

ブラック・オブジェクトの数値解析

山田 祐太(大阪工業大学 M2)

共同研究者：真貝 寿明

2009年 12月 24日 高次元BH研究最前線(京大)

arXiv:0907.2570,
'Black Object Hoop Conjecture
in five dimensional Space-time'

1. Introduction

1. 研究背景

☆高次元ブラックホール(ブラック・オブジェクト)

- ・ 唯一性定理が成り立たない。
- ・ トポロジーが多様。

ex. ブラック・リング

ブラック・ダイリング

ブラック・サターン

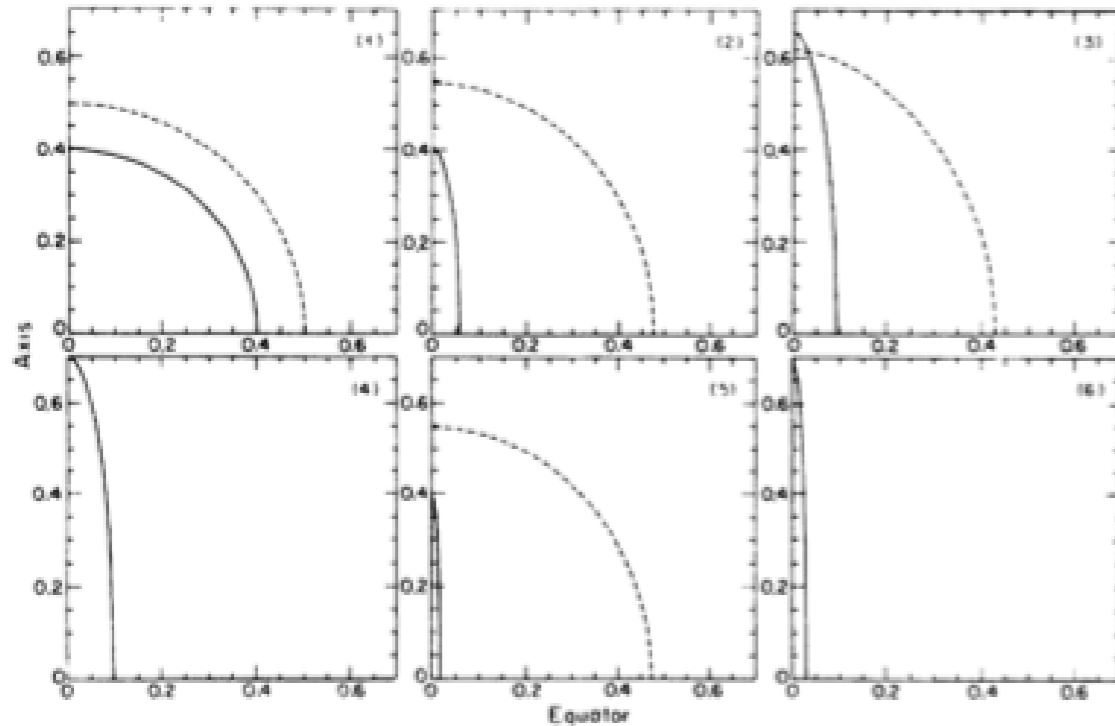
☆未解決問題が多い

- ・ 形成条件は？
- ・ 安定性は？
- ・ 裸の特異点は形成されるのか？
- ・ ダイナミクスは未解決。

未解決問題1 BH形成条件と裸の特異点形成

フープ仮説(キップ・ソーン 1972)

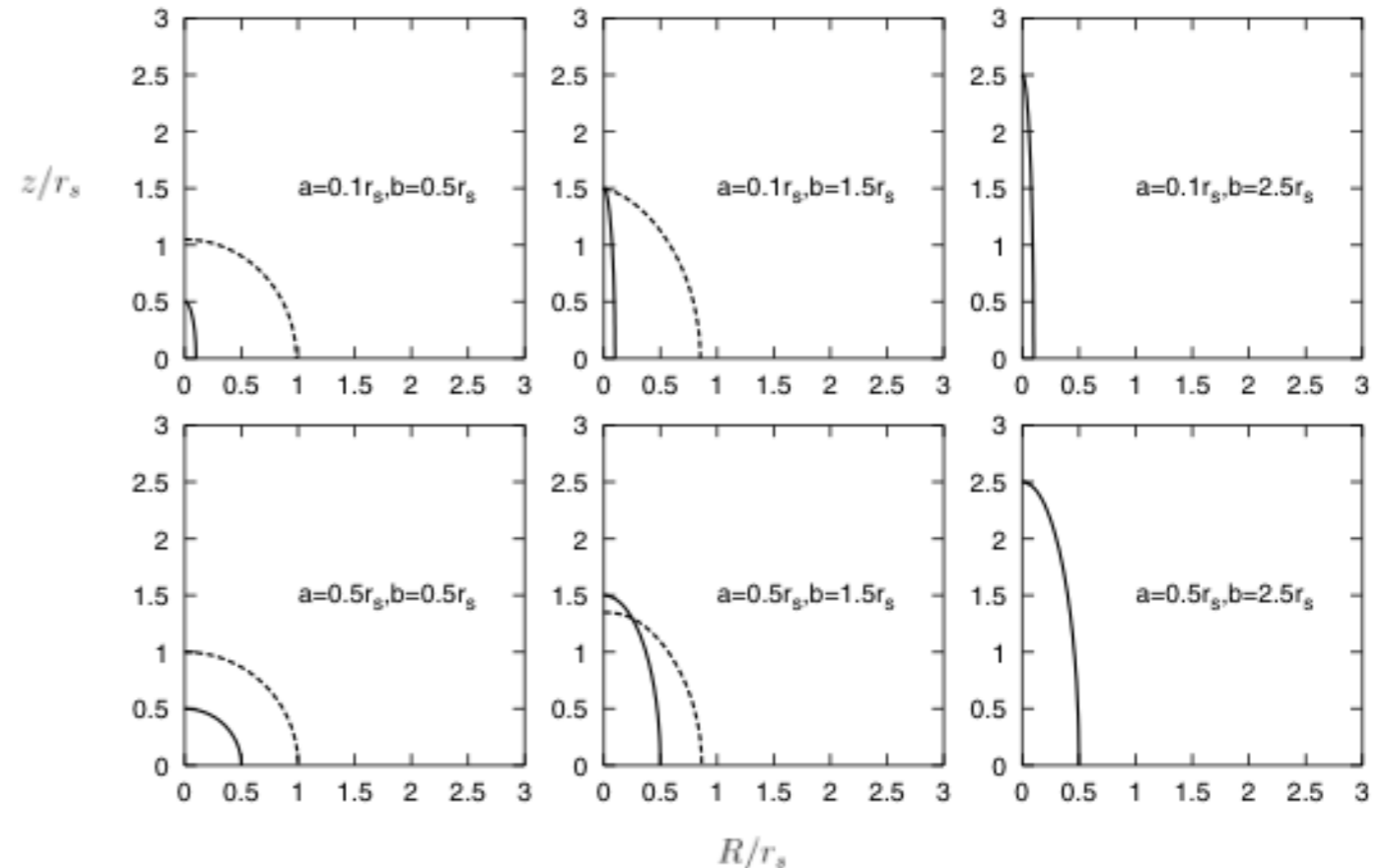
$$C \leq 4\pi GM$$



T. Nakamura et al, Phys. Rev. D. 38,
2972 (1988)

ハイパー・フープ仮説
(井田・中尾 2002)

$$V_{D-3} \leq G_D M$$



C. M. Yoo et al, Phys. Rev D. 43,
2863(2006)

・ 4次元と5次元の共通点

1. 楕円体が極端に長い場合、ブラックホールは形成されない。
2. リーマン曲率のスカラー積の最大値は物質の外に現れる。

(Shapiroらの4次元での重力崩壊シミュレーションでは物質の外でスカラー積が発散)



5次元では？

未解決問題2 ブラック・オブジェクトの安定性

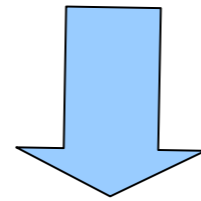
- ・ ブラックストリングの安定性解析

(R. Gregory and R.Laflamme, Phys.Rev.Lett.70, 2837,1993)

- ・ Myers-Perry ブラックホールの安定性解析

(村田, 早田, Prog.Theor.Phys.120:561-579,2008)

ブラックリングの安定性解析の事例はあまりない。



我々は数値計算で調べる。

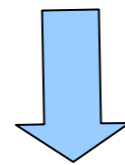
研究の概略

1. 初期値設定問題として

- 重力源として4次元トーラス体をおく。
- 時間反転対称を仮定して、ハミルトニアン拘束方程式を数値的に解く。
- Apparent horizonの存在を調べ、horizonの面積からブラックリングのダイナミクスの予想をする。

2. 時間発展問題として

- 物体を非衝突粒子で近似し、ブラックリングの時間発展を追いたい。



- ラプス関数の時間変化と粒子の振る舞いから、ブラックリングの時間発展を議論する。

2. 初期値設定問題

Toroidal Case

- ・ 仮定 ・ ・ ・ 時間反転対称、conformal flat

- ・ conformal 変換 $\gamma_{ij} = \psi^2 \hat{\gamma}_{ij}$

- ・ 計量

$$ds^2 = \psi(X, Z)^2 (dX^2 + dZ^2 + X^2 d\theta_1 + Z^2 d\theta_2)$$

- ・ ハミルトニアン拘束方程式

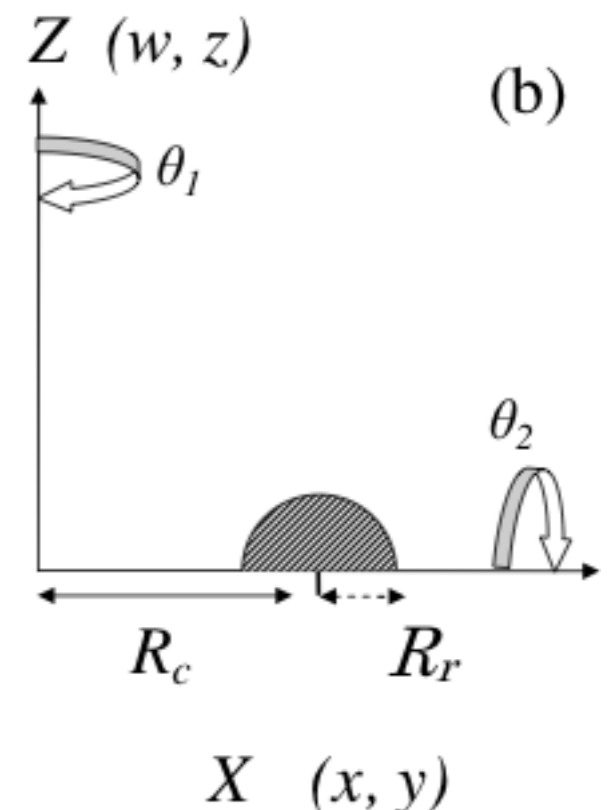
$$\frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} \left(X \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = -4\pi^2 G_5 \rho$$

境界条件： $\partial_i(\psi - 1)r^2 = 0$

- ・ 物質分布(一様分布・質量一定)

$$(X - R_c)^2 + Z^2 \leq R_r^2$$

where $X = \sqrt{x^2 + y^2}, Z = \sqrt{z^2 + w^2}$



- Apparent horizon

リング形状に物質をおいた場合、共通horizonもしくはリングhorizonが形成される。

共通horizon

$$r = \sqrt{X^2 + Z^2} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X} \right)$$

$$r_m^{\ddot{}} - 4 \frac{r_m^{\dot{}}^2}{r_m} - 3r_m - \frac{r_m^2 + r_m^{\dot{}}^2}{r_m} \left[2 \frac{r_m^{\dot{}}}{r_m} \cot(2\phi) - \frac{3}{\psi} (r_m \sin \phi + r \cos \phi) \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{3}{\psi} (r_m \cos \phi - r \sin \phi) \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right] = 0$$

リングhorizon

$$r = \sqrt{(X - R_c)^2 + Z^2} \quad \xi = \tan^{-1} \left(\frac{Z}{X - R_c} \right)$$

$$r_m^{\ddot{}} - \frac{3r_m^{\dot{}}^2}{r_m} - 2r_m - \frac{r_m^2 + r_m^{\dot{}}^2}{r_m} \times \left[\frac{r_m^{\dot{}} \sin \xi + r_m \cos \xi}{r_m \cos \xi + R_c} - \frac{r_m^{\dot{}}}{r_m} \cot \xi + \frac{3}{\psi} (r_m \sin \xi + r \cos \xi) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{3}{\psi} (r_m \cos \xi - r \sin \xi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0$$

結果2.1 Horizonの有無

- ・ トーラス半径を広げていくと、共通horizon消滅。
- ・ Krecthmann Invariantの最大値は物質の外側に現れる。
- ・ 共通horizonとリングhorizonは共存しない。
(δ 関数リングの場合とは不一致)

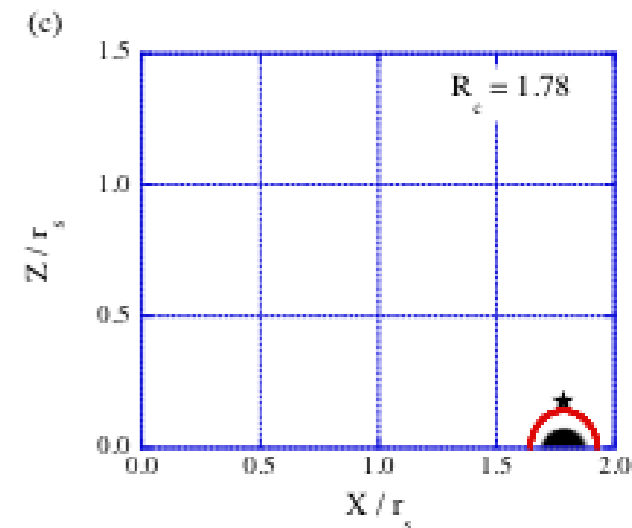
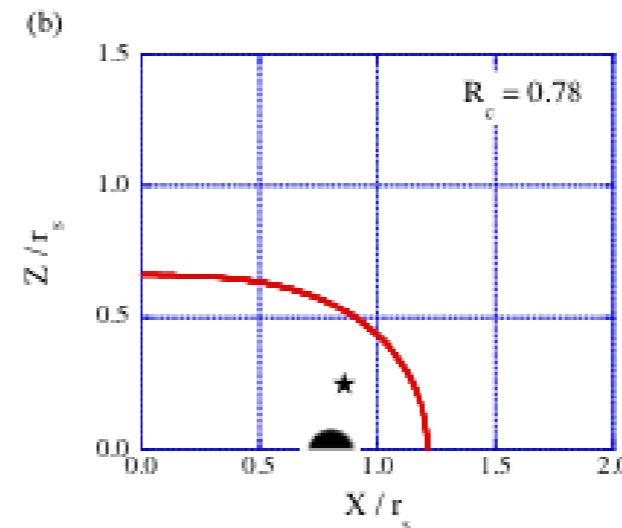
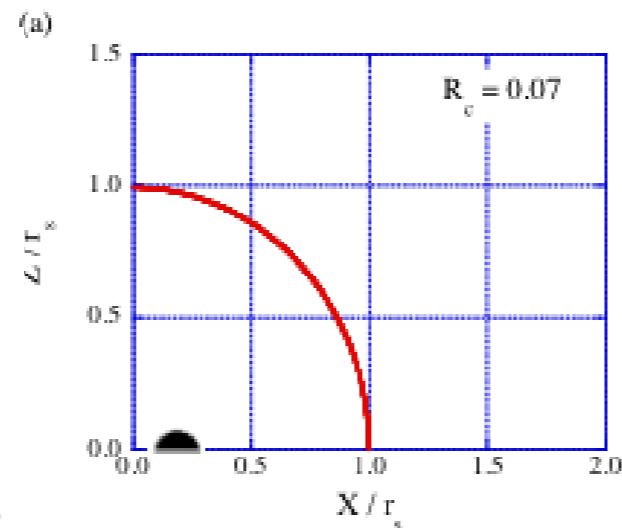
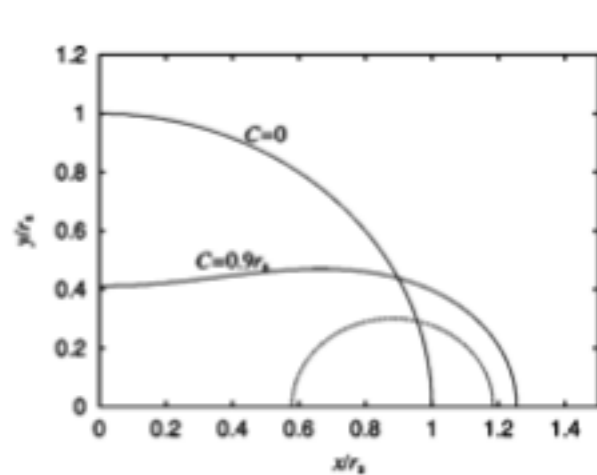
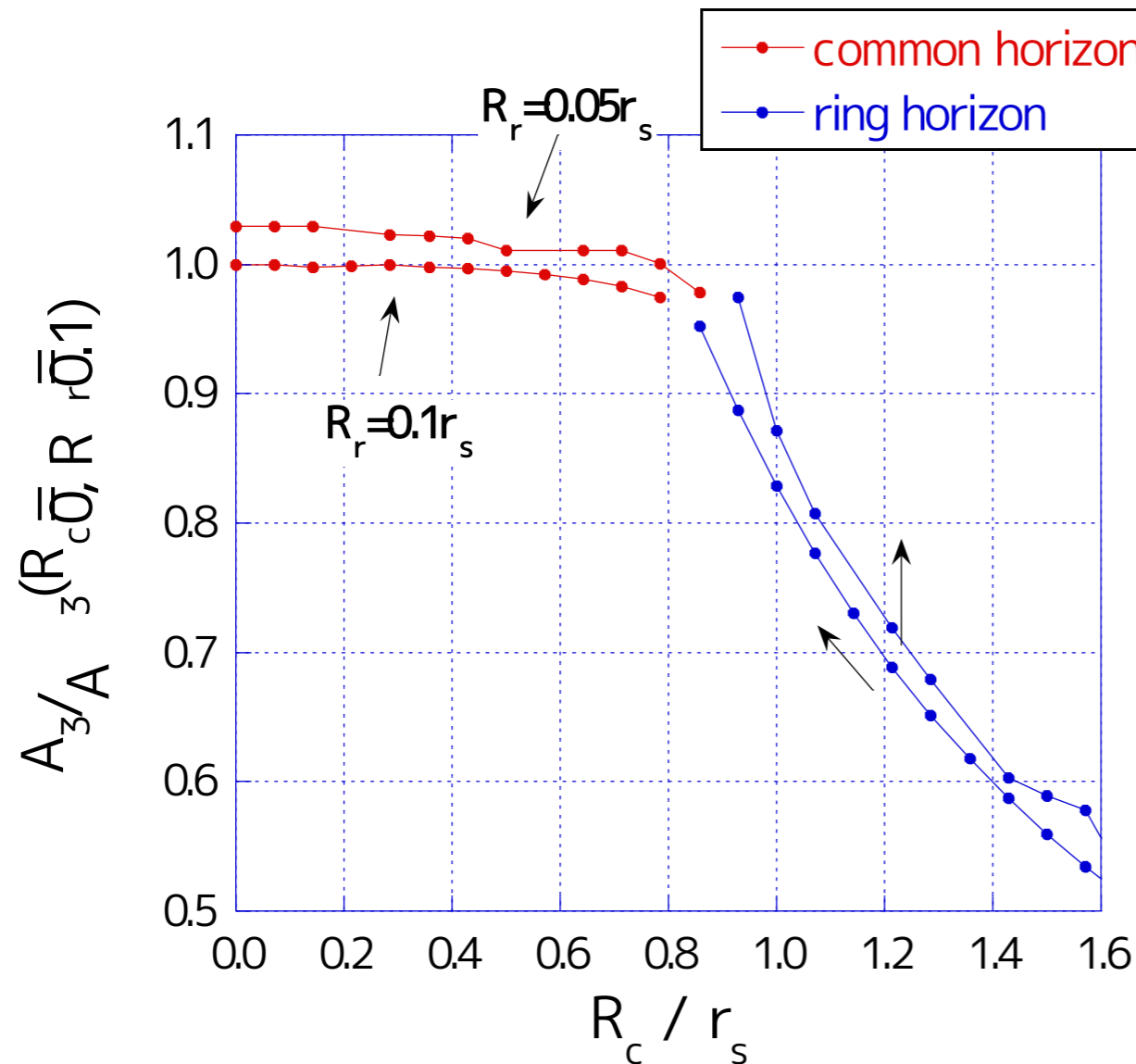


FIG. 11. Both a black hole and a black ring can be found for $0.79r_s \leq C \leq 0.90r_s$. These horizons are depicted for $C=0.9r_s$. A black hole with $C=0.91r_s$ cannot be found for a circle source.

- ・ 実線 … Apparent horizon
- ・ ★ … Krecthmann Invariantの最大値の場所
- ・ Schwarzschild半径で規格化

結果 2.2 Horizonの面積プロット

- ブラックホールのエントロピー(面積)増大則から、ブラック・リングのダイナミクスが予想できる。



- 赤線は共通horizonの、青線はリングhorizonの面積。
- horizon面積Aは($R_c=0, R_r=0$)で規格化。

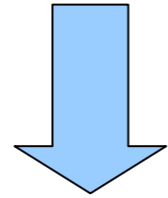
リング形状の重力崩壊シナリオ

- Collapse → ブラックリング ?
- Collapse → ブラックリング → ブラックホール ?
- Collapse → ブラックリング → 裸の特異点形成 ?

3. 時間発展問題

ブラックリングの時間発展

- ・ 粒子を4次元リング形状に分布させて、時間発展させる。



粒子の測地線方程式を解き、その振る舞いをみることで、ブラックリングがどのように動くかわかる。

- ・ 時間発展にはADM形式（4+1分解）を用いる。
- ・ Cartesian座標を用い、空間4次元すべての方向について解く。
(2次元問題として解くと、非軸対称部分の不安定性モードは解析できない)

・ 時間発展方程式

metric

$$\frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} = -2\alpha K_{ab} + D_a \beta_b + D_b \beta_a$$

extrinsic curvature

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = & \alpha({}^{(4)}R_{ij} + K K_{ij}) - 2\alpha K_{il} K^{lj} - 12\pi^2 \alpha (S_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} (\rho - S)) \\ & - D_i D_j \alpha + D_i \beta^m K_{mj} + D_j \beta^m K_{mi} + \beta^m D_m K_{ij} \end{aligned}$$

・ ソースターム

粒子の場合、圧力0

$$\rho = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad \text{where} \quad n^\mu = -(1/\alpha, \beta^m)$$

$$S_{ij} = \rho_0 u_i u_j \quad \text{where} \quad \rho_0 : \text{Rest mass Density}$$

u_i : velocity

$$S = \gamma^{ij} S_{ij}$$

座標条件

1 ラプス条件

- ・ 特異点に突っ込まないように、maximal time slicing条件を毎ステップ解いて時間発展させる。

$$\Delta\alpha = \alpha(K_{ij}K^{ij} + 8\pi^2\rho + 4\pi^2S)$$

$$\text{境界条件： } \partial_i(\alpha - 1)r^2 = 0$$

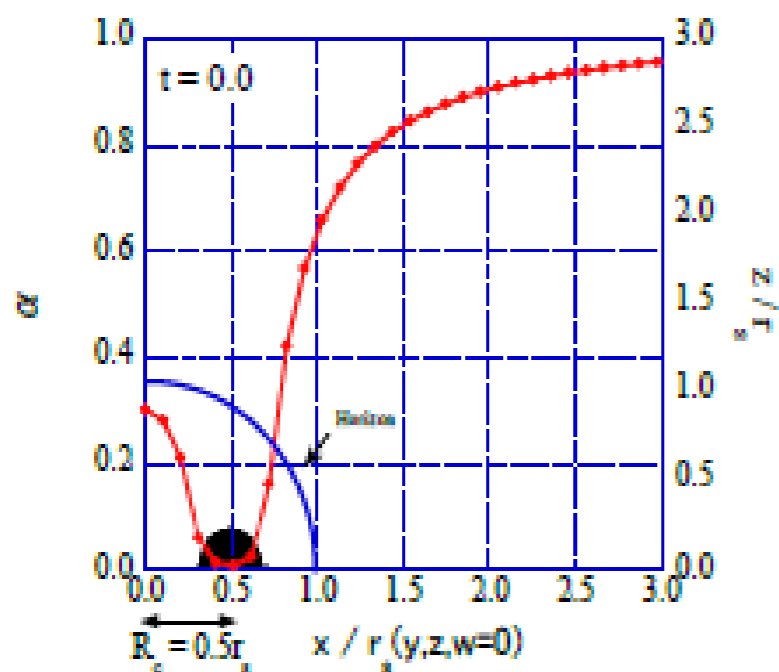
2 シフト条件

- ・ 初期条件で回転はいれていないので、とりあえず0で時間発展させる。

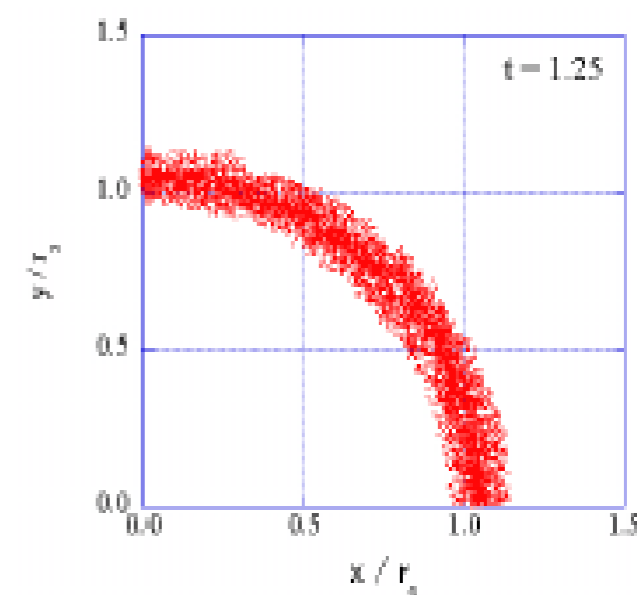
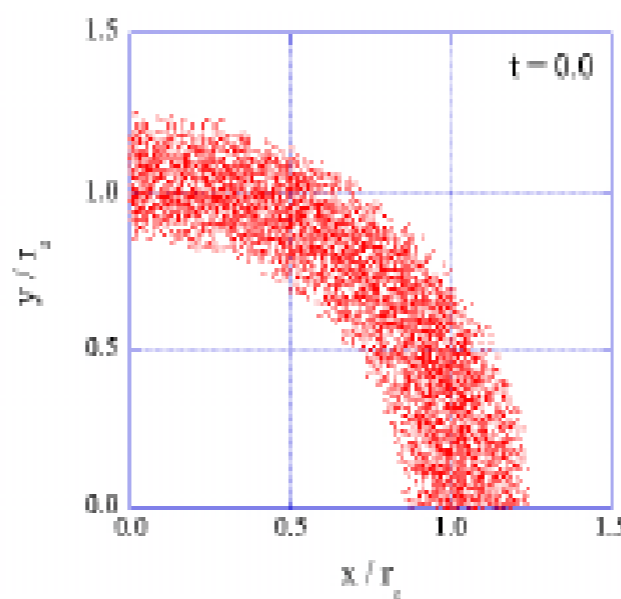
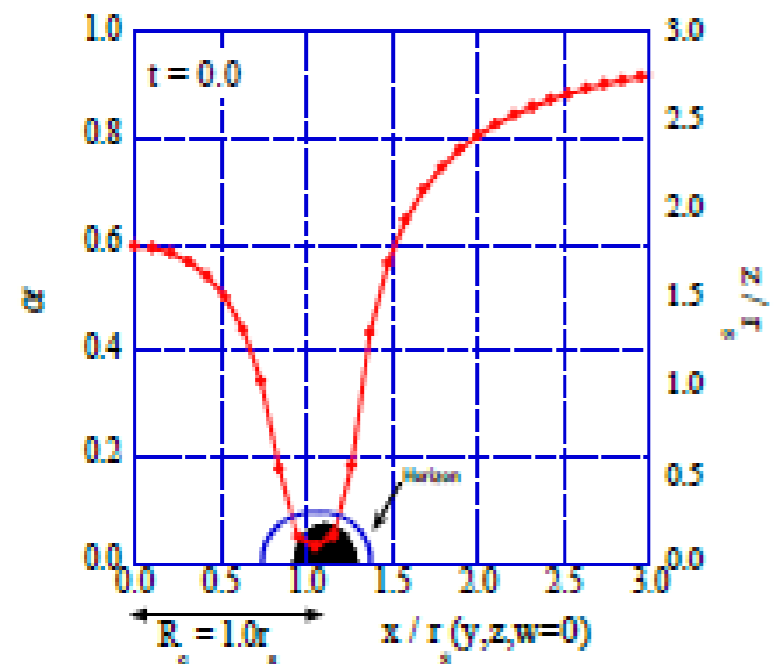
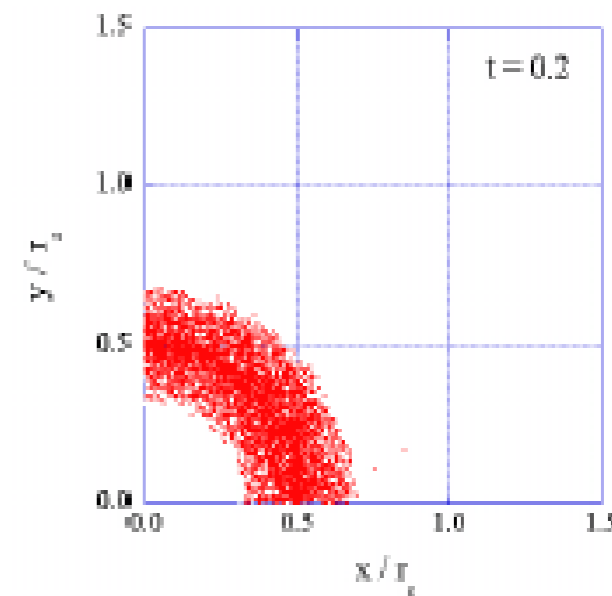
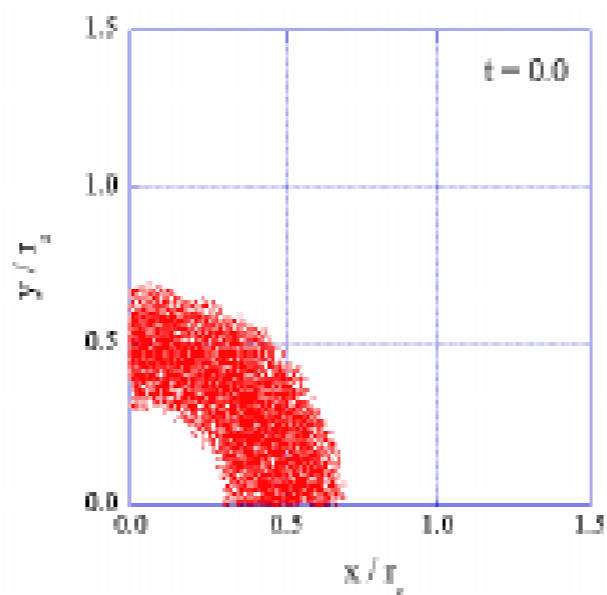
$$\beta_i = 0$$

結果 初期条件 → horizonあり

・ lapse function at $t=0.0$

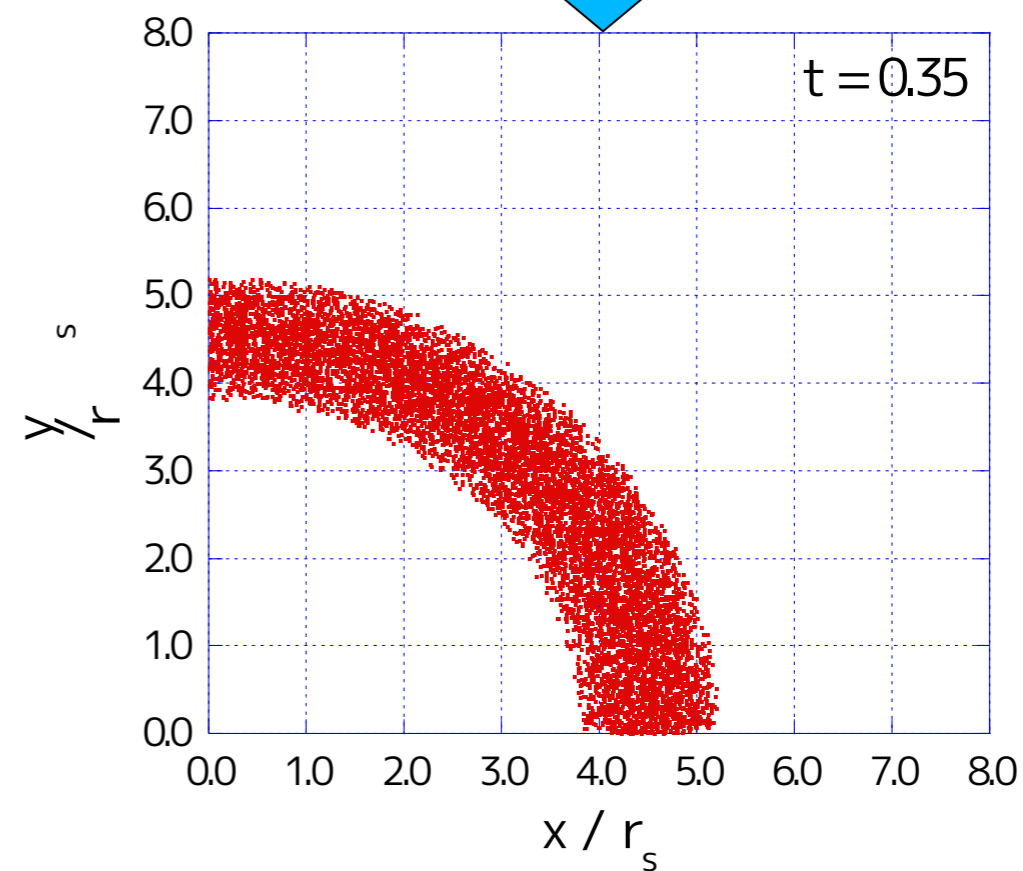
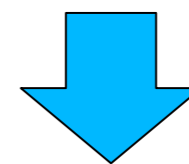
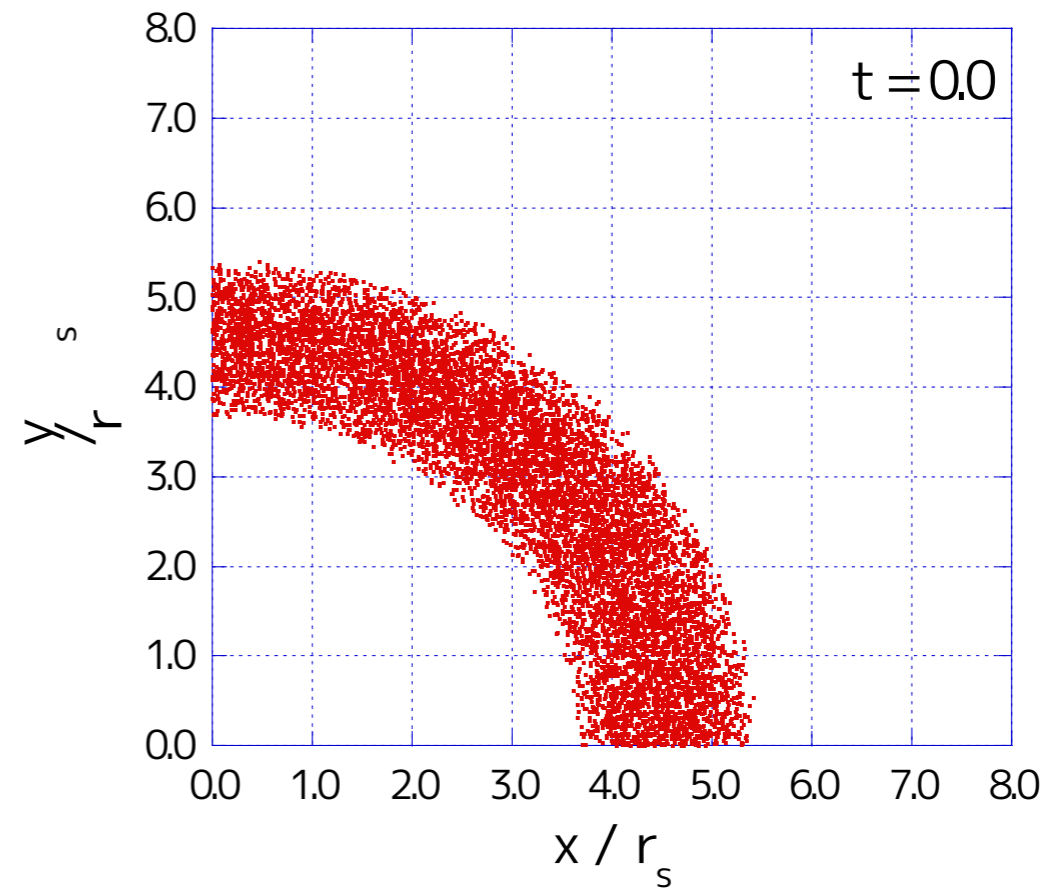
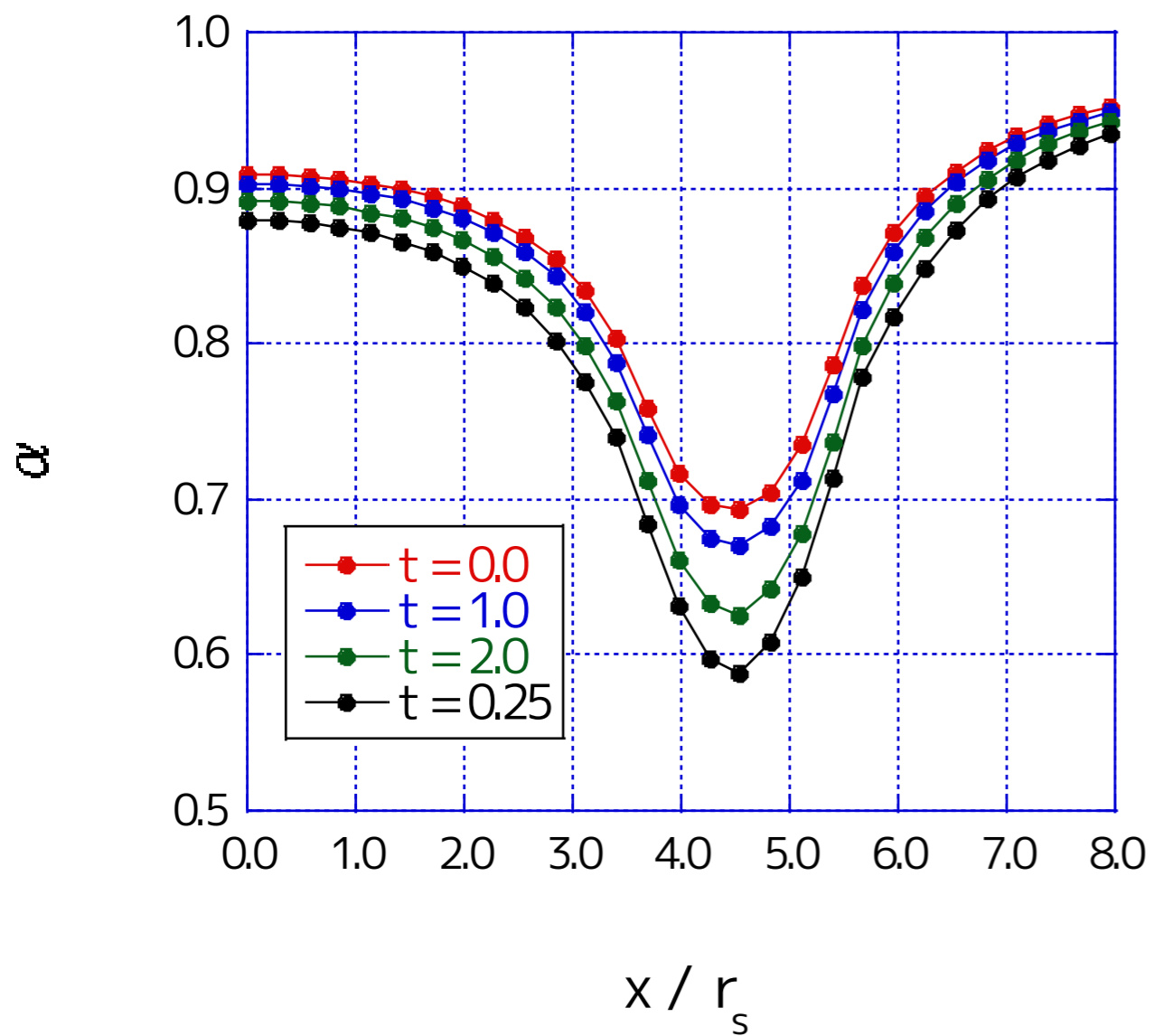


・ time evolution of particle

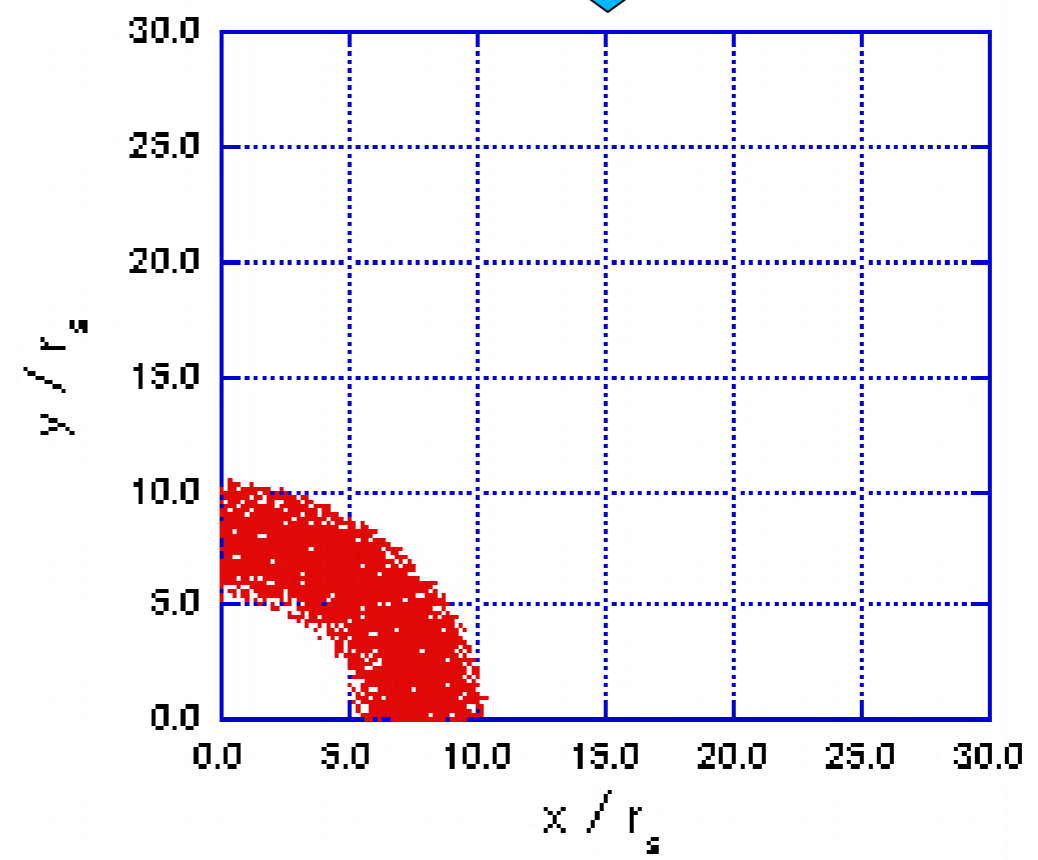
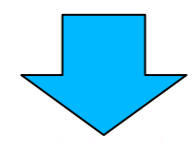
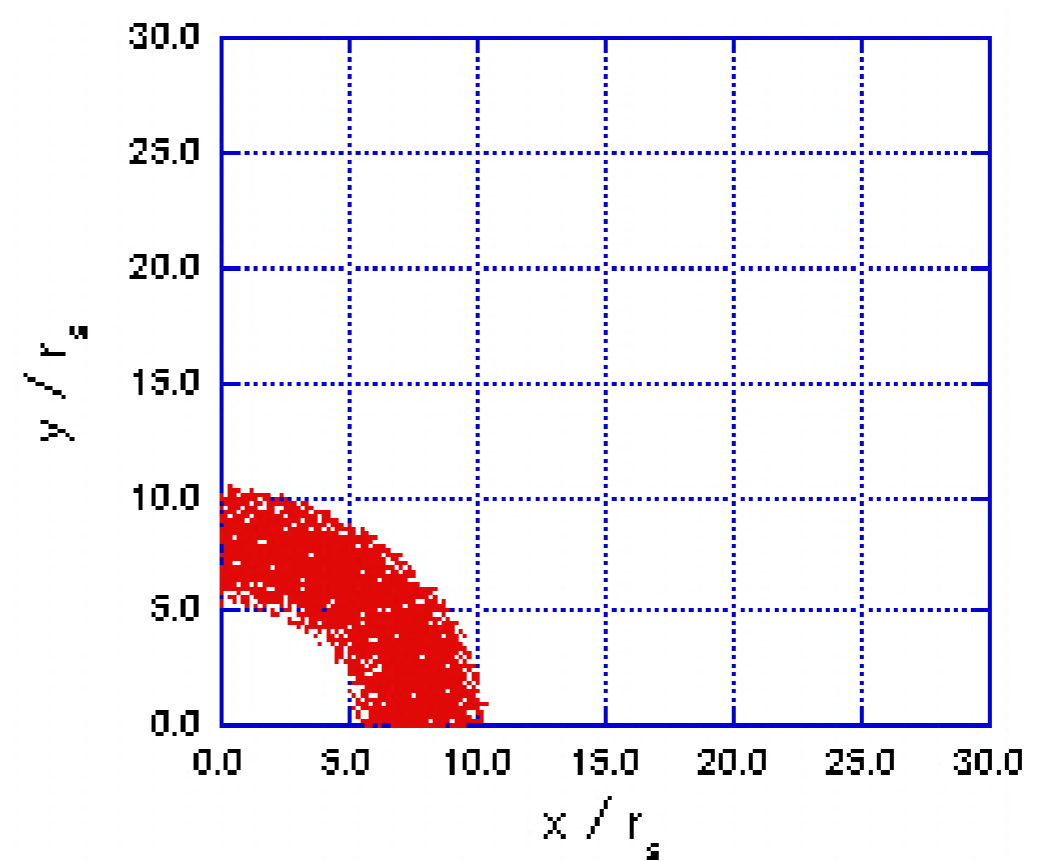
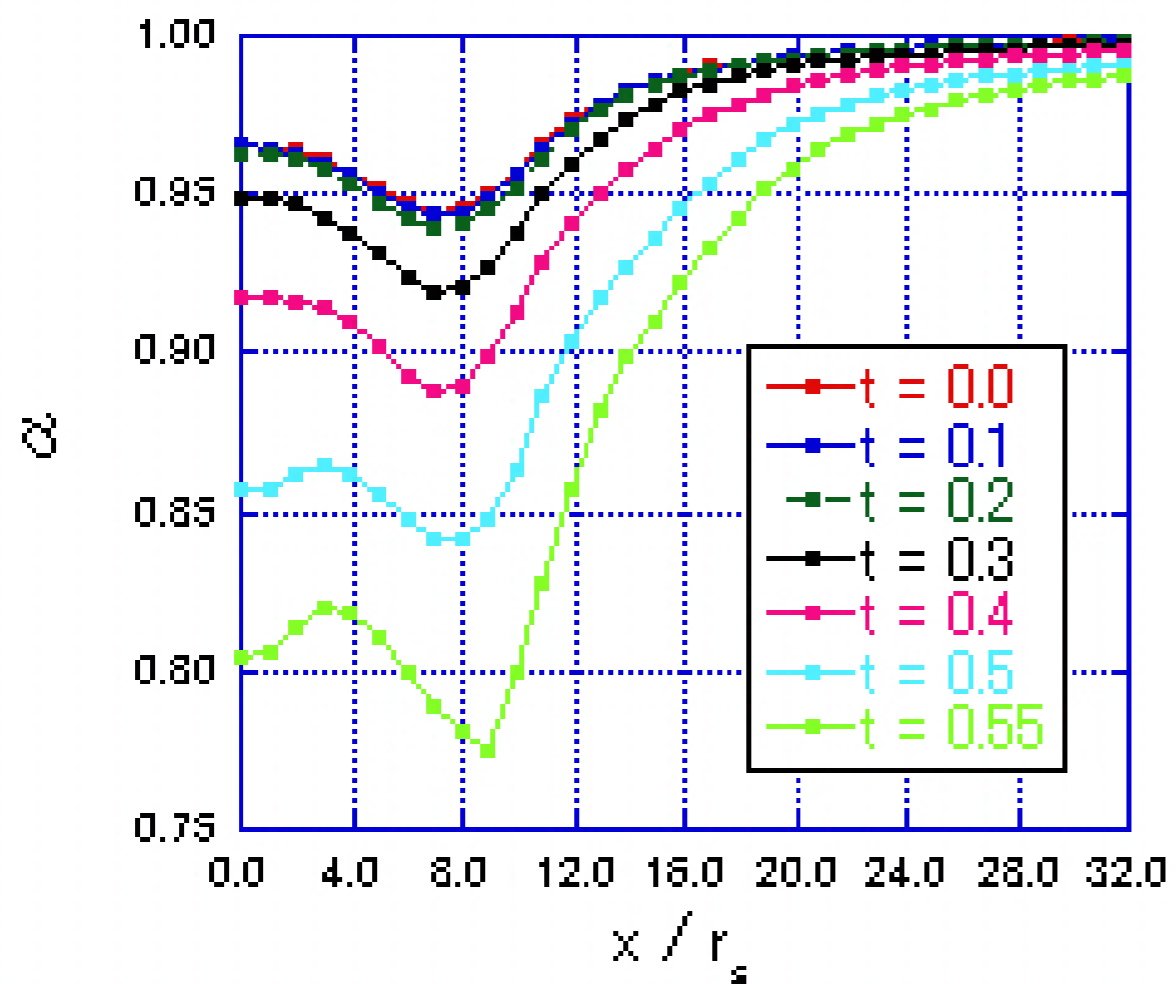


- ・ ラプスの値が0.5~0.6付近でhorizonが形成されている。

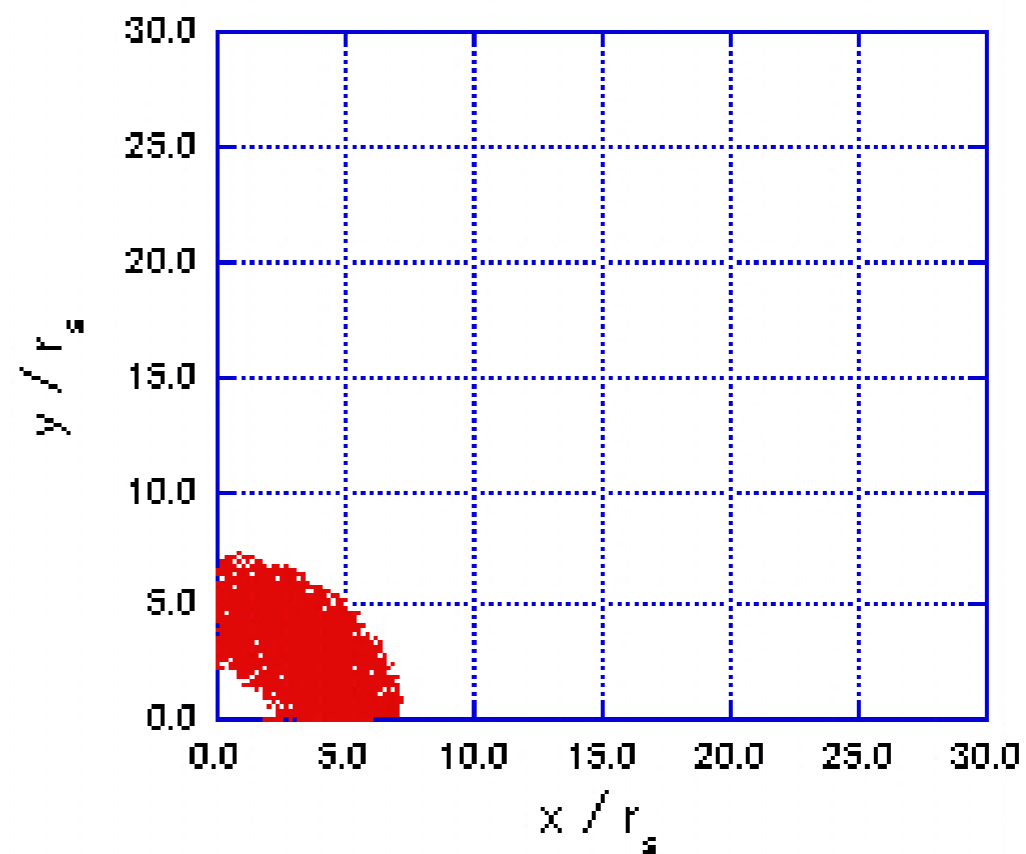
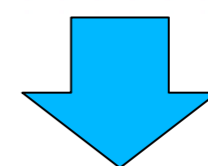
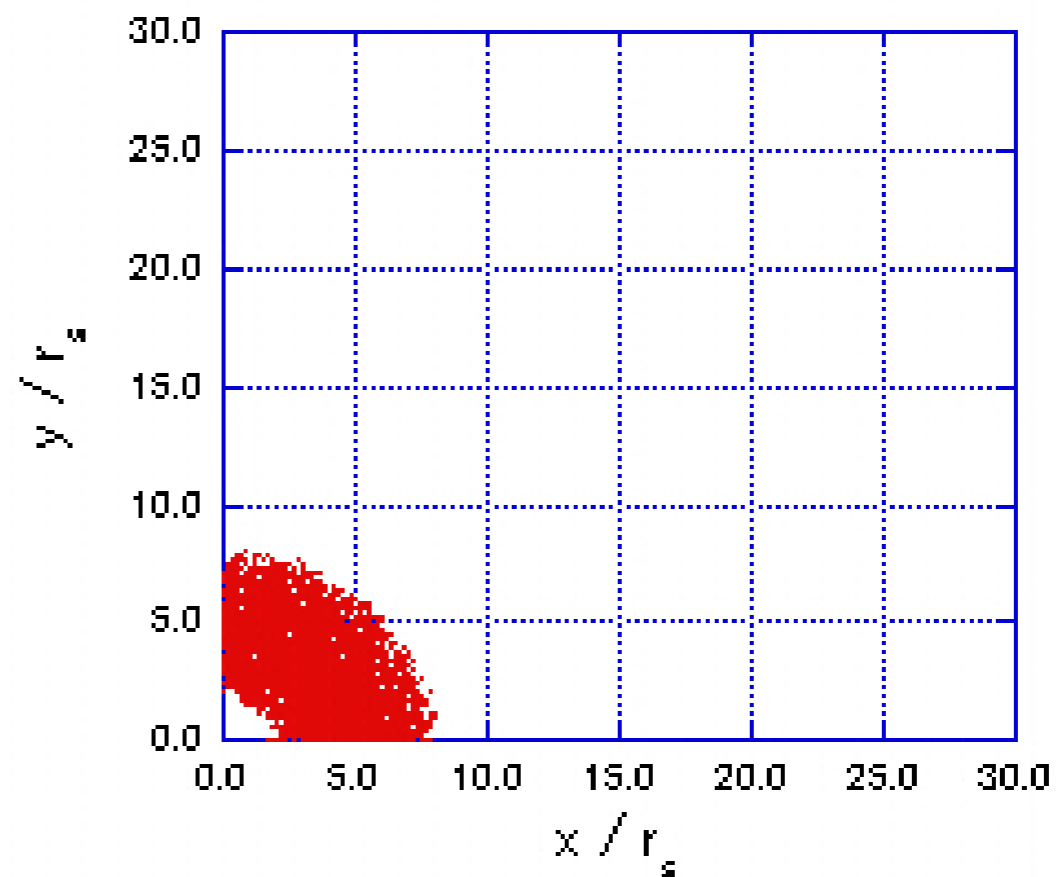
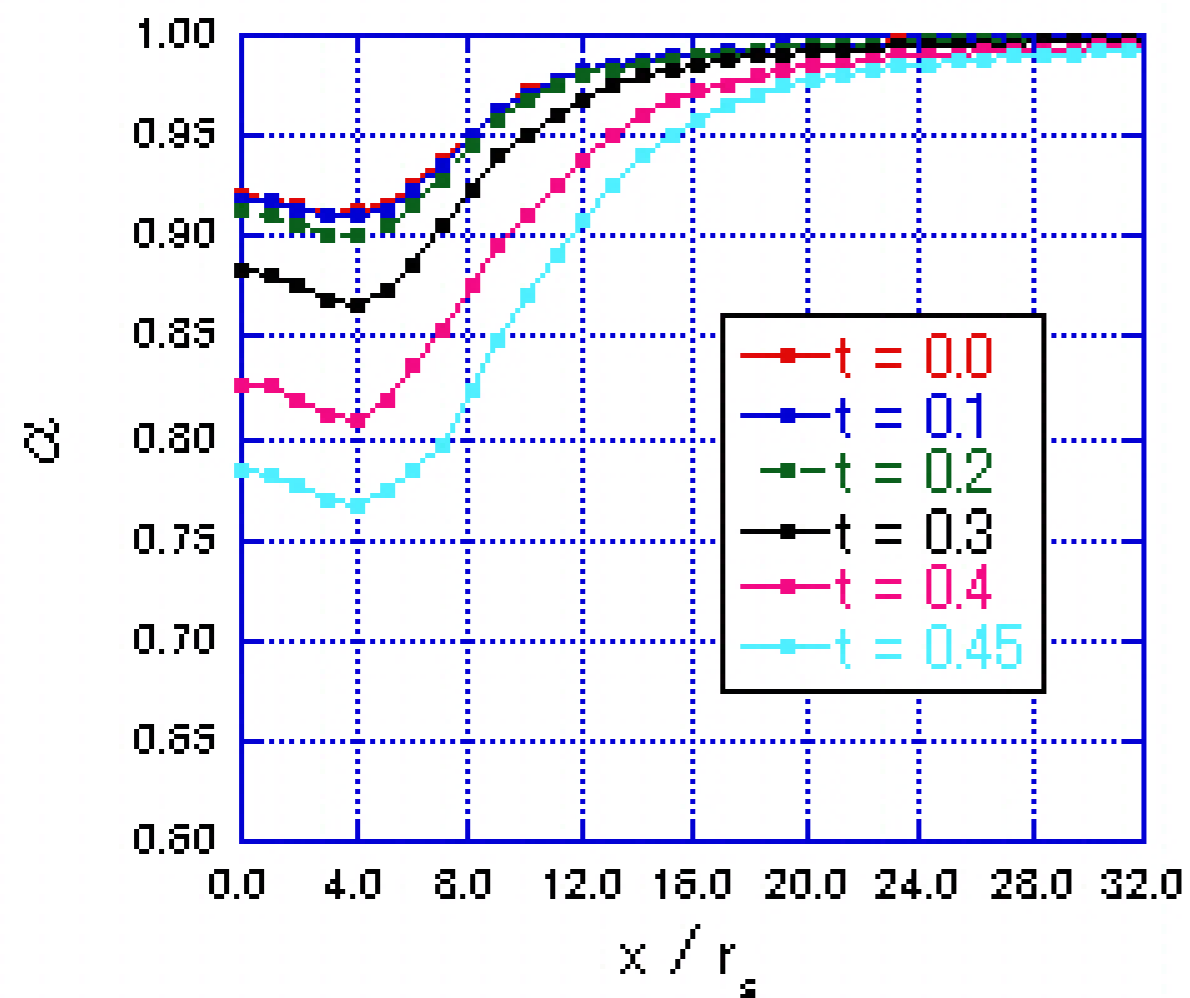
結果 初期条件 \rightarrow horizonなし



結果 初期条件 \rightarrow horizonなし



結果 初期条件 \rightarrow horizonなし



4. 結論

4.1 初期値問題

- ・ ハミルトニアン拘束方程式を数値的に解き、Apparent horizon形成を調べることができた。
- ・ horizonの面積プロットから予想できる、重力崩壊のシナリオ
Collapse → ブラックリング
Collapse → ブラックリング → ブラックホール

4.2 時間発展

- ・ 初期のブラックリング形状のトーラス半径の違いによって崩壊してできるブラックオブジェクトの形が別れそうだ。
- ・ ブラックリング形状の重力崩壊によって、ブラックリングが形成されそうなケースを確認できた。

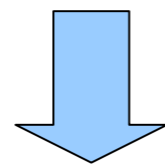
5. Future works

1. 初期値問題

- ・ 回転をいれる(運動量拘束方程式を解く)。

2. ダイナミクス

- ・ 5次元時空でのhorizon finder
- ・ 計算精度の向上 → 4次元のAMRの開発 もしくは次元をおとしてCartoon法で計算



これをクリアすれば、

- ・ 重力崩壊をシミュレーション (Shapiro-Teukolskyの5次元版)
- ・ ブラック・リングの安定性の検証。
- ・ ホライズンの内部をpunctureなどでくり抜いて、違うスライス条件で時間発展を行うことも必要。