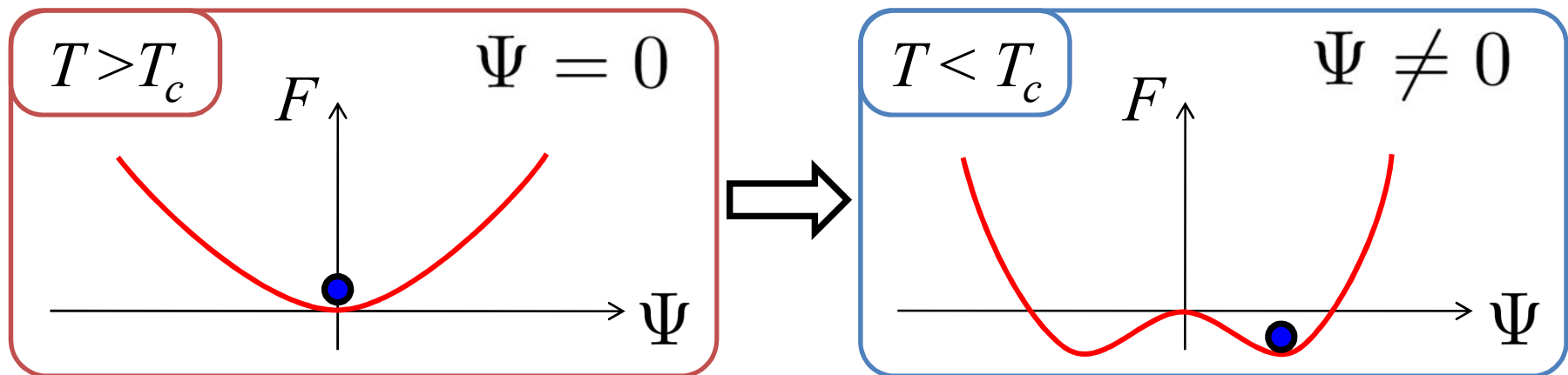
- AdS/CFT対応
  - 強結合ゲージ理論  $\Leftrightarrow$  高次元の古典重力
  - QCDや物性系への応用
- 今後の方向性について
  - AdS/CFT対応における動的過程

# ホログラフィック超伝導

- 強結合電子系における超伝導の記述が目標
- 超伝導の現象論: Ginzburg-Landau理論

$$F = \alpha (T - T_c) |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \gamma |(\nabla - iq\mathbf{A}) \Psi|^2$$

〔  $\Psi$ : オーダーパラメタ     $A$ : U(1)ゲージ場 〕



$\Psi \neq 0 \longrightarrow$  ~~U(1)~~、ゲージ場がmassiveに  
Meissner効果等     $\left[ (\nabla_i \nabla^i + \gamma q^2 |\Psi|^2) \mathbf{A} = 0 \right]$

# ホログラフィック超伝導

- AdS/CFT対応

$$\exp(iS_{\text{bulk}}[\phi]) \Big|_{\phi(z=0)=\phi_0} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS_{\text{gauge}} + i \int d^4x \phi_0 \mathcal{O}\right)$$

$$\frac{\delta S_{\text{bulk}}}{\delta \phi_0} = \langle \mathcal{O} \rangle$$

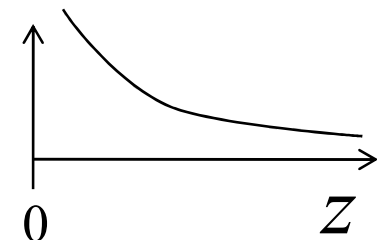
$$\left[ \begin{array}{l} \mathcal{O} : \text{CFTの作用素} \\ \phi_0 : \text{外場} \end{array} \right]$$

バルク中の古典場	}	$\phi \Leftrightarrow \mathcal{O}$	}	作用素
		$g_{\mu\nu} \Leftrightarrow T_{\mu\nu}$		
		$A_\mu \Leftrightarrow J_\mu$		
		$\psi \Leftrightarrow \Psi$		

例)

手で与える  $\rightarrow$  EOMで定まる

$$g_{\mu\nu} = \boxed{g_{\mu\nu}^{\text{boundary}}} + z^4 \boxed{T_{\mu\nu}^{\text{CFT}}} + \dots$$



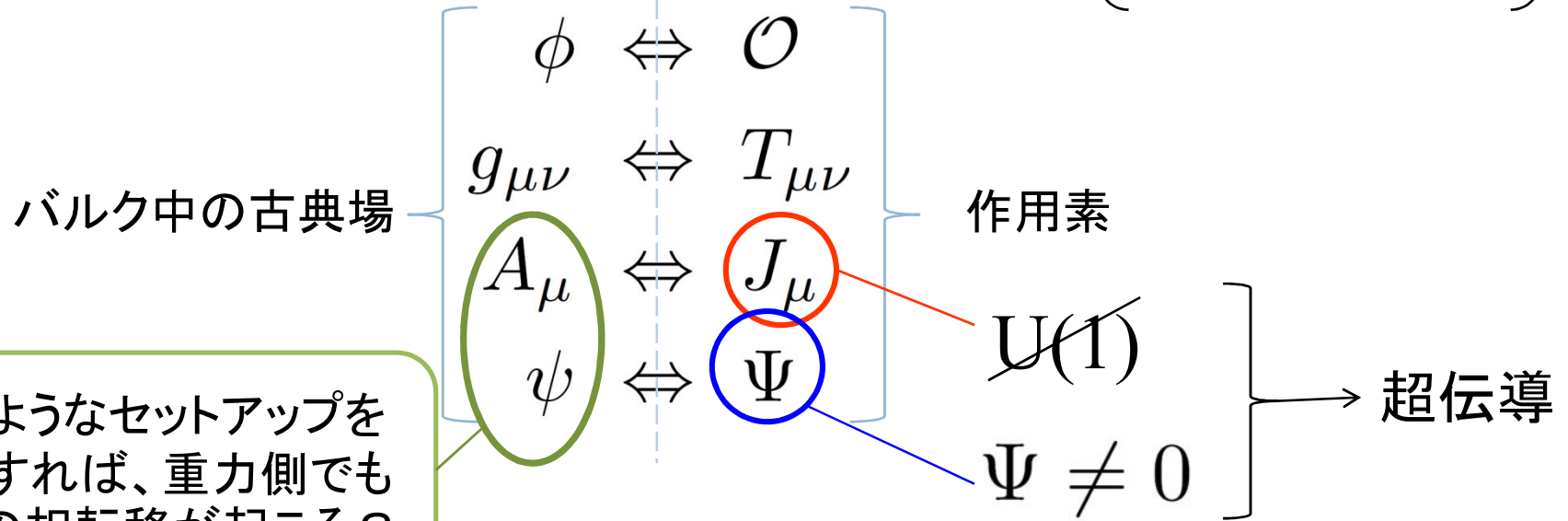
# ホログラフィック超伝導

- AdS/CFT対応

$$\exp(iS_{\text{bulk}}[\phi]) \Big|_{\phi(z=0)=\phi_0} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS_{\text{gauge}} + i \int d^4x \phi_0 \mathcal{O}\right)$$

$$\frac{\delta S_{\text{bulk}}}{\delta \phi_0} = \langle \mathcal{O} \rangle$$

$\mathcal{O}$  : CFTの作用素  
 $\phi_0$  : 外場



似たようなセットアップを用意すれば、重力側でも同様の相転移が起こる？

# ホログラフィック超伝導

## ◆ (1+3)次元重力のセットアップ [⇔(1+2)次元CFT]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{6}{l^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \right]$$

- ansatz [ $m^2 = -2/l^2$ にセット]

$$\begin{cases} ds^2 = -g(r)e^{-\chi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 (dx^2 + dy^2) \\ A = \phi(r) dt, \quad \psi = \psi(r) \end{cases}$$

- 背景解: AdS-RNブラックホール

$$\chi = \psi = 0, \quad g = r^2 - \frac{1}{r} \left( r_+^3 + \frac{\rho^2}{4r_+} \right) + \frac{\rho^2}{4r^2}, \quad \phi = \rho \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r} \right)$$

- 4つのパラメタ:  $(l, r_+, T, q)$

- 2つのスケーリング対称性

2パラメタ( $T, q$ )の解の族

$$(r, t, l, q) \rightarrow (ar, at, al, q/a)$$

$$(r, t, x, y, l, g, \phi) \rightarrow \left( ar, \frac{t}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, a^2 g, a\phi \right)$$

# ホログラフィック超伝導

## ◆ (1+3)次元重力のセットアップ [⇔(1+2)次元CFT]

- AdS境界上の条件:

$$\psi = \frac{\psi^{(1)}}{r} + \frac{\psi^{(2)}}{r^2} + \dots \quad \Rightarrow$$

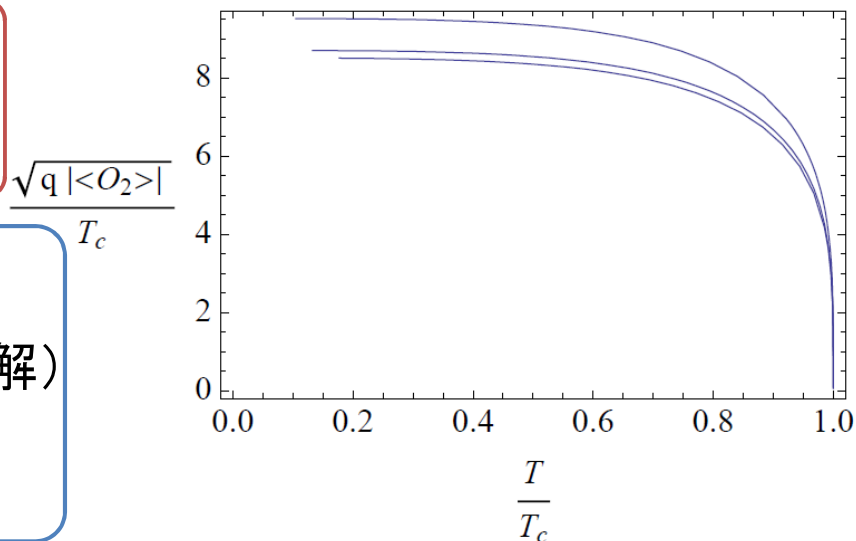
外場を  $\psi^{(1)} = 0$  とセットし、  
オーダーパラメタ  
 $\langle \mathcal{O}_2 \rangle = \sqrt{2}\psi^{(2)}$   
の変化を見る。

- 結果:

•  $T > T_c$ :  $\langle \mathcal{O}_2 \rangle = 0$  の解が実現  
(AdS-RN解)

•  $T < T_c$ :  $\langle \mathcal{O}_2 \rangle \neq 0$  の解が実現  
(スカラー場を伴った荷電ブラックホール解)

$\langle \mathcal{O}_2 \rangle \propto (T - T_c)^{1/2}$  を再現





# AdS/CFT研究について

- 静的な系に関するもの
  - 熱力学量の比較
  - 相構造の比較、安定性解析
- 定常的/準静的な系に関するもの
  - 輸送係数の比較、動的臨界指数など
  - 何らかの近似法を用いた研究
- 動的な系に関するもの
  - 未開拓？

# 動的な系におけるAdS/CFT対応？

- ホログラフィック超伝導体における渦糸

2次元のII型超伝導体  $\leftrightarrow$  (1+3)次元漸近AdS時空

磁場  $\rightarrow$  磁束渦の生成  $\leftrightarrow$  バルクの荷電スカラー場の  
軸対称解

[Albash & Johnson (2008)]

- 超伝導体における  
動的現象の研究

ex.)

超伝導体を急冷  
 $\rightarrow$  渦糸の生成  
その生成密度、運動

[Stephens et al. (2002)]

$\leftrightarrow$  バルクの荷電スカラー場の  
動的現象と対応？

# Critical Dynamics of Gauge Systems: Spontaneous Vortex Formation in 2D Superconductors

G. J. Stephens,<sup>1</sup> Luís M. A. Bettencourt,<sup>2</sup> and W. H. Zurek<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Theoretical Division T-6 MS B288, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545

<sup>2</sup>Center for Theoretical Physics, Massachusetts Institute of Technology, Bldg. 6-308, Cambridge, Massachusetts 02139

(Received 24 May 2001; published 18 March 2002)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |D_{\mu}\phi|^2 - \frac{\lambda}{8} (|\phi|^2 - v^2)^2$$

$[D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}]$

で記述されるII型超伝導体について、  
 温度を  $T > 0 \rightarrow T \sim 0$  に急冷  
 → 渦糸の生成

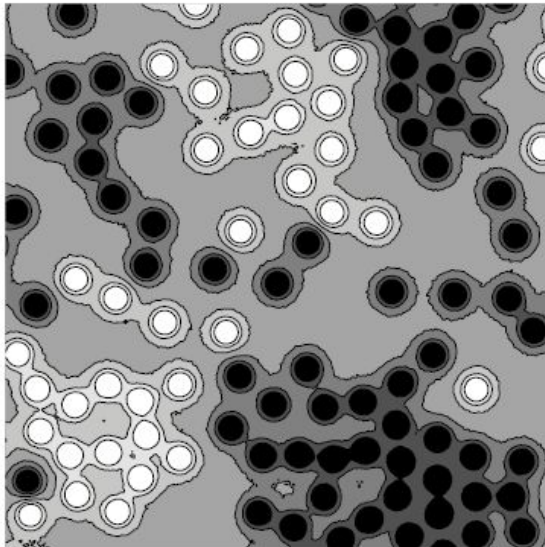


FIG. 1. Contour plot of the magnetic flux across a section of the lattice after the quench ( $t \sim 10$ ). White, localized, regions denote vortices, while black regions denote antivortices. The giant like-sign vortex clusters are surprising and are a result of the quench dynamics in a type-II superconductor, beginning with the formation of superconducting regions (in which the gauge fields are small  $B < B_{c1}$ ) surrounding normal islands of coherent field. As the quench proceeds, the normal islands fragment into clusters of individual vortices.

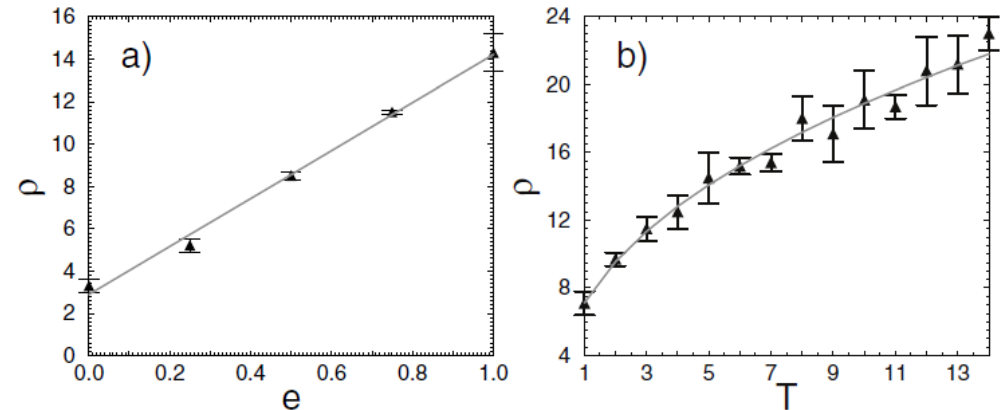


FIG. 2. (a)  $\rho_{\text{def}} \times 10^3$  vs  $e$  from numerical evolutions. The solid line is the best linear fit. (b)  $\rho_{\text{def}} \times 10^3$  vs  $T$  from numerical simulations. The solid line is the best power-law fit  $\rho \sim T^\alpha$ , where  $\alpha = 0.43 \pm 0.02$ . In both plots error bars denote standard deviations among stochastic realizations.

↑生成される渦糸密度の  $e, T$  依存性

# ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

[木下、村田、棚橋]

- ホログラフィック超伝導体の相転移の動的過程

- ✓ 十分低温のAdS-RNブラックホール解に摂動を与え、その後の時間発展を重力側から見る。

- 静的解は構成されているが、動的過程によってその解にきちんと収束するか？

- 線形解析では見えなかった現象が何か見えないか？

- より複雑な問題に取り組むための下準備。

## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

[木下、村田、棚橋]

- セットアップ: 4次元AdS時空 + 荷電スカラー場

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{6}{l^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \right]$$

[  $m^2 = -2/l^2$  にセット ]

- スカラー場: 超伝導体のオーダーパラメタ

$$\psi = \frac{\psi^{(1)}}{r} + \frac{\psi^{(2)}}{r^2} + \dots$$

外場を  $\psi^{(1)} = 0$  とセットし、  
オーダーパラメタ  $\psi^{(2)}$  の  
変化を見る。

## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

[木下、村田、棚橋]

- 境界面に平行方向は一様とする。

- ansatz: 
$$\begin{cases} ds^2 = -f(t, r)dt^2 + 2dtdr + e^{-2\phi(t, r)} (x^2 + y^2) \\ A = \alpha(t, r) dt \\ \psi = \psi(x^a) \end{cases}$$

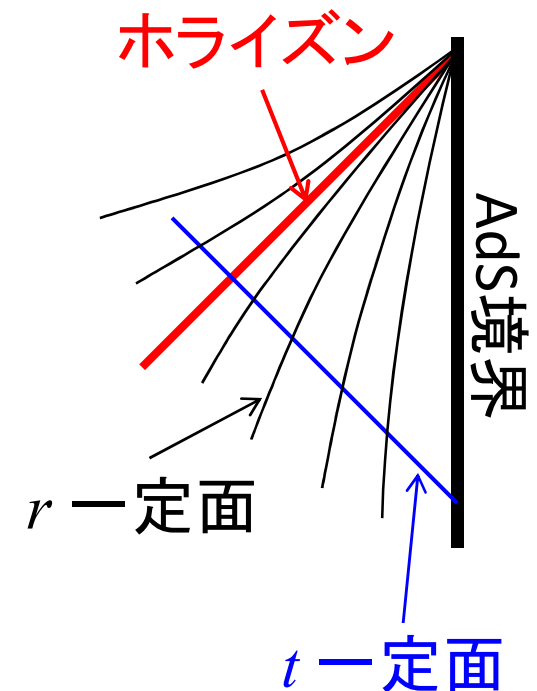
- AdS境界上の漸近形:

$$f(t, r) = r^2 + f_0(t) + f_1(t)/r + \dots$$

$$e^{-\phi(t, r)} = r + \phi_1(t)/r + \dots$$

$$\alpha(t, r) = \alpha_1(t)/r + \alpha_2(t)/r^2 + \dots$$

$$\psi(t, r) = \psi_1(t)/r + \psi_2(t)/r^2 + \dots$$



## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

[木下、村田、棚橋]

### • 方程式系: 2次元の連立偏微分方程式

#### • EOM

$$-4(\dot{\phi})' + 8\phi'\dot{\phi} - V(\phi) + \frac{1}{2}\alpha'^2 + m^2|\psi|^2 - \frac{6}{l^2} = 0$$

$$-2(\dot{\alpha})' + f'\alpha' + 4\dot{\phi}\alpha' - 2iq(\psi\psi^* - \psi^*\psi) = 0$$

$$2(\dot{\psi})' + iq\alpha'\psi - 2\dot{\phi}\psi' - 2\phi'\dot{\psi} - m^2\psi = 0$$

$$2\alpha'^2 + 8\dot{\phi}\phi' - 2f'' - V'(\phi) - 2(\dot{\psi}\psi^{*'} + \dot{\psi}^*\psi') = 0$$

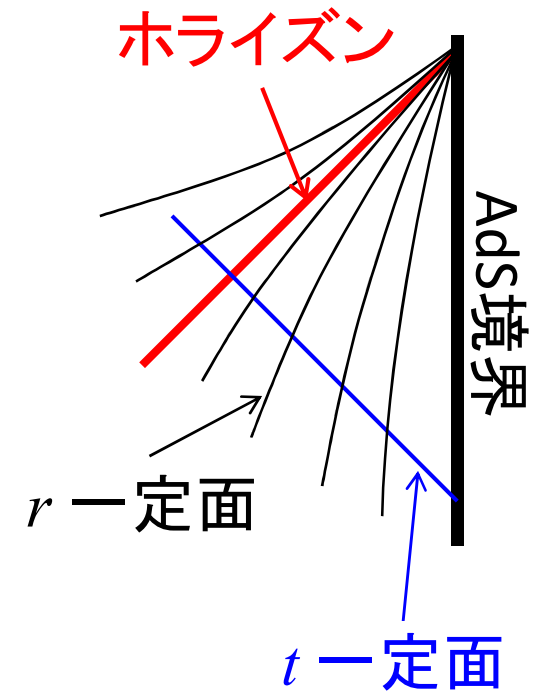
#### • 拘束条件 (初期時刻面とAdS境界上で解けばOK)

$$e^{2\phi}C_1 \equiv 2\ddot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 - f'\dot{\phi} - |\dot{\psi}|^2 = 0$$

$$e^{2\phi}C_2 \equiv 2\phi'' - 2\phi'^2 - |\psi'|^2 = 0$$

$$e^{2\phi}C_3 \equiv -\alpha'' + 2\phi'\alpha' + iq(\psi\psi^{*'} - \psi^*\psi') = 0$$

$$\left( \begin{array}{l} \dot{f} = \partial_t f + f\partial_r f/2 \\ f' = \partial_r f \quad \text{等} \end{array} \right)$$



## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

[木下、村田、棚橋]

### • 方程式系: 2次元の偏微分方程式

#### • EOM

$$-4(\dot{\phi})' + 8\phi'\dot{\phi} - V(\phi) + \frac{1}{2}\alpha'^2 + m^2|\psi|^2 - \frac{6}{l^2} = 0$$

$$-2(\dot{\alpha})' + f'\alpha' + 4\dot{\phi}\alpha' - 2iq(\psi\psi^* - \psi^*\psi) = 0$$

$$2(\dot{\psi})' + iq\alpha'\psi - 2\dot{\phi}\psi' - 2\phi'\dot{\psi} - m^2\psi = 0$$

$$2\alpha'^2 + 8\dot{\phi}\phi' - 2f'' - V'(\phi) - 2(\dot{\psi}\psi^{*'} + \dot{\psi}^*\psi') = 0$$

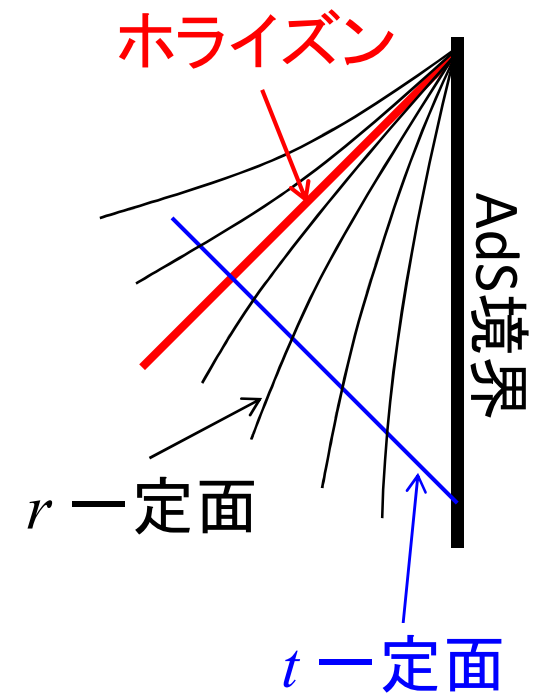
$$\left( \begin{array}{l} \dot{f} = \partial_t f + f\partial_r f/2 \\ f' = \partial_r f \quad \text{等} \end{array} \right)$$

#### • 初期条件: AdS-RN解 + $\psi$ に摂動

#### • 解き方:

• AdS境界上: 境界条件 or EOM

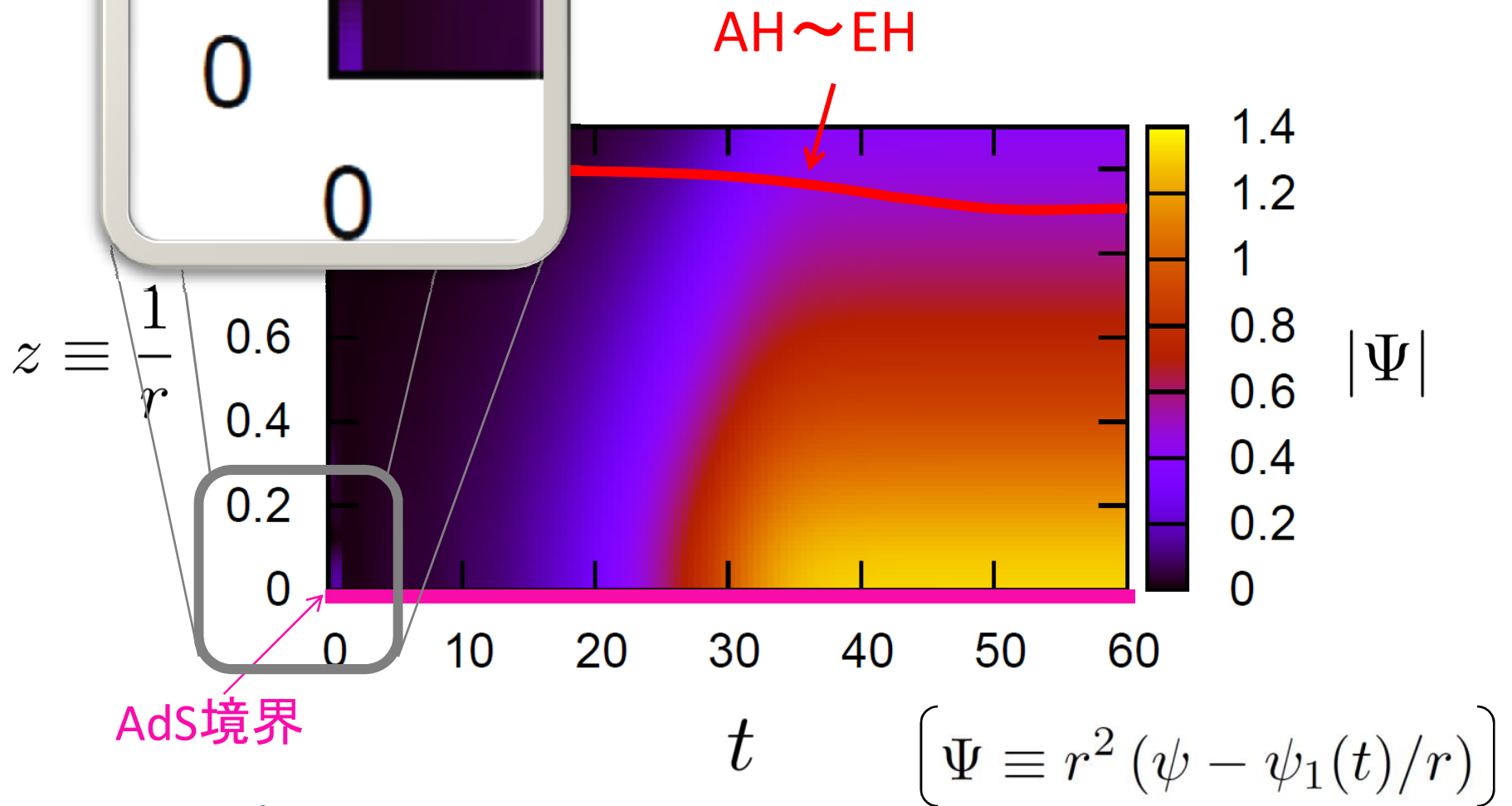
• バルク:  $r$  積分して  $\dot{\phi}$  等を得る  
→ 時間発展





## 2. ホルンゲート超伝導における動的凝縮過程

- 凝縮パラメタの時間変化

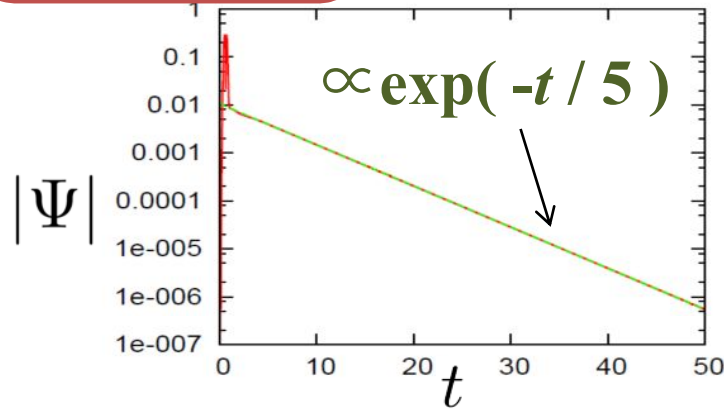


$$\left[ l = r_+ = 1 \right]$$

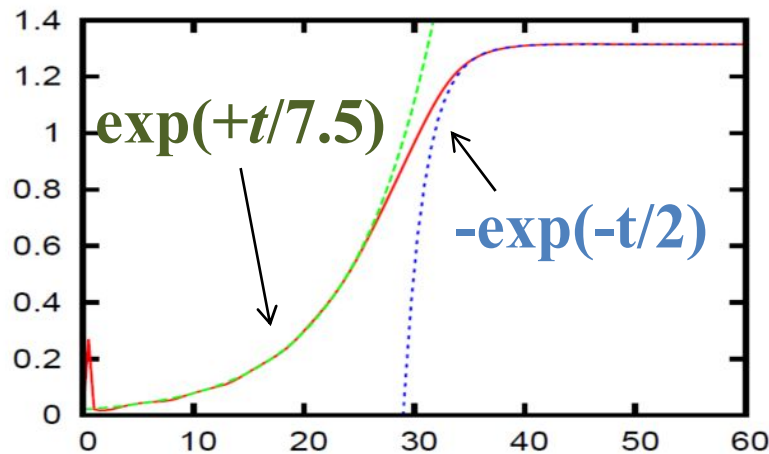
## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

- 結果: オーダーパラメタの緩和時間

$T/T_{\text{crit}} \sim 1.2$



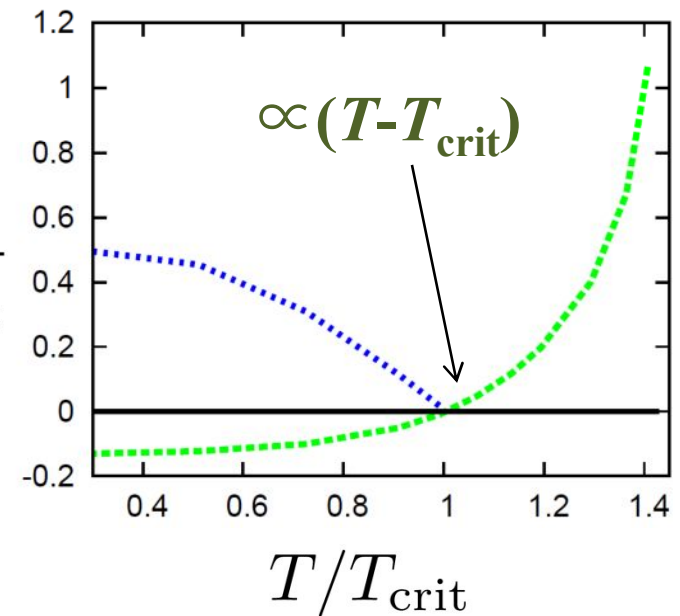
$T/T_{\text{crit}} \sim 0.3$



緩和時間  $\tau_{\text{relax}}$  の  $T$  依存性

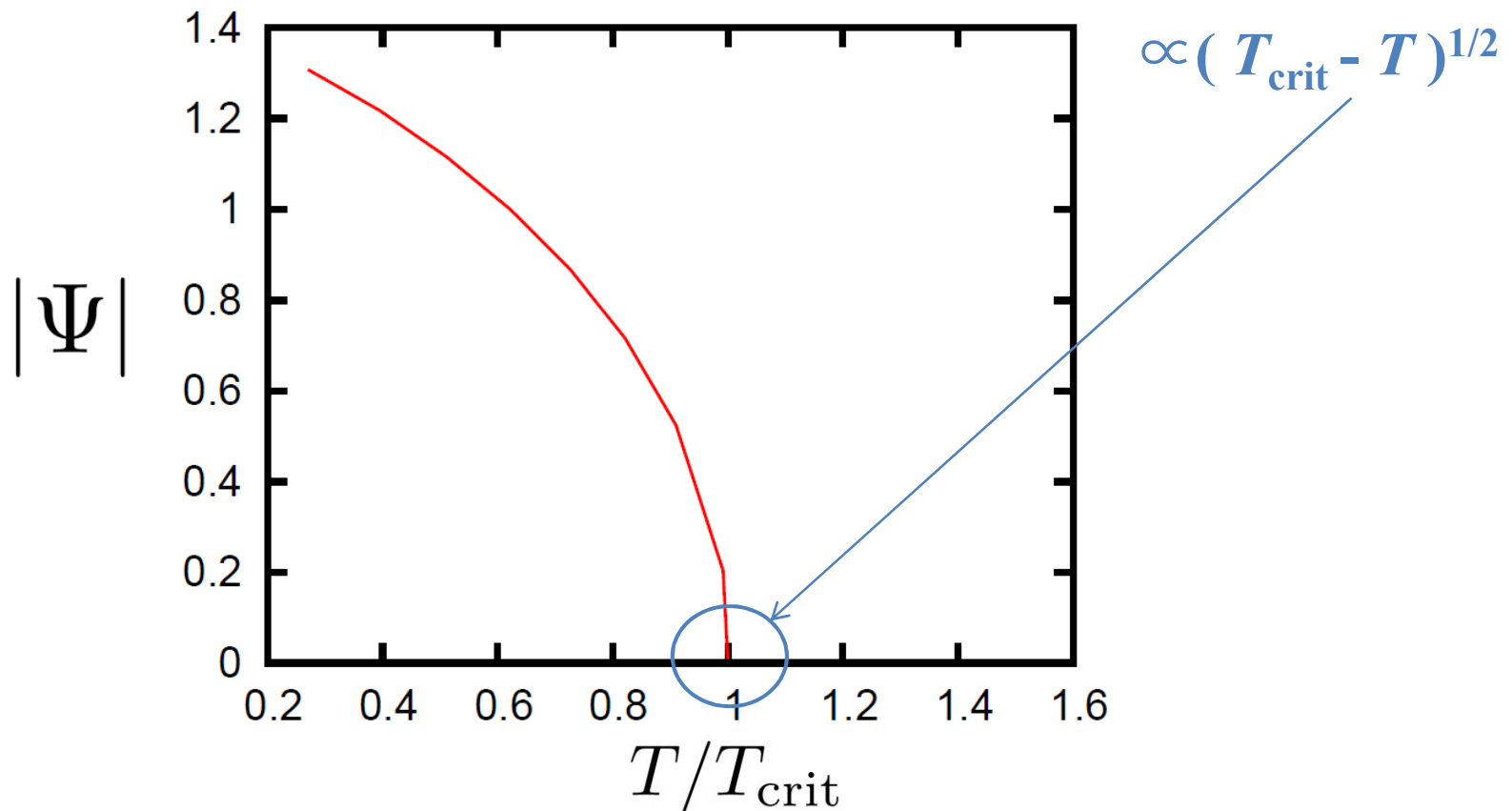
$\propto \exp(-t/\tau_{\text{relax}})$

$\frac{1}{\tau_{\text{relax}}}$



## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

- 結果: オーダーパラメタの温度依存性



## 2. ホログラフィック超伝導における動的凝縮過程

- まとめ

- 非凝縮相からの時間発展によって、凝縮相への遷移が安定に起こることがわかった。
- 線形解析の諸結果をほぼ再現
- 緩和時間  $\leftarrow$  QNM frequency?

- 今後の課題

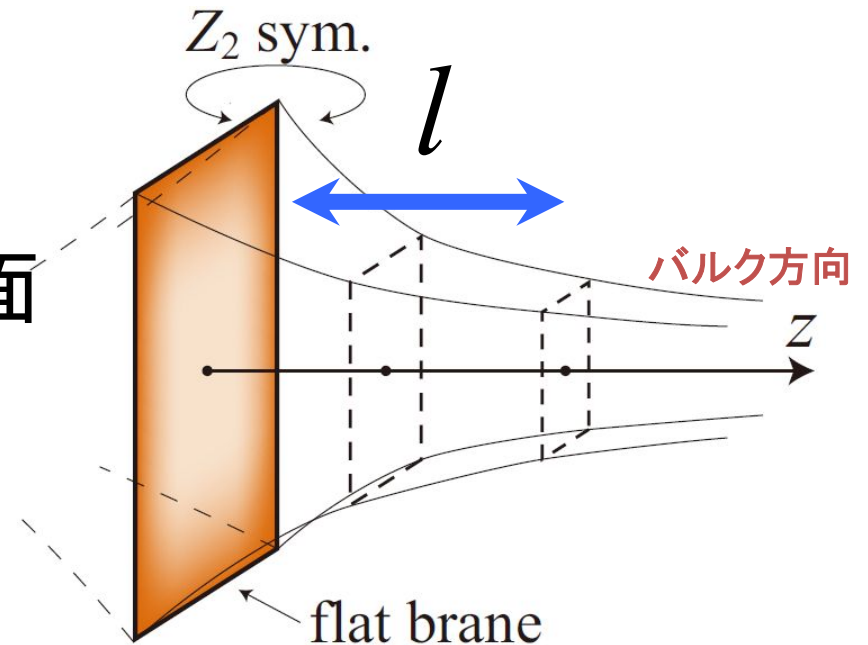
- ほかの種類の場合の凝縮相について
- この解について、各輸送係数を求められるか？
- Time-dependent Ginzburg-Landau方程式でどこまで記述できるか？
- この手法でしか調べられないことは何かがあるか？

# Contents

1. Introduction
2. ホログラフィック超伝導体における動的過程  
[木下、村田、棚橋]
3. RS-IIブレーンワールドモデルにおける  
数値相対論に向けて  
[西條、柴田、田中、棚橋]

# ブレンワールドモデル

- 高次元の**バルク**の中に、我々の世界が4次元超曲面(**ブレン**)として存在



- Randall-Sundrum II (RS- II)モデルに注目
  - **バルク**は反de Sitter (AdS) 時空 / **4次元ブレン**上は**平坦な宇宙**
  - ブレン上の**弱い重力場**は、**通常の4次元重力理論**に従う

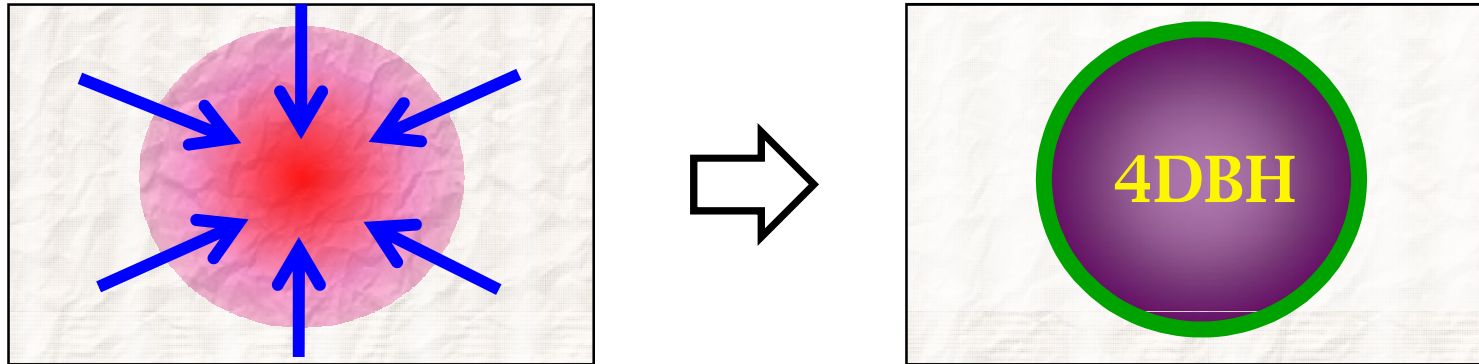
➤ このモデルの特徴は、**重力**が**余剰次元**にも見れるだろう  
 重力  $V(r) = \frac{Gm_1m_2}{r} \left( 1 + \frac{2l^2}{3r^2} \right)$  が**有益**

- Randall-Sundrum II (RS- II)モデルに注目

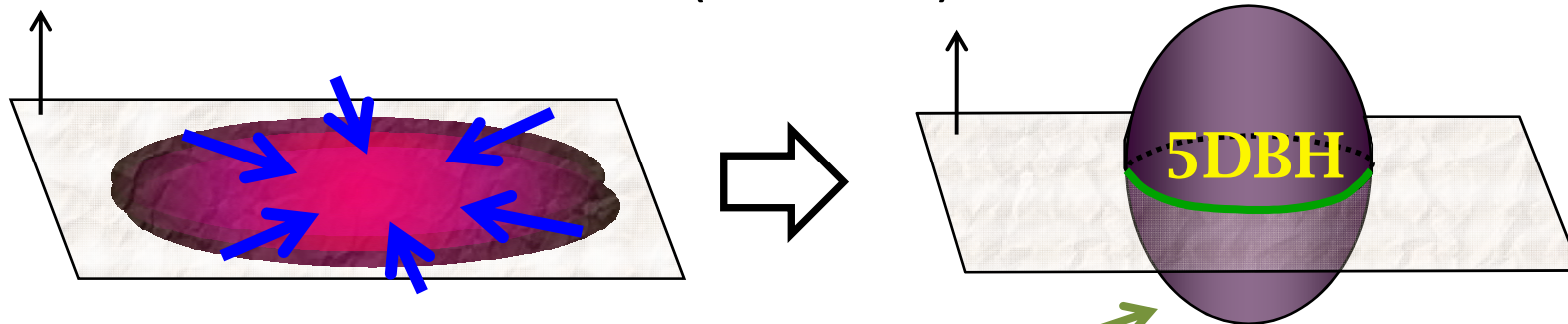
- バルクは反de Sitter (AdS) 時空 / 4次元ブレーン上は平坦な宇宙

ブレーン上の弱い重力場は、通常の4次元重力理論に従う

- 通常の4次元重力 → 物質が重力崩壊して、BHができる



- これに対応して、5次元バルク(AdS時空)では5次元BHができるだろう

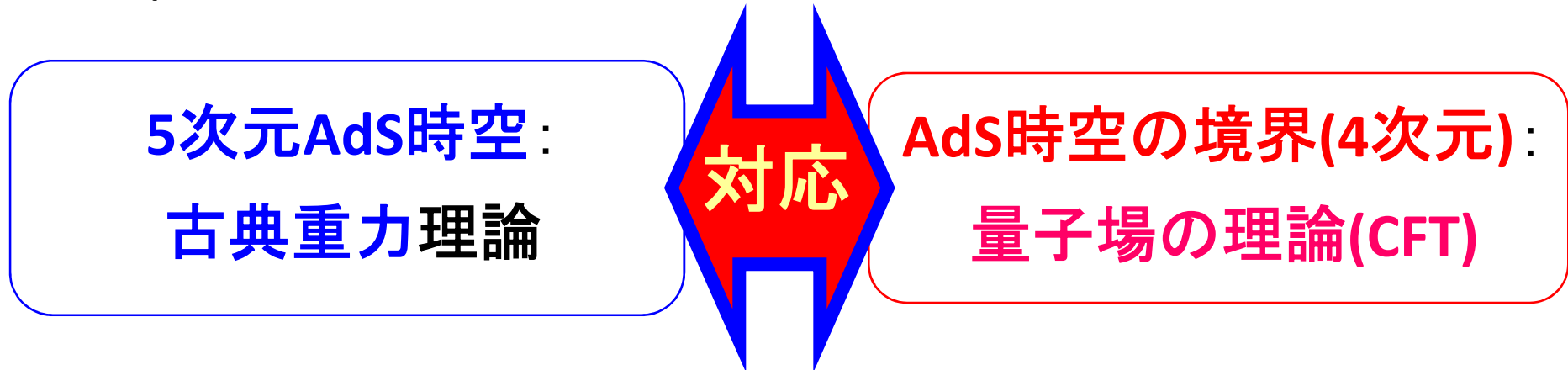


この5次元BHの性質を、AdS/CFT対応に基づいて予想

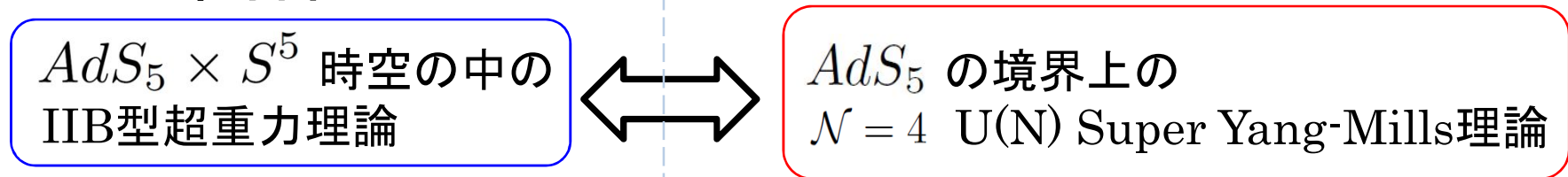
# RS- II モデルにおけるAdS/CFT対応

Gubser (1999) , Hawking et al. (2000)

- AdS/CFT対応:



- 対応関係:



$$Z[h] = \int d[g] \exp(iS_{\text{grav.}}[g]) = \int d[\phi] \exp(iS_{\text{CFT}}[\phi; h]) \equiv \exp(iW_{\text{CFT}}[h])$$

$$\frac{l^3}{G_5} = \frac{2N^2}{\pi} \quad (\text{ } N^2: \text{量子場の自由度} \text{ )}$$



# RS- II モデルにおけるAdS/CFT対応

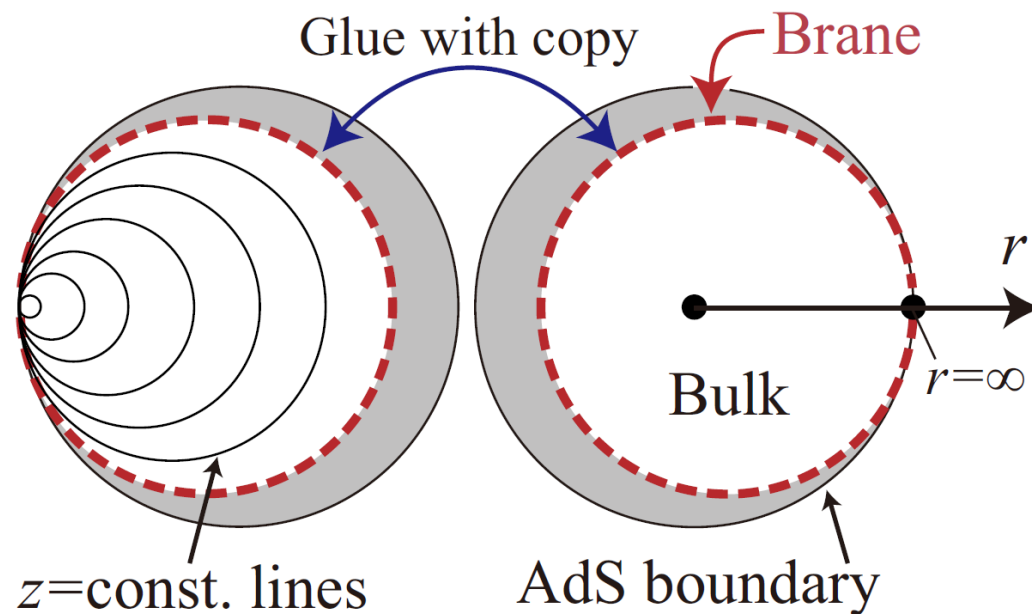
Gubser (1999) , Hawking et al. (2000)

•RSモデルにおけるAdS/CFT対応:

5次元バルク(AdS時空):  
古典重力理論

対応

4次元ブレーン:  
量子場(CFT)が重力と結合  
している理論



# RS- II モデルにおけるAdS/CFT対応

Gubser (1999) , Hawking et al. (2000)

•RSモデルにおけるAdS/CFT対応:

5次元バルク(AdS時空):  
古典重力理論

対応

4次元ブレーン:  
量子場(CFT)が重力と結合  
している理論

例) Newtonポテンシャルへの補正

(Duff&Liu, 2000)

- 5次元バルクの古典重力による計算
- ブレーン上の4次元CFTによる計算

一致

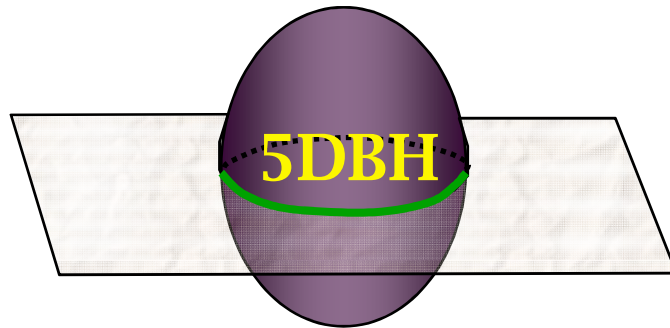
$$V(r) = \frac{Gm_1m_2}{r} \left( 1 + \frac{2l^2}{3r^2} \right)$$

ほか、多数

- この対応が、強い重力がある時にも成立するなら

5次元バルク(AdS時空):

古典重力理論



対応

4次元ブレーン:

量子場(CFT)が  
重力と結合

している理論



- 4次元描像: BHはホーキング放射 ⇒ 静的でない  
⇒ 5次元描像: 古典的BHが静的でない

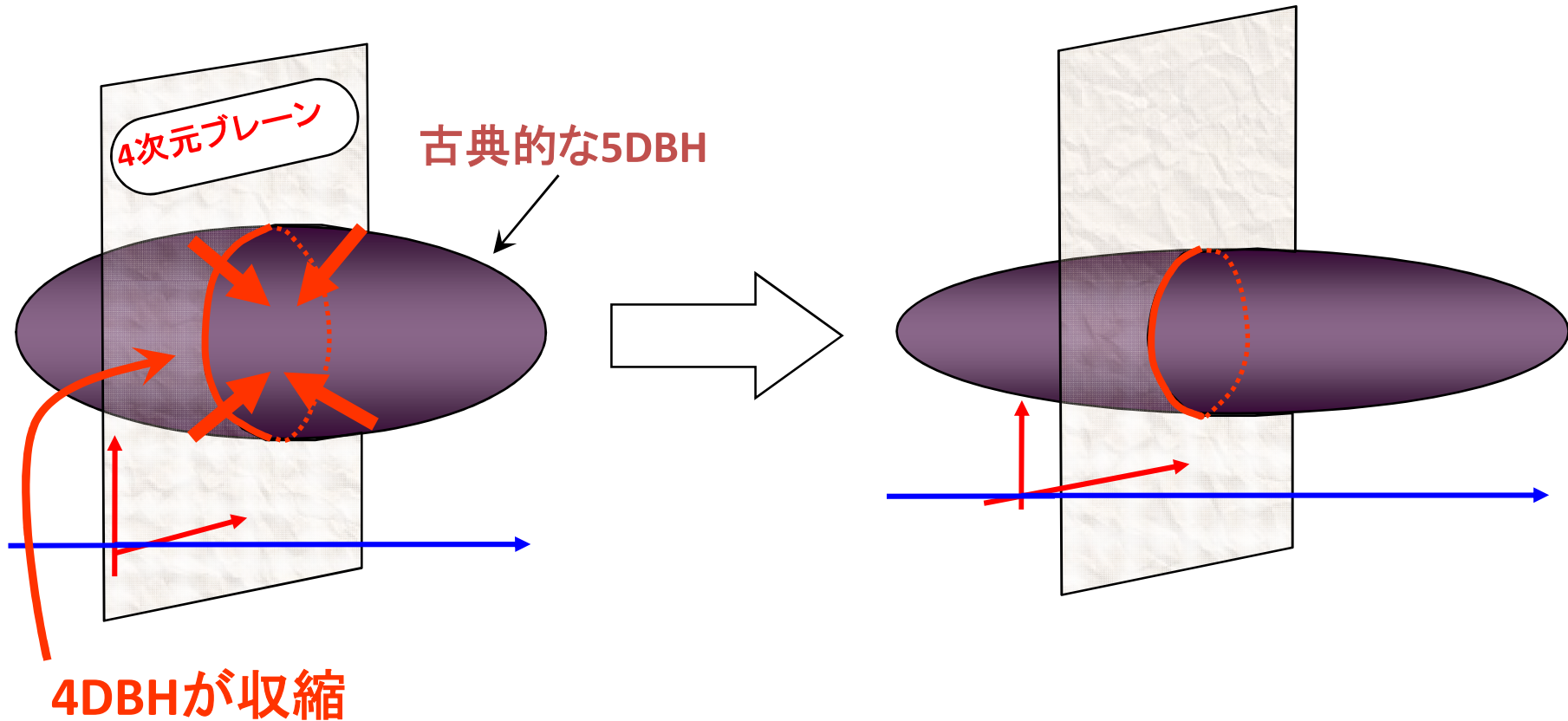
(Tanaka, 2002; Emparan et al., 2002)

- バルク曲率  $\approx$  ブレーン上のCFTのカットオフスケール  
→ バルク曲率より小さなブラックホールには、この対応は成り立たない。  
静的解が存在してもおかしくはない。

- BHの古典的蒸発

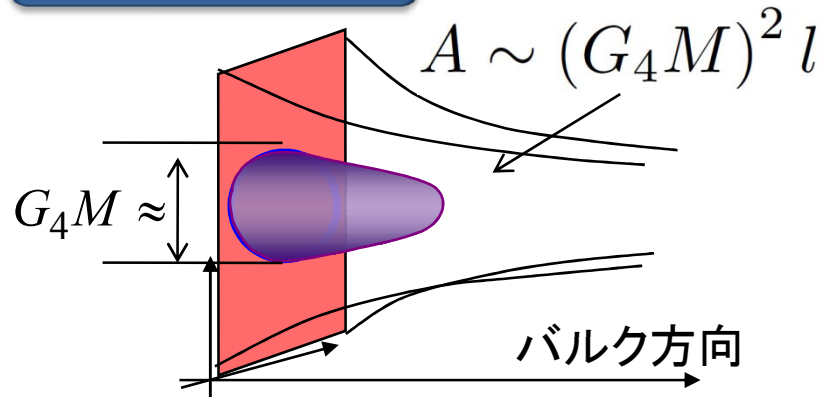
古典的BHの面積増大則

BHがバルクへ抜けていく  
ことで4次元面積減少



- 4次元BHの質量減少率を、両側の理論で見積もってみる:

### 5次元古典重力

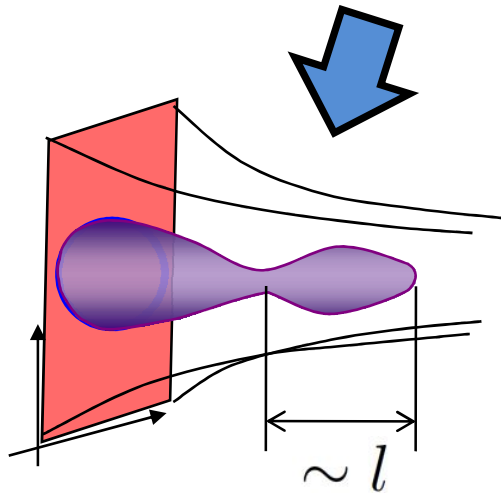


### 4次元の量子場+重力

Hawking 輻射の温度:  $T_H \sim \frac{1}{G_4 M}$

$\Rightarrow \dot{M} \sim N^2 \times T_H^4 r_g^2 \sim \frac{l^2}{G_4^3 M^2}$

$\therefore \frac{\dot{M}}{M} \sim \frac{l^2}{G_4^3 M^3}$



この変化が起こるタイムスケールは  $t_{\text{dyn.}} \sim G_4 M$

バルクに向けて、面積  $A \sim l^3$  のBHが  $t_{\text{dyn.}}^{-1}$  のレートで抜けるとする

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} \sim \frac{d}{dt} (G_4^2 M^2 l) \sim \frac{l^3}{G_4 M}, \quad \frac{\dot{M}}{M} \sim \frac{l^2}{G_4^3 M^3}$

一致

# BH蒸発時間の予言と $l$ への制限

- 普通のBH(質量  $M$ ) はホーキング放射する:
  - $F = \sigma T^4$ ,  $T = \kappa / 2\pi \propto 1/M \rightarrow dM/dt \propto 1/M^2$
  - (蒸発時間)  $\sim 10^{75} \times (M / M_{\text{太陽}})^3$  年
- バルク/ブレーン対応からくる量子場があると:
  - 場の個数が  $N^2 \sim l^2 / G_4 = 10^{73} \times (l / 1 \text{ mm})^2$
  - (蒸発時間)  $\sim 100 \times (l / 1 \text{ mm})^2 (M / M_{\text{太陽}})^3$  年  
 $\sim 10^4 \times (l / 56 \mu\text{m})^2 (M / M_{\text{太陽}})^3$  年
- 長寿命のBHが見つければ、 $l$  に強い上限が与えられる。  
(宇宙年齢  $\rightarrow l$  の上限を3桁小さくできる)

# BH蒸発時間の予言と $l$ への制限

## ◆ホーキング放射による、BH(質量 $M$ ) の蒸発時間:

- バルク/ブレン対応からくる量子場があると:
  - 場の個数が  $N^2 \sim l^2/G_4 = 10^{73} \times (l/1 \text{ mm})^2$
  - (蒸発時間)  $\sim 100 \times (l/1 \text{ mm})^2 (M/M_{\text{太陽}})^3$  年  
 $\sim 10^4 \times (l/56 \mu\text{m})^2 (M/M_{\text{太陽}})^3$  年

## ◆実際の観測から得られる $l$ への制限

- X線連星の軌道周期変化: [Johansen et al. (2009)]  
A0620-00:  $10M_{\text{太陽}}$  BH +  $200M_{\text{太陽}}$  K型星  $\rightarrow l < 0.132 \text{ mm}$
- 球状星団RZ2109内のBHと、その年齢  
[Gnedin et al. (2009)]  
 $10M_{\text{太陽}}$ 、年齢  $10^9$  年  $\rightarrow l < 0.003 \text{ mm}$

# ここまでのまとめ

- ブレーンワールドモデルにおけるAdS/CFT対応
  - RS-IIモデル上のブラックホールの「古典的蒸発」仮説
  - これを利用した余剰次元スケール  $l$  への制限
- この検証のためには、RSブレーンワールドモデルにおける動的ブラックホールについて調べる必要がある。
  - 数値手法を援用して解析を行う。



### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

1. 平坦な時空における数値相対論のFormalism
2. 漸近AdS時空およびブレーンワールドモデルへの拡張

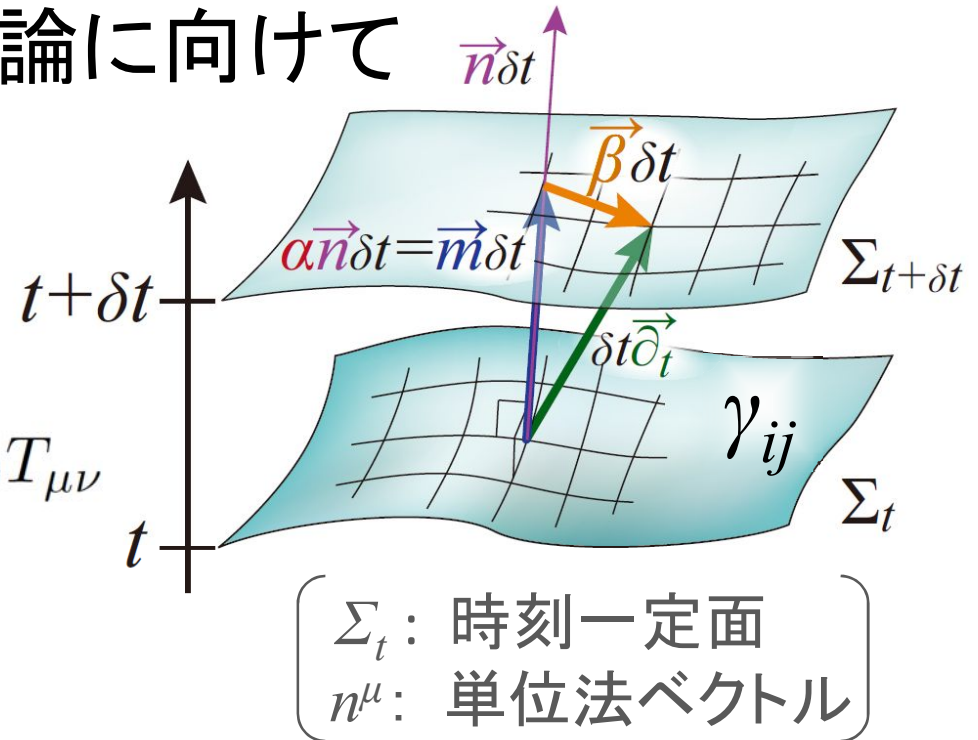
### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

- (D-1)+1分解:

時間座標  $t$  を導入し、  
Einstein方程式

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_{\mathcal{D}}T_{\mu\nu}$$

を時間発展方程式の形にする



- 重要な量:

$\gamma_{ij}$ : 時刻一定面  $\Sigma_t$  上の計量

$K_{ij} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n\gamma_{ij}$ :  $\Sigma_t$  の外的曲率 ( $\partial_t\gamma_{ij}$  に相当)

$\alpha$ : ラプス関数 ( $\Sigma_t$  の取り方の自由度を記述)

$\beta^i$ : シフトベクトル (空間座標の取り方の自由度を記述)

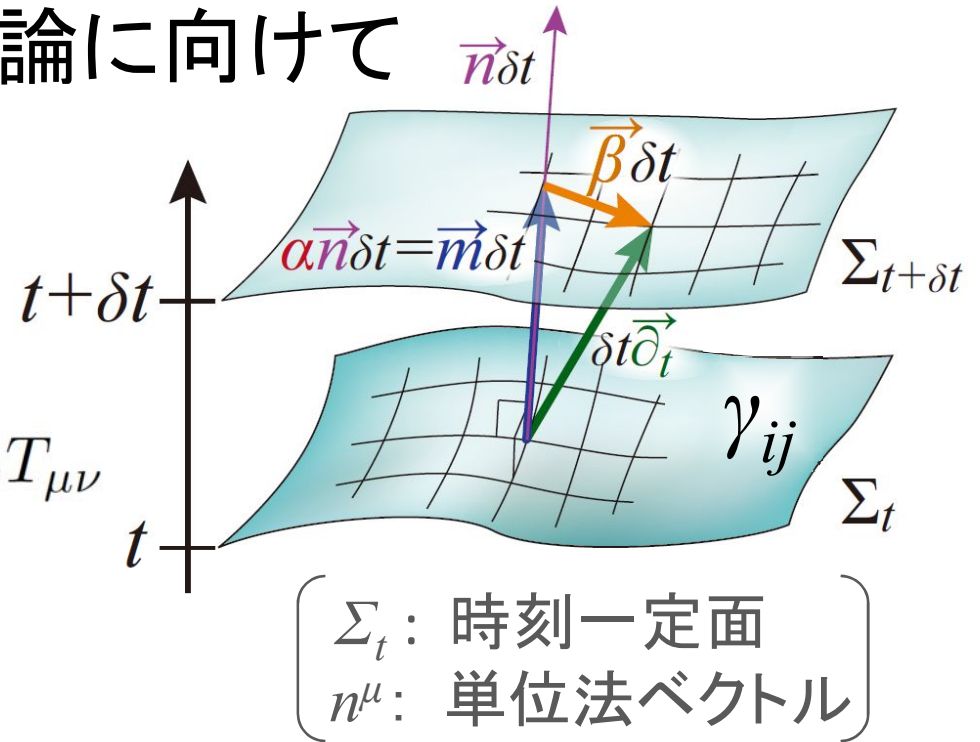
### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

- (D-1)+1分解:

時間座標  $t$  を導入し、  
Einstein方程式

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_{\mathcal{D}}T_{\mu\nu}$$

を時間発展方程式の形にする



- 方程式の分解

- $\Sigma_t$ に射影  $\rightarrow$  運動方程式:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu}$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \left\{ R_{ij}^{(\gamma)} + K K_{ij} - 2K_{i\mu} K^\mu_j - 8\pi G_{\mathcal{D}} \left( S_{ij} - \frac{S - \rho}{D-2} \gamma_{ij} \right) \right\}$$

- $n^\mu$ に射影  $\rightarrow$  拘束条件:

$$R^{(\gamma)} + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi G_{\mathcal{D}} \rho, \quad D_j K^j_i - D_i K = 8\pi G_{\mathcal{D}} j_i$$

### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

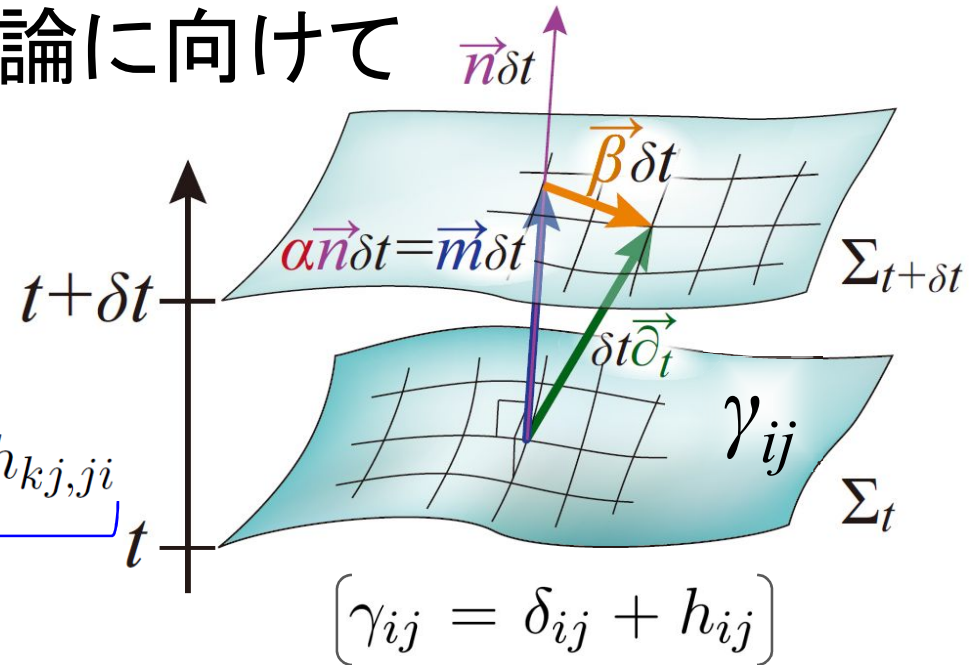
- BSSN formalism:  
先程の方程式系は不安定

∴ 方程式を線形化

$$\underbrace{\ddot{h}_{ik} = \Delta h_{ik}}_{\text{波動方程式}} + \underbrace{h_{jj,ik} - h_{ij,jk} - h_{kj,ji}}_{\text{余分な項}}$$

波動方程式 と 余分な項

→ 拘束条件を破るモードが発生



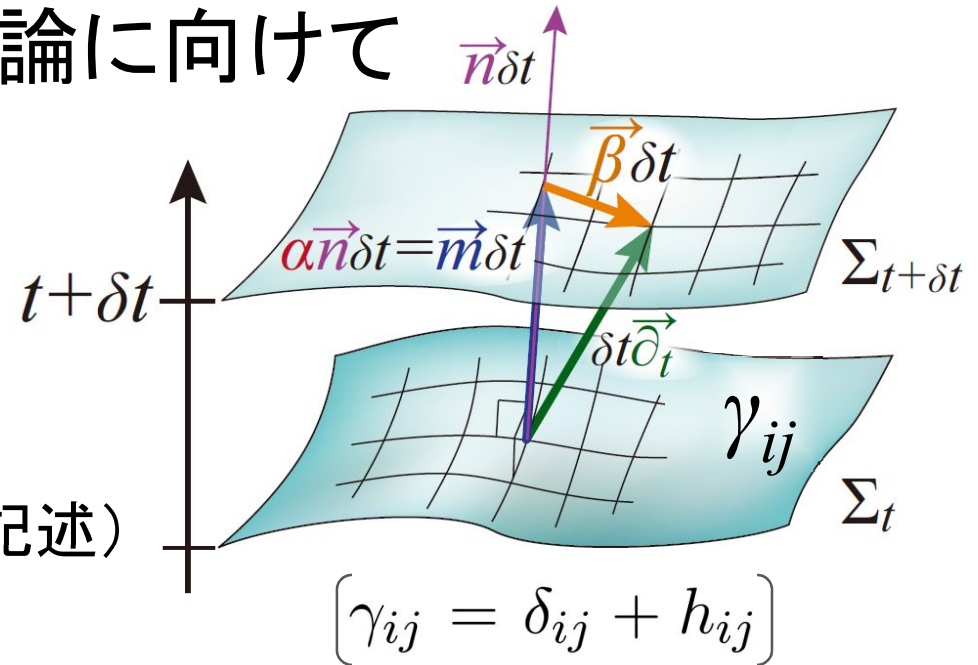
➤ 新変数を導入し、方程式系を書き換える。

$$\gamma_{ij} = \chi^{-1} \tilde{\gamma}_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{ij} \Gamma_{jk}^i = -\tilde{\gamma}^{ik}_{,k}, \quad K_{ij} = A_{ij} + \frac{K}{D-1} \gamma_{ij}, \quad \tilde{A}_{ij} \equiv \chi A_{ij}$$

$$\tilde{h}_{ij} = \Delta \tilde{h}_{ij} + \underbrace{\left( \tilde{\Gamma}_{(i,j)} \right)^{\text{TF}} + (D-3) (\chi_{,ij})^{\text{TF}}}_{\text{余分な項}}$$

### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

- ゲージ条件：
  - $\alpha$ ：ラプス関数  
( $\Sigma_t$ の取り方の自由度を記述)
  - $\beta^i$ ：シフトベクトル  
(空間座標の取り方の自由度を記述)



これらは自由に決めてよい  
→ 性質のよい発展方程式を与える。

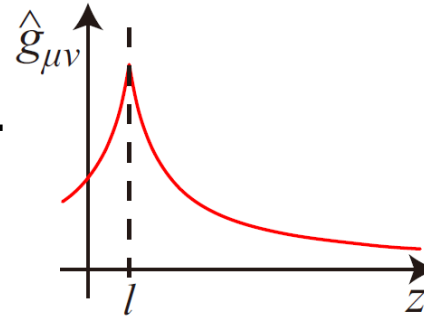
$$\alpha \text{の発展方程式: } \partial_t \alpha = -\eta_\alpha \alpha K$$

$$\beta^i \text{の発展方程式: } \partial_t \beta^i = \frac{(D-1)}{2(D-2)} v_{\text{long}}^2 B^i, \quad \partial_t B^i = \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta_\beta B^i$$

- 以上が漸近平坦な時空における定式化。

### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

- 漸近AdS時空や  
ブレーンワールドモデルに  
先程の手法を応用したい。



- AdS時空の計量:

$$ds^2 = \left( \frac{l^2}{z^2} \right) \left( \eta_{\mu\nu}^{(D-1)} dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right) \quad \left[ \eta_{\mu\nu}^{(D-1)} : \text{平坦時空の計量} \right]$$

- 先程との違い:

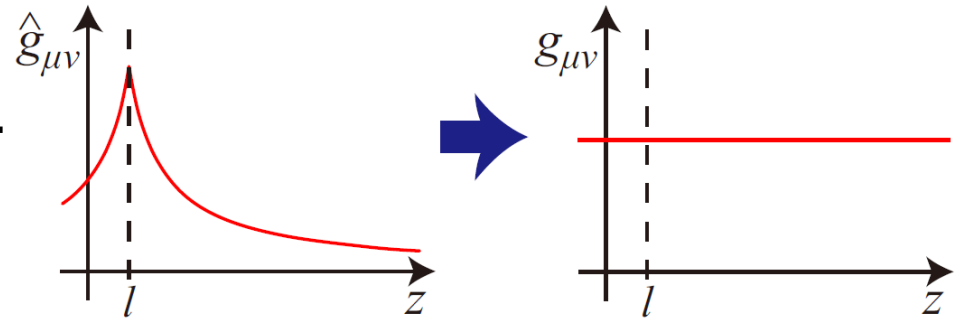
- ✓ 非摂動状態で、計量が空間的に変化
- ✓ 計量の境界条件

ex) 遠方で「定数に漸近」→「 $l^2/z^2$ に漸近」に  
ブレーン位置での接続条件

- このファクターの影響を取り除けば、  
漸近平坦な場合と似た要領で解けるだろう。

### 3. AdS時空とブレーンワールドモデルにおける 数値相対論に向けて

- 漸近AdS時空や  
ブレーンワールドモデルに  
先程の手法を応用したい。



- AdS時空の計量:

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left( \eta_{\mu\nu}^{(D-1)} dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right) \quad \left[ \eta_{\mu\nu}^{(D-1)} : \text{平坦時空の計量} \right]$$

このファクターの影響をなるべく取り除くために、

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{l^2}{z^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{l^2}{z^2} \left[ -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt) \right]$$

と変数を定義して、方程式を立てる。

→ 方程式は、先程の式 + 付加項 の形に。

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + (D-2) (v_\mu v_\nu - \nabla_\mu v_\nu - v^\rho v_\rho g_{\mu\nu}) - (\nabla_\rho v^\rho) g_{\mu\nu} \quad \left[ v_\mu \equiv \nabla_\mu \log(l/z) = -\frac{\delta^z_\mu}{z} \right]$$

•BSSN formalismにおける付加項のついた運動方程式

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right) \chi = \frac{2\chi}{\mathcal{D} - 1} \left(\alpha K - \partial_k \beta^k\right)$$

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right) \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{jk} \partial_i \beta^k - \frac{2}{\mathcal{D} - 1} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right) \tilde{A}_{ij} = \chi \left\{ - \left(D_k D^k \alpha\right)^{\text{TF}} + \alpha \left(R_{ij}^{\text{TF}} - 8\pi S_{ij}^{\text{TF}}\right) \right\} + \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik} \tilde{A}^k_j\right) \\ - \frac{2}{\mathcal{D} - 1} \left(\partial_k \beta^k\right) \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{A}_{jk} \partial_i \beta^k - \frac{\mathcal{D} - 2}{2} \alpha \chi \left(\tilde{\Gamma}_{ij}^z\right)^{\text{TF}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right) K = -D_i D^i \alpha + \alpha \left[ \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{K^2}{\mathcal{D} - 1} + \frac{8\pi G_{\mathcal{D}}}{\mathcal{D} - 2} \{S + (\mathcal{D} - 3) \rho\} \right] \\ + \frac{\mathcal{D} - 1}{z} \left\{ \left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right) \left(\frac{\beta^z}{\alpha}\right) + \chi \tilde{\gamma}^{zi} \alpha_{,i} \right\} + \frac{\mathcal{D} - 3}{z} K \beta^z + \alpha \left[ \frac{\mathcal{D} - 1}{z^2} (1 - g^{zz}) - \frac{\mathcal{D} - 3}{2z} \tilde{\gamma}^{zi} \chi_{,i} - \frac{1}{z} \tilde{\Gamma}^z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right) \tilde{\Gamma}^i = -2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + \frac{\mathcal{D} - 3}{\mathcal{D} - 1} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \frac{2}{\mathcal{D} - 1} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i \\ + 2\alpha \left( \tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} - \frac{\mathcal{D} - 2}{\mathcal{D} - 1} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - \frac{\mathcal{D} - 1}{2} \tilde{A}^{ij} \partial_j \log \chi - 8\pi G_{\mathcal{D}} \tilde{\gamma}^{ij} j_j \right) \\ + \frac{2(\mathcal{D} - 2)\alpha}{z} \left\{ \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \left(\frac{\beta^z}{\alpha}\right) - \tilde{A}^{zi} - \frac{K}{\mathcal{D} - 1} \tilde{\gamma}^{zi} \right\} \end{aligned}$$

現在の数値コードにこれらの付加項を足せば、漸近AdS時空に適した計算が可能に。



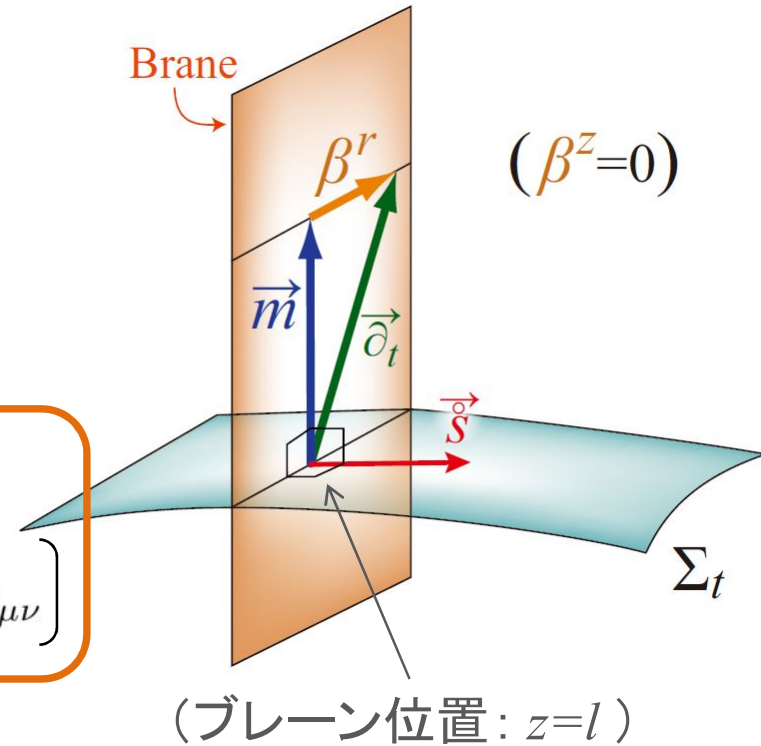
● ブレーンの位置での境界条件

ブレーン=正張力  $\lambda$  を持った膜

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G\lambda\delta(z-l)$$

ブレーン位置での計量接続条件

$$\hat{K}_{\mu\nu} = \frac{1}{l}\hat{\gamma}_{\mu\nu} \cdot \left[ \hat{K}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\hat{s}}\hat{\gamma}_{\mu\nu} \sim -\frac{z}{2l}\partial_z\hat{\gamma}_{\mu\nu} \right]$$



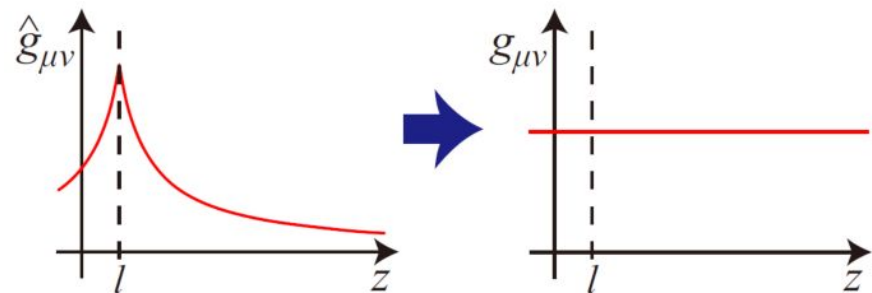
ファクター  $z/l$  を取り除くと

$$\left[ \hat{s}_\mu \equiv \frac{z}{l}\hat{\hat{s}}_\mu \quad \hat{K}_{\mu\nu} \equiv -\hat{\gamma}_\mu^\rho \hat{\gamma}_\nu^\lambda \nabla_\rho \hat{s}_\lambda \right]$$

$$\hat{K}_{\mu\nu} = \frac{1 - \sqrt{g^{zz}}}{z} \hat{\gamma}_{\mu\nu}$$

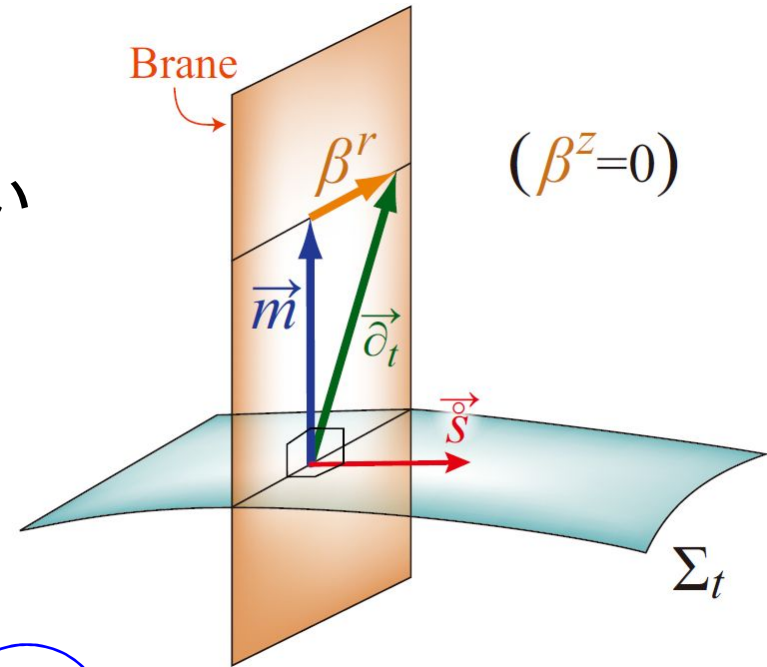
だいたいNeumann条件に。

$$(g^{zz} = 1 \Rightarrow \partial_z \gamma_{\mu\nu} = 0)$$



# ●ゲージ条件と境界条件

- ブレーンの位置座標を  $z=l$  に固定したい
- $\Sigma_t$  をブレーン前後でなめらかに取る  
 $\rightarrow \beta^z=0$  が必要



## •ゲージ条件

$$\begin{cases} \partial_t \alpha = -\eta_\alpha \alpha K \\ \partial_t \beta^i = \frac{(D-1)}{2(D-2)} v_{\text{long}}^2 B^i, & \partial_t B^i = \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta_\beta B^i \end{cases}$$

$\beta^z=0 \rightarrow$  ブレーン上で  $\tilde{\Gamma}^z = -\tilde{\gamma}^{z\mu}_{,\mu} = 0$  が必要  $\rightarrow \partial_z \gamma_{zz}$

•  $\gamma_{Iz}=0$  を要求  $\rightarrow \partial_z \beta_I=0$  が必要

- 計量の接続条件  $\rightarrow \partial_z \gamma_{IJ}, K_{zI}, \alpha$
- 接続条件の時間微分  $\rightarrow \partial_z K_{IJ}$
- ゲージ条件 + 接続条件  $\rightarrow \partial_z K_{zz}$

これで全変数に  
境界条件がついた。

# Future tasks

- 適切なゲージ条件の構成
  - 漸近条件
  - 初期データ構成
  - 数値コード開発
- 
- AdS時空の境界上における境界条件  
(本来のAdS/CFT対応のための計算には必要)

# まとめ

- 「付加項」を方程式系に足すことで、漸近平坦な時空における数値相対論のスキームを漸近AdS時空に適した形に修正できる。
- ブレーンの導入は、適切な境界条件を課すことで行われる。その境界条件を明らかにした。
- 歪んだ高次元時空における強重力現象
  - ブレーンワールドモデルなどの高次元宇宙モデルの検証
  - 動的現象についてのAdS/CFT対応