

Chern-Simons相互作用の入った 荷電ブラックホールの不均一な不安定性と そのCFT dual

Shin Nakamura (Dept. Phys. Kyoto Univ.)

Based on S.N.-Ooguri-Park, arXiv:0911.0679[hep-th]
(to appear Phys. Rev. D)

講演要旨

- Einstein ($\Lambda < 0$) + Maxwell + Chern-Simons理論における荷電black holeの安定性解析を行った。
- Chern-Simons相互作用が十分大きい場合は空間的に不均一な不安定モードが存在することが判明した。
- AdS/CFT対応の視点では、CFT側で均一相から不均一相への相転移が存在することを示唆する。

Motivation

もともと有限バリオン**密度**系のholographic dualを構成したかった。

しかしバリオン密度から来るバックリアクションを厳密に扱うのは、一般に容易ではない。

ここでは「**密度**」のバックリアクションが厳密に扱える**charged black hole**を用いた研究をすることにした。

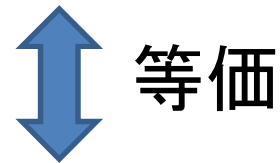
Einstein+Maxwell+Chern-Simons

なぜChern-Simons項を
考えるのか？

AdS/CFT 対応

典型的な対応例

3+1次元のN=4 large- N_c SU(N_c) super Yang-Mills (SYM)
理論の強結合極限($g_{\text{YM}}^2 N_c \gg 1$)の量子論



AdS₅ × S⁵上のType IIB super gravity理論の古典論

ゲージ理論側の量子効果も、重力側では古典的に表現されている。

量子異常(anomaly)

古典的には存在する理論の対称性が量子効果によって破れる物理現象。

ゲージ理論側にanomalyがあれば、対応する重力理論側にも、anomalyの効果を表す項が古典的に存在しているはずである。



この講演で扱う重力理論のChern-Simons項：
N=4 SYMのR-symmetryのanomalyを表現している。

Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 253

具体的なセットアップ

(4d N=4 SYM理論にdualな重力理論の解析を念頭に)

重力側の理論

5次元にreductionして考える。

10d type IIB supergravity \rightarrow S^5 reduction \rightarrow U(1) truncation:

Günaydin, Sierra and Townsend, NPB242(1984)244;
Cvetič et. al., NPB668(1999)96.

$$16\pi G_5 L = \sqrt{-g} \left(R + 12 - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right) + \frac{\alpha}{3!} \varepsilon^{IJKLM} A_I F_{JK} F_{LM}$$
$$\alpha = 1/(2\sqrt{3})$$

(負の宇宙項を持つN=2 5d minimal gauged supergravityのbosonic part)

5-dim. Einstein ($\Lambda < 0$) + Maxwell + CS term.

- この理論の解は $AdS_5 \times S^5$ の解に矛盾なく埋め込まれる。
この理論は 4d N=4 SYM theory (with R-charge) に等価。
Chern-Simons結合 α はSUGRAの代数が閉じるための要請から特別な値に決まっている。

運

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} (R + 12) = \frac{1}{2} \left(F_{ML} F_N^L - \frac{1}{4} g_{MN} F^2 \right),$$

$$\sqrt{-g} \nabla_M F^{MN} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon^{NIJKL} F_{IJ} F_{KL} = 0.$$

電場のみが存在する状況を考えると、解に対する Chern-Simons項の寄与は消える。

解は通常の AdS-Reissner-Nordström black hole.

しかし、解のまわりの揺らぎを考慮する場合は Chern-Simons項が重要な寄与をする。

何が起きうるのか、
5次元Minkowski空間上の
Maxwell + Chern-Simons理論で
様子を見てみる。

平坦な5次元時空上のMaxwell + CS 理論(重力なし)

運動方程式:

$$\partial_M F^{MN} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon^{NIJKL} F_{IJ} F_{KL} = 0.$$

背景電場 $F_{01}=E$ の存在を仮定すると、Lorenz gauge *では

$$\partial^2 A_N + 4\alpha E \varepsilon^{01NKL} \partial_K A_L + O(A^2) = 0.$$

次のような線形摂動を考える: $A_N = a_N e^{-i\omega t + ikx^2}$,

$$\partial^2 A_3 - 4\alpha E (ik) A_4 = 0,$$

$$\partial^2 A_4 + 4\alpha E (ik) A_3 = 0.$$

(decoupleした他の自由度の運動方程式は省略)

(* ゲージ不変なformulationも可能。)

$$\partial^2 A_3 - 4\alpha E (ik) A_4 = 0, \quad (1)$$

$$\partial^2 A_4 + 4\alpha E (ik) A_3 = 0. \quad (2)$$

↓ (1) ± i(2) 「円偏向」に組んで対角化

$$(\omega^2 - k^2)(A_3 \pm iA_4) \mp 4\alpha Ek(A_3 \pm iA_4) = 0$$

この円偏向モードの分散関係は

$$\omega^2 - (k \pm 2\alpha E)^2 = -(2\alpha E)^2$$

tachyonic?

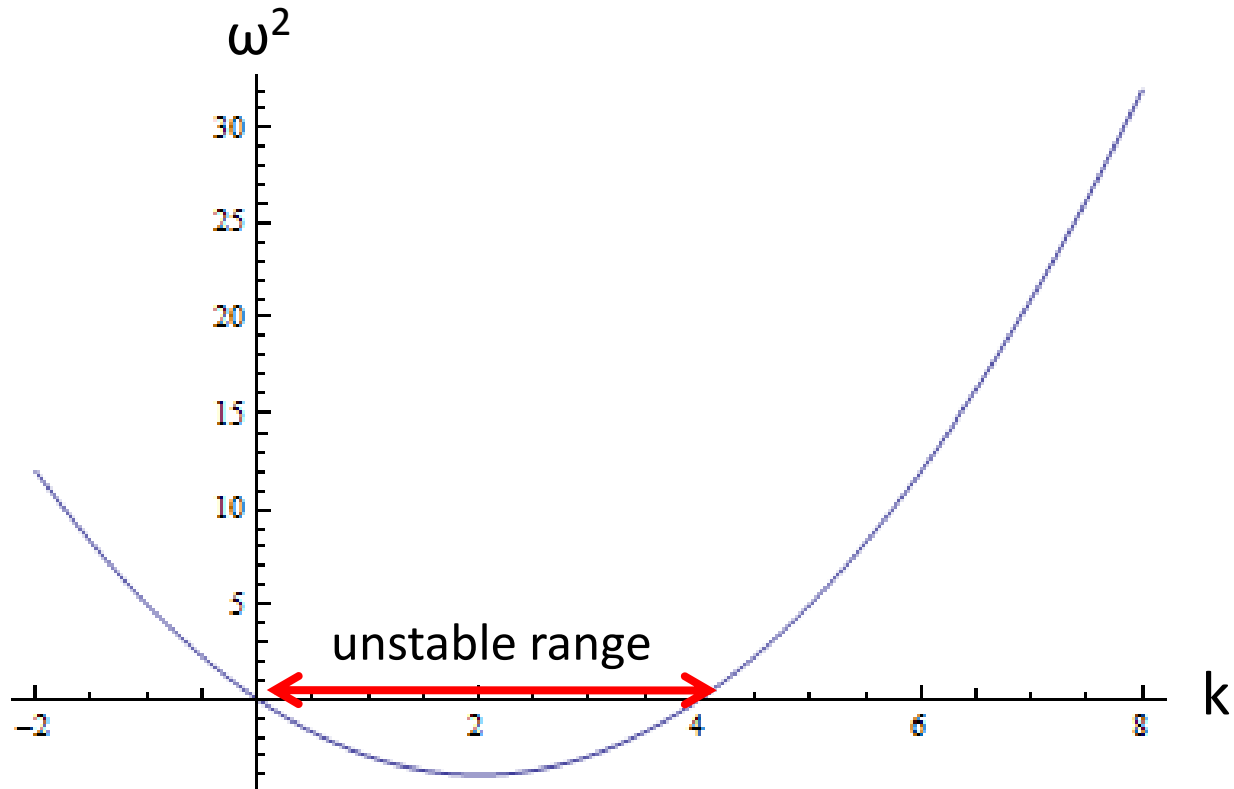
このモードは、運動量が以下の範囲にある場合 tachyonic となる。

$$0 < |k| < 4\alpha E$$

k=0を含まないことに注意。

分散関係

分散関係は**非標準的**な振る舞いを示す。



Spectrumの最低は $k=2\alpha E \neq 0$ に位置している。



電場とChern-Simons結合に比例

不均一な不安定性

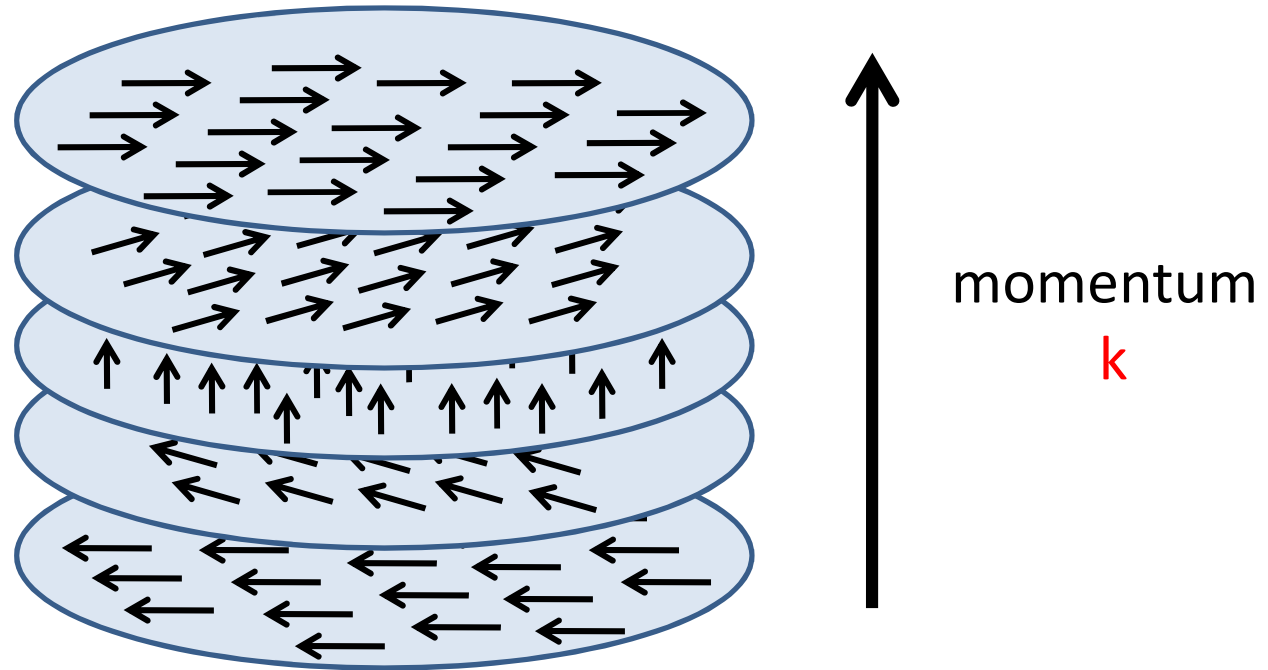
この不安定性は有限運動量のみで起きる。



- 不安定モードの凝縮は空間的に不均一
(Spatially modulated)
- このモードは円偏向ベクトル場

並進および回転対称性の自発的破れ

凝縮のイメージ



- Helical な構造を持つ。
- 回転および並進の自発的破れ

重力理論側での厳密な解析を
行くと、どうなるか？

AdS-RN black holeまわりの「円偏向モード」を解析

- 背景電場(charge)には**上限**がある:
chargeを上げていくと温度が低下し $T=0$ となる極限が存在:**extremal limit**
chargeが最大となるextremal black holeで解析するのが良いであろう。
- 背景時空が曲がっているため、単純に「質量項」のみからは不安定性を判定できない。(参考: Breitenlohner-Freedman bound)
適切な境界条件のもと、**揺らぎの振幅が時間とともに増大するかどうか**で判断。
- 「円偏向モード」は線形摂動のレベルで**gravitonとも結合する**:
graviton + 円偏向モード を対角化する必要がある。

重力理論の安定性解析の言葉では、CS結合存在下における vector perturbationの安定性解析。

解析の概略と結果


Near-horizonでの解析

5d extremal RN-AdS BHのnear-horizon geometry: $AdS_2 \times R^3$

(boundaryが $R^{3,1}$ の場合を考える。)

背景電場も

(定数) \times (AdS₂のvolume form)

 背景が簡単となり解析的に調べられる。

- AdS₂にKK reductionして考える。 (momentum入れる方向は x^2 とする。)

	AdS ₂ \times R ³ ($x^{\mu=0,1}, x^2, x^{i=3,4}$)	AdS ₂ ($x^{\mu=0,1}$)
A_i	Maxwell	scalar
$h_{\mu i}$	off-diagonal graviton	KK gauge field (with $m^2=k^2$)
h_{2i}	off-diagonal graviton	Stückelberg field

- mass matrixの最低固有値がAdS₂のBF boundを切るかどうか調べる。

Breitenlohner-Freedman bound

d+1 次元 AdS 時空

$$ds^2 = L^2 \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2}{z^2} \quad \text{において}$$

「質量」 m のスカラー場は以下の条件を満たせば安定:

$$m^2 \geq -\frac{d^2}{4L^2}$$

Breitenlohner-Freedman bound

安定とは？

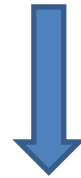
時間発展とともに振幅が増大しない。

The near-horizon geometry

RN black hole:

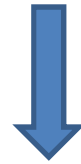
$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(-f(z) dt^2 + d\vec{x}^2 + f(z)^{-1} dz^2 \right),$$

$$f(z) = 1 - M z^4 + \frac{q^2}{12} z^6, \quad F_{z_0} = q z, \quad M = \frac{1}{z_H^4} + \frac{q^2}{12} z_H^2, \quad T_H = \frac{1}{\pi z_H} \left(1 - \frac{1}{24} q^2 z_H^6 \right)$$



Extremal 極限 $T=0$ となるようにMとqの組み合わせを選ぶ.

$$f(z) = \left(1 - \left(\frac{z}{z_H} \right)^2 \right)^2 \left(1 + 2 \left(\frac{z}{z_H} \right)^2 \right), \quad M = \frac{3}{z_H^4}, \quad \frac{q^2}{12} = 2z_H^{-6}, \quad T_H = 0.$$



Near-horizon 極限

$$y = 1 - \frac{z}{z_H}, \quad y \approx 0 \ll 1, \quad (X^\mu = x^\mu / z_H)$$

$$ds^2 = \frac{1}{12\xi^2} \left(-dt^2 + d\xi^2 \right) + d\vec{X}^2, \quad \xi = \frac{1}{12y} \quad \text{AdS}_2 \times \mathbb{R}^3$$

$$F_{\xi_0} = 2\sqrt{6} \frac{1}{12\xi^2}.$$

電場は **const. \times vol. form.**

Near-horizon時空上での

Maxell + CS の解析

$$ds^2 = \frac{1}{12\xi^2}(-dt^2 + d\xi^2), \quad F_{\xi 0} = 2\sqrt{6} \frac{1}{12\xi^2}.$$

$$\text{BF bound: } m^2 \geq -\frac{1^2}{4(\frac{1}{12})} = -3$$

$$\begin{aligned} \omega^2 - (k \pm 2\alpha E)^2 &= -(2\alpha E)^2 \\ -(2\alpha E)^2 &= -96\alpha^2 < -3, \end{aligned}$$

$$|\alpha| > \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

不安定となるための条件

$$|\alpha| = \frac{1}{2\sqrt{3}} > \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \text{for SUGRA}$$

$$m^2 = -8$$

ここまでの解析では、CS 項の寄与は BF bound を破る。
(ただし、まだ graviton との結合は入れていない。)

Gravitonとの結合

ゲージ場は運動項を通じてgravitonとlinear perturbationのレベルで結合する。

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-g}F_{MN}F^{MN} = -\sqrt{-g}\bar{F}^{\mu\nu}h_{\mu}^i F_{\nu i} + \dots$$

$$g_{\mu i} = \bar{g}_{\mu i} + h_{\mu i}, \quad f_{\nu i} = \partial_{\nu}A_i - \partial_i A_{\nu} \quad , (\mu, \nu) \in (0,1)$$

metricのoff-diagonal 部分と結合.

↑ 2d (AdS₂) の視点では
KK-gauge 場.

	AdS ₂ × R ³ (x ^{μ=0,1} , x ² , x ^{i=3,4})	AdS ₂ (x ^{μ=0,1})
A _i	Maxwell	scalar
h _{μi}	off-diagonal graviton	KK gauge field
h _{2i}	off-diagonal graviton	Stückelberg field

$$\begin{aligned}
\frac{L_{\text{eff}}}{\sqrt{-\bar{g}_{(2d)}}} &= -\frac{1}{4} K_{\mu\nu}^{(i)} K^{(i)\mu\nu} - \frac{1}{2} \left| \partial_\mu h_2^{(i)} - ikh_\mu^{(i)} \right|^2 && \text{graviton} \\
&\quad - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{\mu j} F^{\mu j} - \frac{\alpha}{3!} \cdot 6 \cdot E \varepsilon^{ijk} A_i F_{jk} && \text{Maxwell+CS} \\
&\quad - \sqrt{-\bar{g}_{(2d)}} E \varepsilon_{\mu\nu} \cdot F_j^\mu h^{\nu j} && \text{coupling}
\end{aligned}$$

運動方程式:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\text{AdS}_2}^2 + \partial_j \partial^j) f_i - 4\alpha E \varepsilon_{ijk} \partial_j f_k + E \varepsilon_{ijk} \partial_j K_k &= 0, \\
E \nabla_{\text{AdS}_2}^2 f_i + (\nabla_{\text{AdS}_2}^2 + \partial_j \partial^j) \varepsilon_{ijk} \partial_j K_k &= 0. \quad f_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}, \quad K_i = 12\xi^2 K_{01}^{(i)}
\end{aligned}$$

質量固有値を求める:

$$\det \begin{pmatrix} m^2 - k^2 - 4\alpha Ek & E \\ Em^2 & m^2 - k^2 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{For SUGRA} \\
E = 2\sqrt{6}, \quad \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$m_{\min}^2 = \frac{E^2}{2(4\alpha^2 + 1)^2} \left(-64\alpha^6 - 24\alpha^4 + 6\alpha^2 - (16\alpha^4 + 4\alpha^2 + 1)^{3/2} + 1 \right) = -2.96804\dots$$

僅かに安定! > -3 (BF bound)

結果 (near-horizon)

我々のconventionでのAdS₂のBF bound: $m^2 \geq -3$

試しに(本当は誤りだが) gravitonとの相互作用を入れずに near-horizon時空上で解析すると:

$$m^2 = -8$$

gravitonとの相互作用を入れて対角化すると:

$$m^2 = -2.96804\dots$$

graviton ($m^2 = k^2$ を持つKK gauge場)が安定な方向に引き戻している。

状況をまとめると

Einstein + Maxwell + CS 理論の extremal RN-AdS-BH の near-horizon における「円偏向モード」は、CS coupling α が $\alpha > \alpha_c = 0.2896\dots$ の領域で不安定となる。

5d SUGRA における α の値は $\alpha = 1/2\sqrt{3} = 0.2887\dots$ であり、ぎりぎり安定である。

(extremal RN-AdS-BH は SUSY を破る configuration)

Full-geometry での解析

Near-horizon での解析で、取りこぼしている不安定性があるかも知れない。

Full AdS-RN-BH geometry での解析 (extremality も課さない):

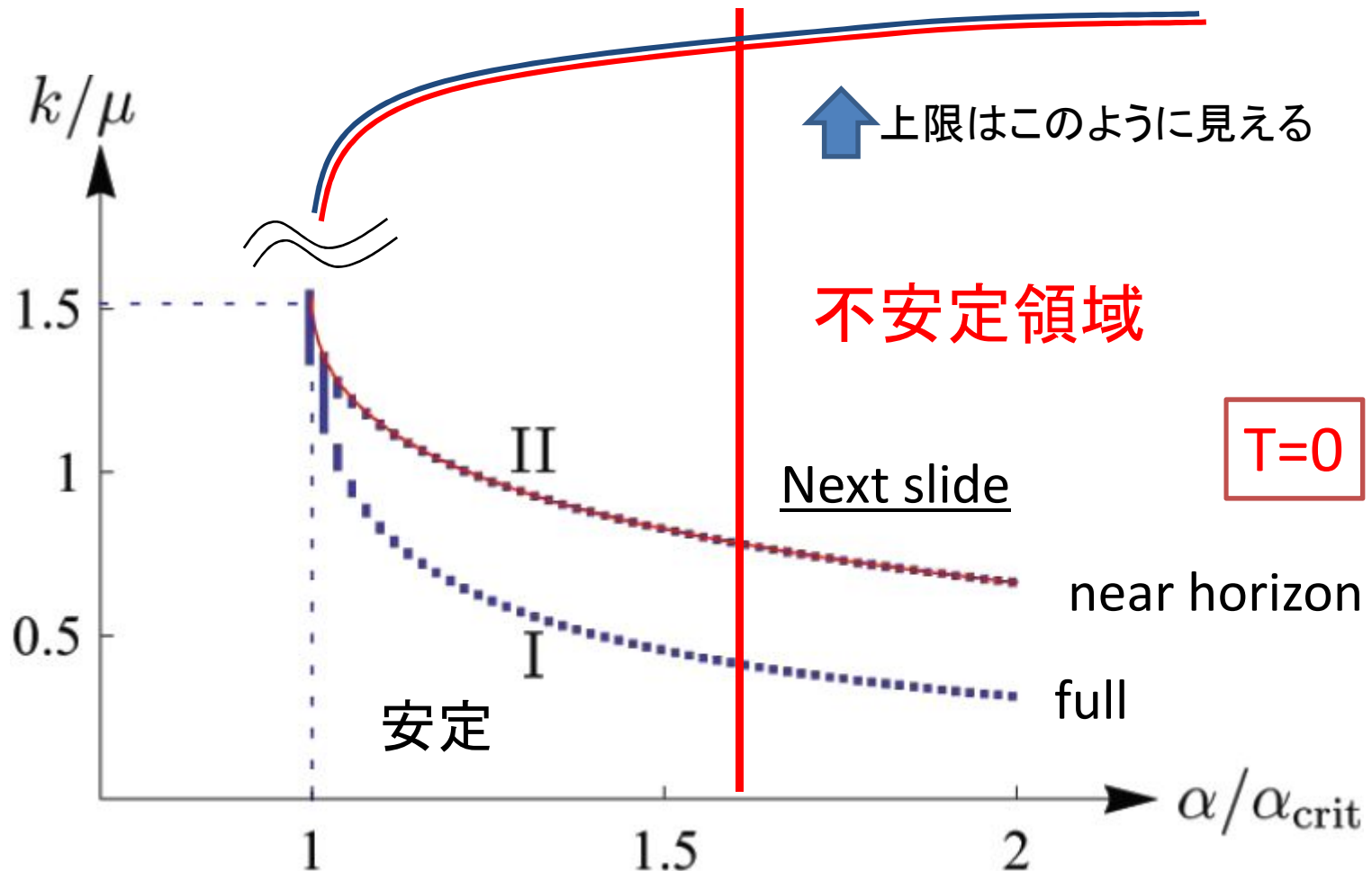
- **normalizable** mode を考える。(boundary で振幅ゼロ)
- horizon で “in-going” boundary condition を課す。
- 時間とともに振幅が増大するかどうかをチェック。

➡ 振幅の振る舞いは k , α および温度 T に依存。

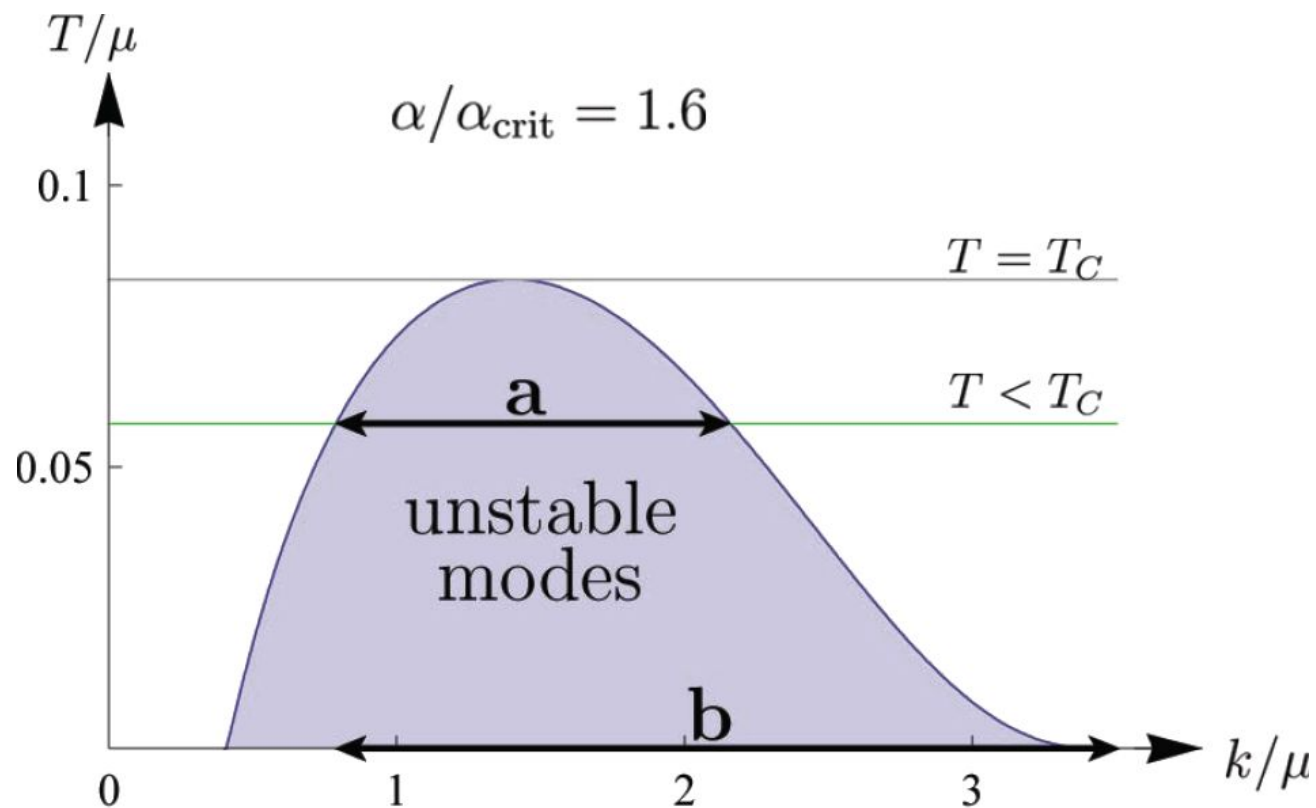
Chern-Simons coupling の臨界値としては near-horizon の時と同じ結果 $\alpha_c = 0.2896\dots$ を数値計算の誤差範囲内で得た。

不安定領域

ただし、不安定となる k の範囲については、full geometryで解析するとnear-horizonでの解析よりも**広がる**。

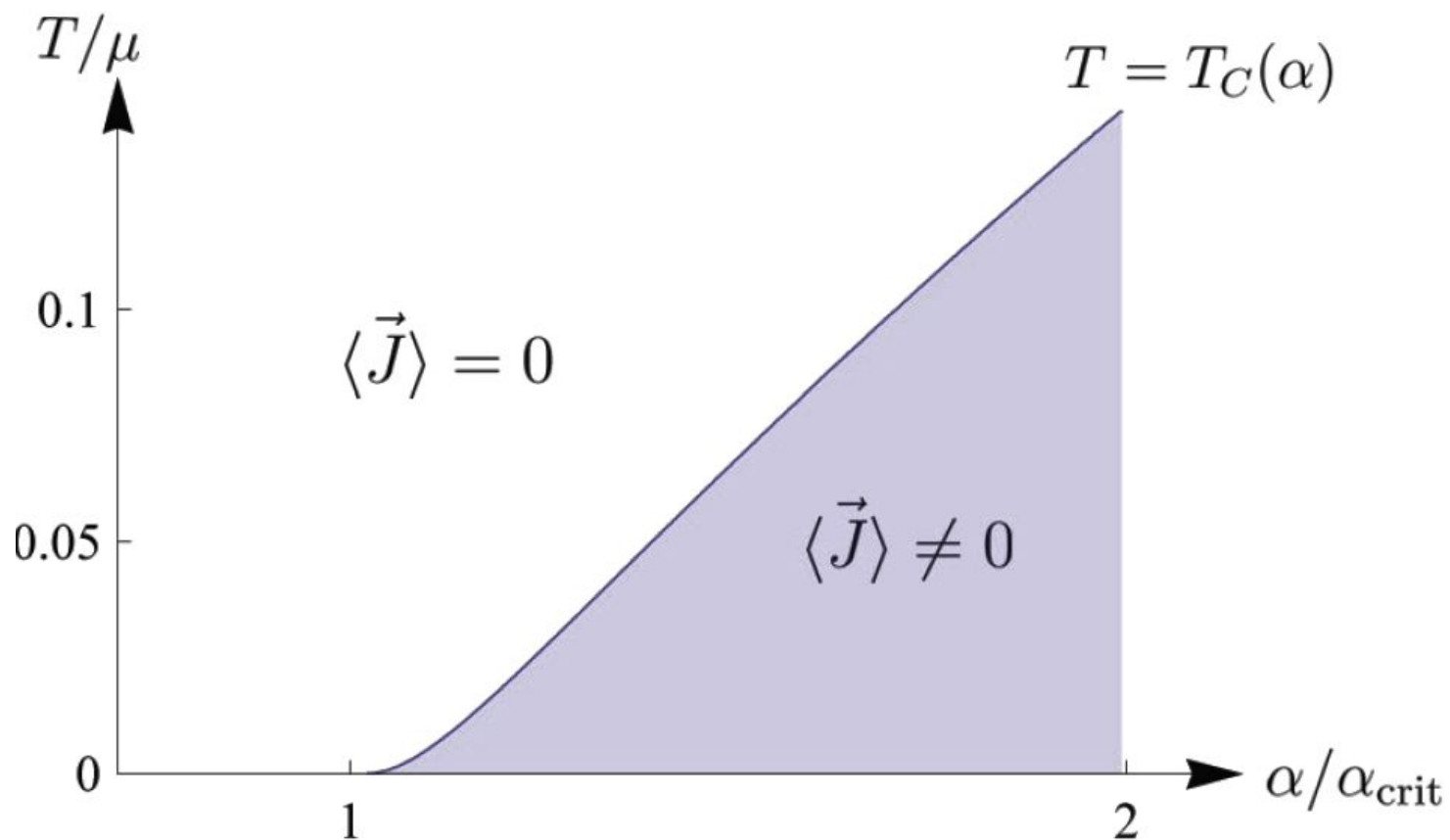


不安定領域



b: near-horizon analysis からの不安定領域

安定／不安定領域の境界



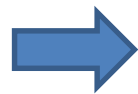
他の場合での解析

(near-horizon limitでの解析のみ)

- 5d extremal AdS-RN-BH with the boundary geometry S^3 .
- 3-charge solutions

我々が調べた範囲では、type IIB super-gravity からの Chern-Simons couplingを用いると、BF bound は常に
かろうじて満たされている。

(CS 結合の意味で 0.4%以内程度足りない)



- 何か理由があるのか？
不安定なモデルは常にSwampland？
- それとも不安定な例が作れるか？

現象論的アプローチ

仮に任意のChern-Simons couplingを許してholography的に考察すると、どのような解釈になるか？



有限密度における、helicalなcurrentの自発的生成

Holographic な解釈

$$ds^2 = \frac{\tilde{g}_{\mu\nu}(z) dx^\mu dx^\nu + dz^2}{z^2}$$

$$A_\mu(z) = A_\mu^{(0)} + z^2 A_\mu^{(2)} + \dots$$

non-normalizable mode

normalizable mode

source

<current>

($A_0^{(0)} = \mu$)

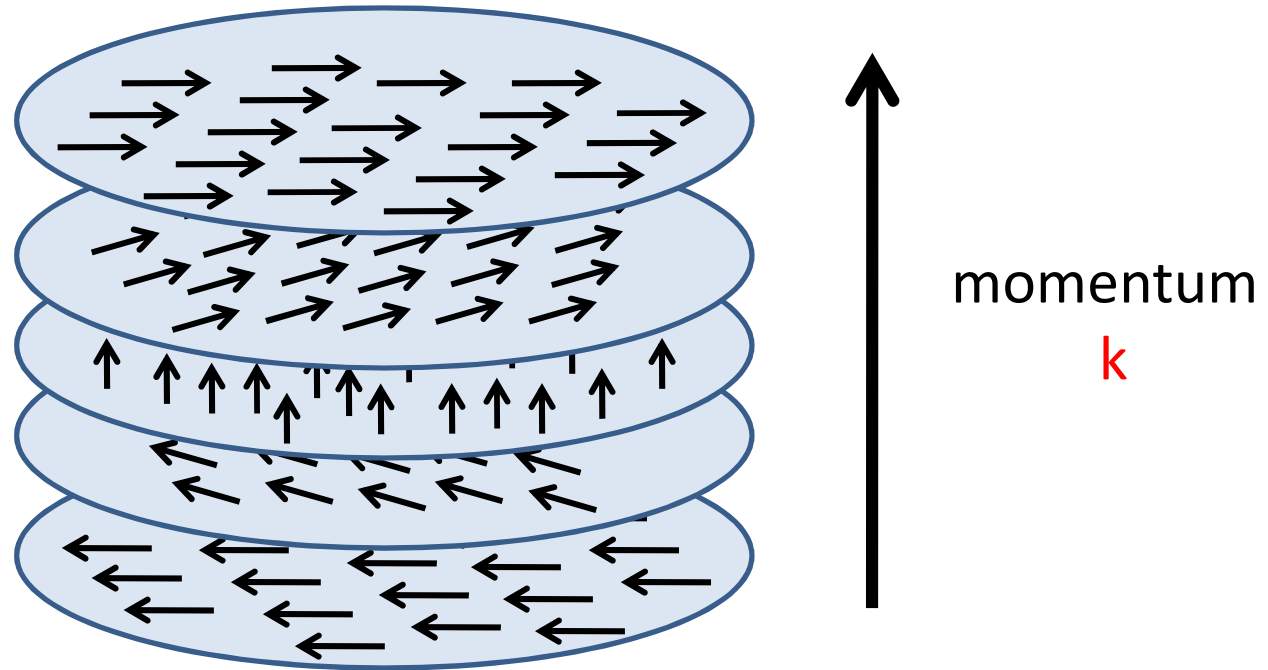
ゲージ場のnormalizable modeの凝縮:

外部からsourceを加えていないのにnon-zeroのcurrentが自発的に生じてしまう状況。

Finite momentum →

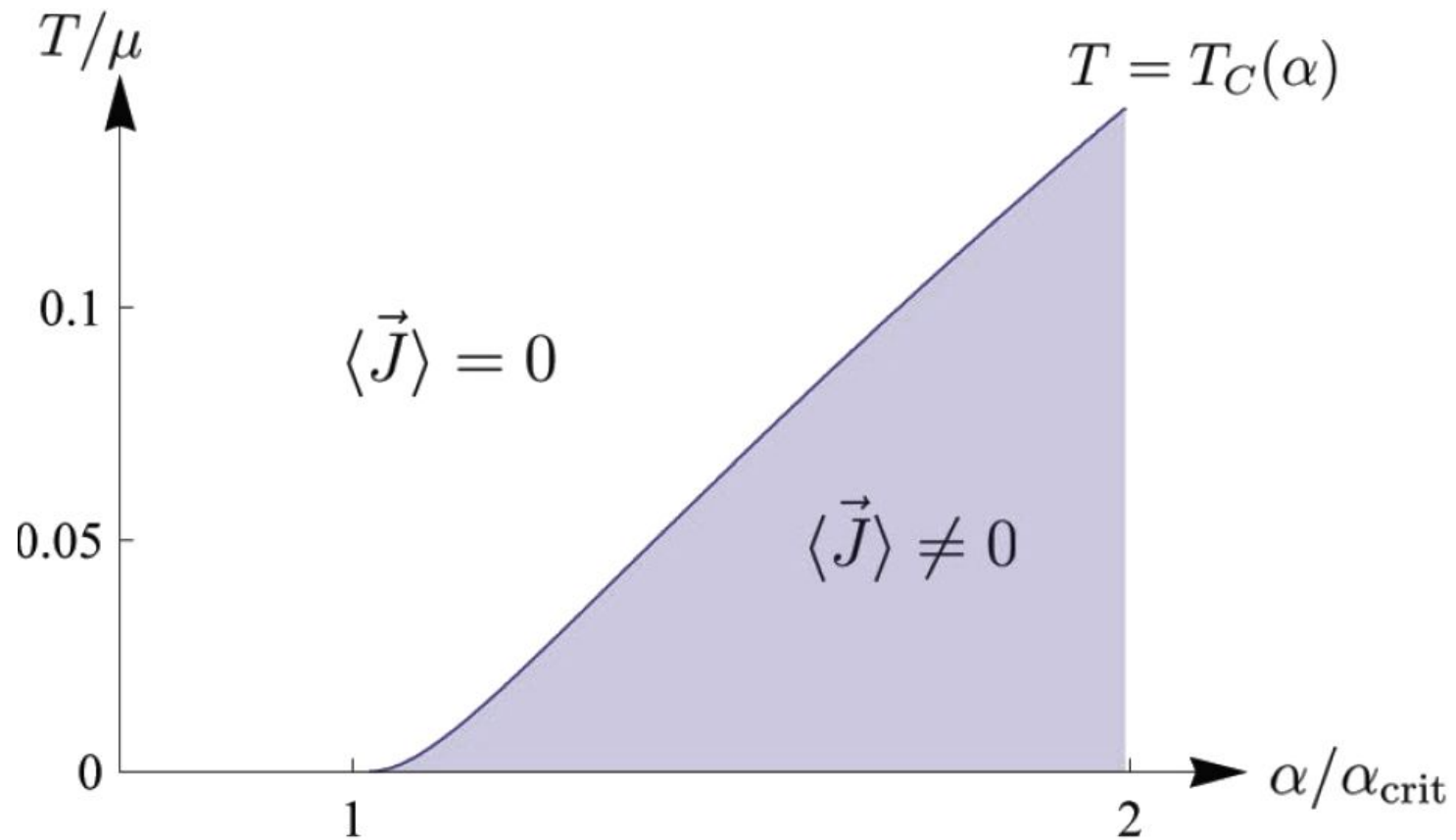
spatially modulated current
(circularly polarized helical current)

Helicalな構造の current



- Helical な構造を持つcurrentがCFT側に生じる。
- 回転および並進の自発的破れ

安定／不安定領域の境界



均一相から不均一相への相転移の(現象論的)モデル

Brazovskii model

Brazovskii, Sov. Phys. JETP 41 (1975) 85.

Brazovskii model:

不均一相への相転移を記述する物性モデル

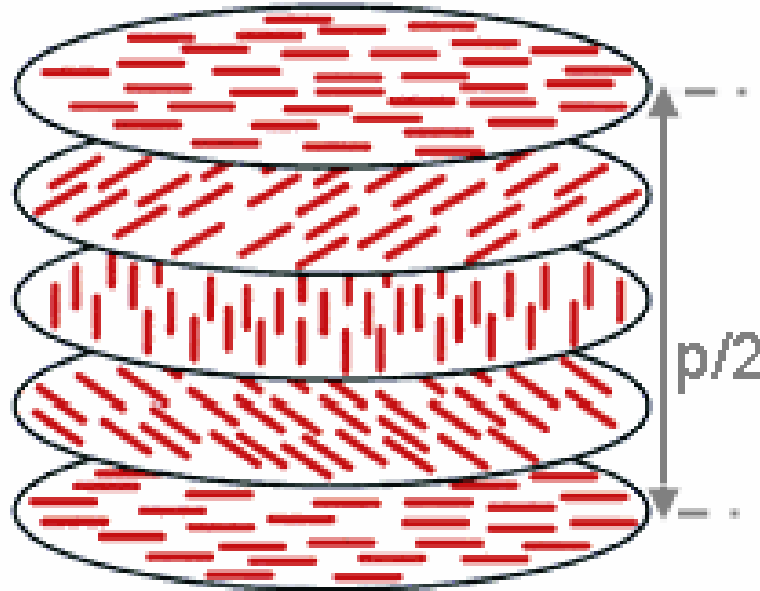
有限運動量にてspectrumが最低となる**非標準的分散関係**を手で仮定していた。

➡ いろいろな系への応用が試みられている。

- weakly anisotropic antiferromagnets
- cholesteric liquid crystals
- pion condensates in neutron stars
- Rayleigh-Bénard convection
- symmetric diblock copolymers

我々のモデルでは非標準的分散関係は**Chern-Simons項**によって実現。

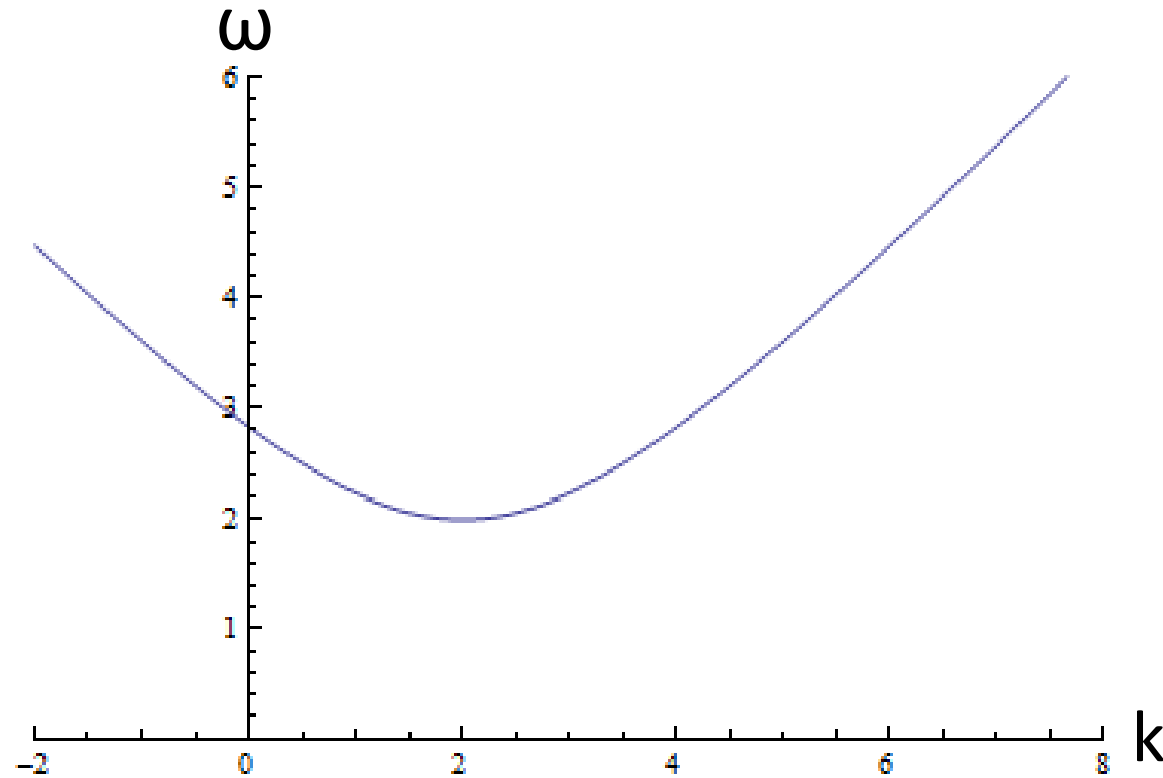
Cholesteric liquid crystal



“A cholesteric liquid crystal is a type of liquid crystal with a helical structure and which is therefore chiral. Cholesteric liquid crystals are also known as chiral nematic liquid crystals.....”

Taken from Wikipedia

Van Hove singularity



SUGRAに従った場合は現状では不安定な例を作ること
成功していないが、それでも**非標準的な分散関係**は存在する。

Spectrumの最低値において単位energyあたりの
状態密度が発散する: Van Hove singularity.

状

$$g(\omega_0) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \delta(\omega(k) - \omega_0) = \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \delta(\omega(k) - \omega_0)$$
$$= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \frac{1}{\left| \frac{d\omega}{dk} \right|} \delta(k - k_0(\omega_0))$$

もし non-zero k において $d\omega/dk=0$ であれば状態密度は発散。

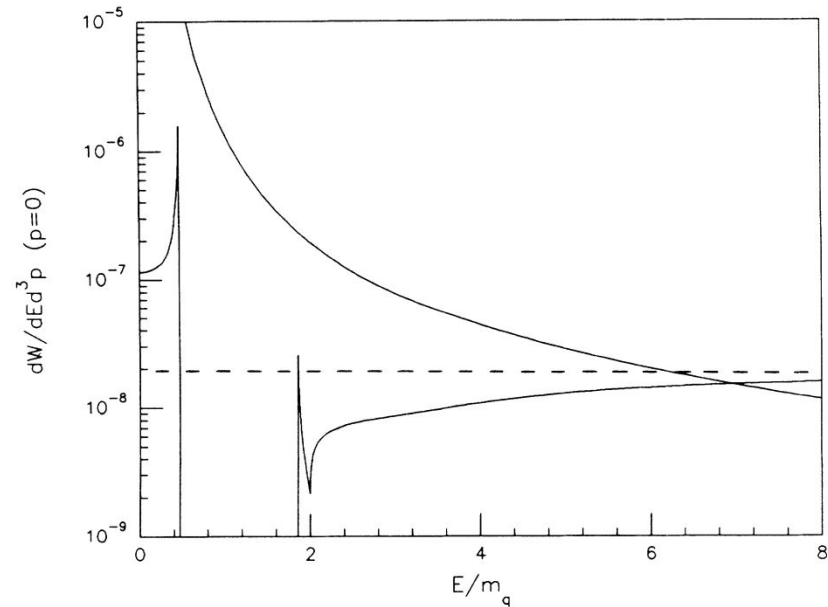
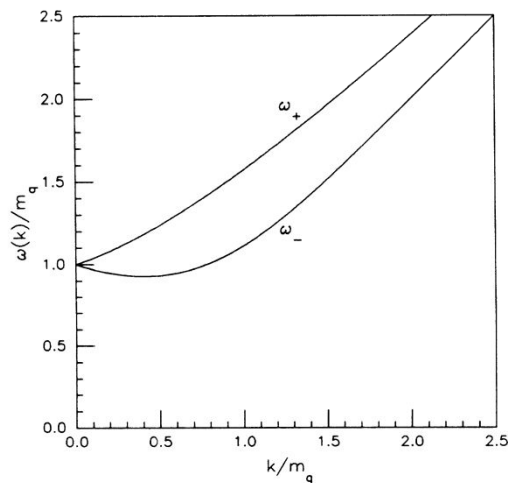
標準的な分散関係においては, $d\omega/dk=0$ は $k=0$ において起きるため、発散は生じない。

$N=4$ SYM においても finite R-charge では anomaly induced Van Hove singularity が存在する。

Van Hove singularityの例

Quark propagatorに現れるpoleとしてのplasmino

Di-lepton production rate
がVan Hove singularityに
おいて発散。



Quark dispersion relation in a medium (left)
and the di-lepton production rate (right).
(Barteen-Pisarski-Yuan, PRL64(1990)2242.)

まとめ

- 十分大きなCS項のあるモデルにおいて
5d RN-AdS black hole の新しい不安定性を見つけた。
 - その不安定モードは有限運動量を持つ。
不均一状態への転移を示唆。
 - ただし10d type IIB SUGRAとconsistentなCS couplingを用いると(例えSUSYを破る解であっても)調べた範囲では、かろうじて安定であった。
 - 系が安定な場合であっても、「円偏向モード」は非標準的な分散関係を持つ。
- 5d Einstein+Maxwell+CS 理論は非常に面白い。
不均一相への相転移をholographicに表すモデル(?)

議論

Einstein+Maxwell+Chern-Simons with
angular momentum (and charge)との類似

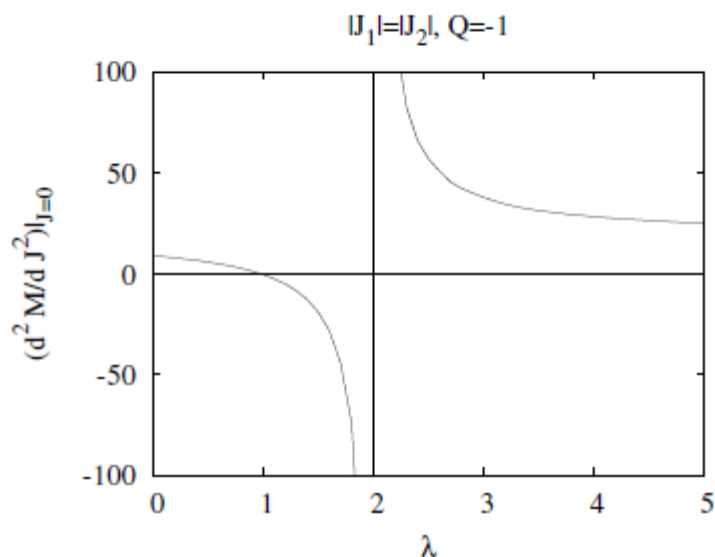


FIG. 2: Second-order derivative of the mass M with respect to the angular momentum J at $J = 0$ versus the CS coupling constant λ for extremal black holes ($Q = -1$).

Kunz and Navarro-Lerida, hep-th/0510250より

$\Lambda=0$ の場合ではあるが、CS coupling λ が
SUGRAの値($\lambda=1$)を超えると熱力学的
不安定性が存在する。

提案

Chong-Cvetič-Lü-Pope (PRL95(2005)161301)の
charged rotating BH with $\Lambda < 0$ において同様の
円偏向モードの安定性解析を試みてはどうか。

本研究との関連性は？

弦理論の範囲で不安定な例を 実現できるか？

- 臨界密度を与えるスケールが必要と思われる
- 自発currentの存在：
有限伝導度では散逸が存在し、非平衡
 - ➡ 「超伝導(超流動)」の系が必要？
 - ➡ charged scalarの凝縮が必要？
(ただし、このsetupでも $T=0$ では抵抗=0で、
問題ない？ (Thanks to Takayanagi))

Question

どのようにしたら不安定な例が作れるか？

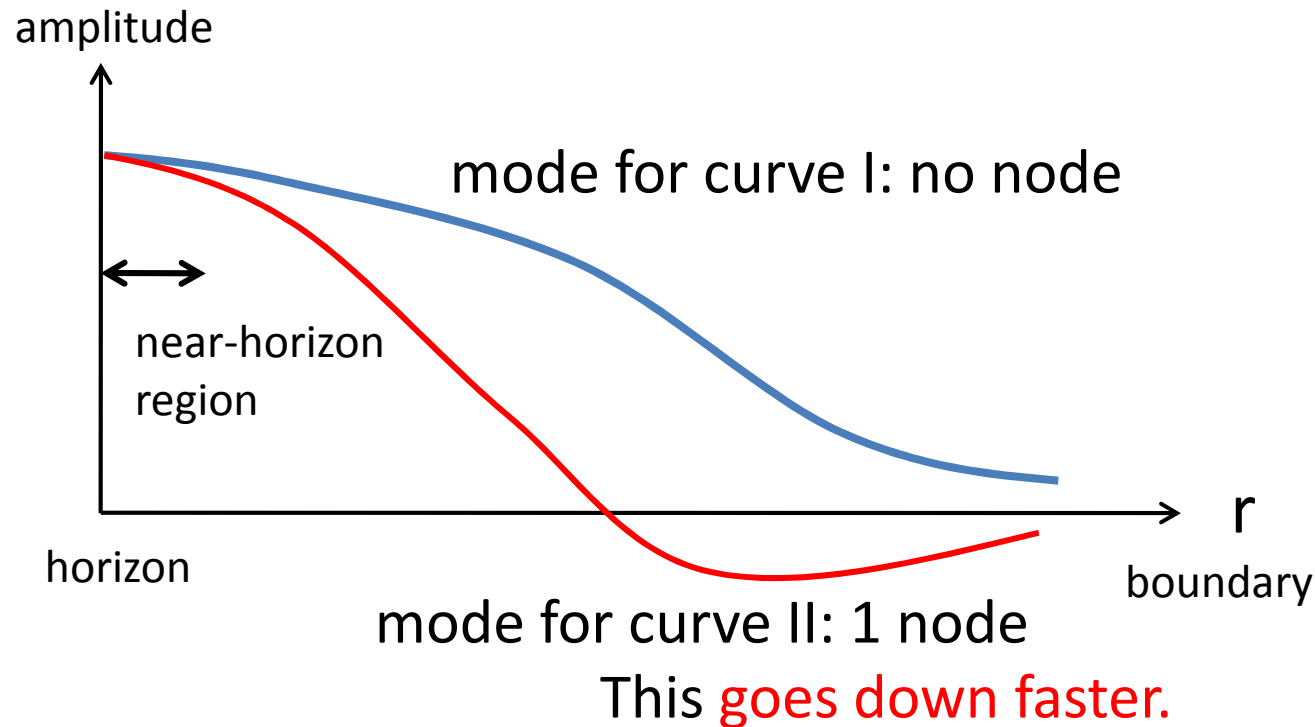
Decoupling modes

There are unstable modes which are **not detected** in the **near-horizon analysis**.



They become **non-normalizable mode** in the near-horizon geometry.

Intuitive but **not precise** cartoon:



More precisely:

An appropriate combination of the **gauge field** and the **graviton near the horizon** ($r=0$):

$$\phi(r) \approx r^{-1/2 + \sqrt{\frac{m^2+3}{12}}} + \dots$$

“**Normalizable**” means $\int_0^\infty dr \phi^* \phi = \text{finite}$.

Full-geometry analysis: the normalizability is checked **numerically**.

Near-horizon analysis: take the above profile **as if it is valid until $r=\infty$** .

$$\phi^* \phi = r^{-1} \left| e^{\sqrt{\frac{m^2+3}{12}} \log r} \right|^2 = r^{-1} \cos\left(2 \left| \sqrt{\frac{m^2+3}{12}} \right| \log r\right) \rightarrow \text{const.} \times \cos\left(2 \left| \sqrt{\frac{m^2+3}{12}} \right| \log r\right)$$

implies divergence \nearrow but, if the **BF bound** is **violated** ($m^2 < -3$), \nearrow integration \nearrow oscillating but **finite**

The modes outside the curve II **satisfy** the near-horizon BF bound.

\rightarrow **Non-normalizable** in the **near-horizon analysis**.