ブラックホールのトポロジーと一意性

学習院大学 理学部

井田 大輔

ブラックホールの一意性

一意性定理

定理 1 漸近的に平坦，定常，リッチ平坦なブラックホール時空 (M^4, g) は，質量 M と角運動量 J $(GM^2 > c|J|)$ を除いて一意的である。

- 定常とは，無限遠で時間的となる完備なキリングベクトルが存在すること。
  各点に対して計量が $g(t, x^i) = g(x^i)$ となる座標近傍が存在する。

- 定常な時空が漸近的に平坦とは，計量が

$$g(x^i) = \left(1 + O(r^{-1})\right)[-dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2] + O(r^{-2})$$

  となるような座標近傍が存在すること。

- 定常時空であって，各点でキリングベクトルが超曲面直交であるものを静的時空とよぶ。このとき計量が

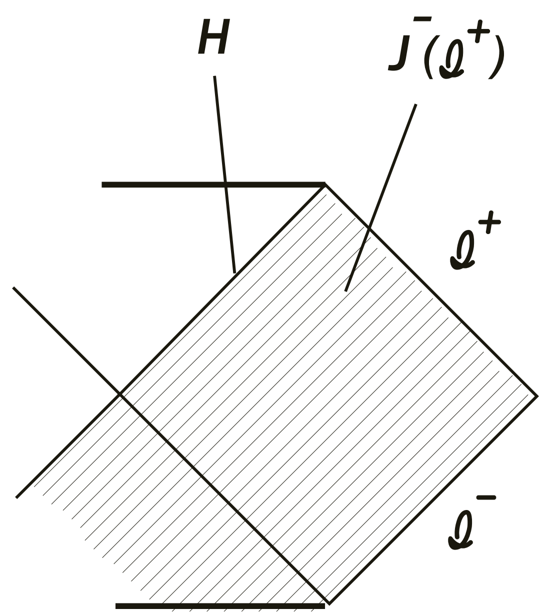
$$g = \left(\begin{array}{c|c} g_{00}(x^k) & 0 \\ \hline 0 & g_{ij}(x^k) \end{array}\right)$$

と書ける座標近傍が存在する。

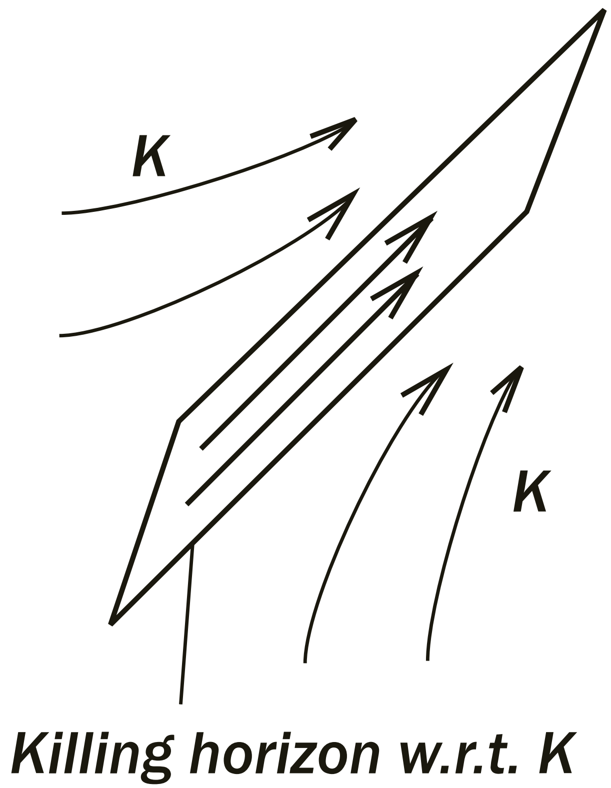
- $U(1)$ が等長的に作用しており，各軌道が空間的閉曲線となり，この作用による不動点集合（軸）が空でないとき，時空は軸対称であるという。

ブラックホール地平面

定義 2 (事象の地平面) 漸近的平坦な時空(M, g)において，$H = \dot{J}^-(\mathscr{I}^+) \cap M$ で定義される，M のヌル超曲面を事象の地平面とよぶ。



定義 3 (キリング地平面) キリングベクトル場 K に対し，K がゼロでないヌルベクトルになる集合がヌル超曲面であり，K の生成する等長変換によって不変なものを K に関するキリング地平面という。



補題 4 (Hawking 1972, Chruściel＋Wald) 定常時空において，事象の地平面の空間的断面は*2*球面と位相同型である。

注意 1

- *Hawking*が示したことは，見かけの地平面が*2*球面であるか測地的な*2*トーラスであるかのどちらかであるということ。

- *2*トーラスの場合は，ブラックホールの外部領域が単連結ではなくなるために排除される。

注意 2 ($d \geq 5$)では，地平面は非負スカラー曲率をもつリーマン計量を許容しなければならない。*(Cai＋Galloway)*

剛性定理

補題 5 (Hawking 1972, Chruściel 1997) 解析的時空 (解析的ローレンツ多様体) が漸近平坦，定常的であれば，事象の地平面は定常キリングベクトル ξ に関するキリング地平面であるか，そうでなければ時空は軸対称である。

注意 3

- 強い意味で定常（ξ が時間的）な開集合の上ではアインシュタイン方程式は楕円型なので、適当ななめらかさの仮定のもとで解析的になる。

- 上の補題は地平面の外部領域と，地平面上での解析性を必要とする。

注意 4 任意次元で解析的定常ブラックホール時空は付加的に$U(1)$等長的である。*(Hollands*＋石橋＋*Wald)*

無回転ブラックホール

補題 6 (Hawking 1972) 定常時空において, 事象の地平面が定常キリングベクトルに関するキリング地平面であるとき, 静的時空となる。

命題 7 (Israel) 漸近平坦, 静的, 真空であるブラックホール時空は*Schwarzshild*解である。

注意 5 $d(\geq 4)$ 次元において, 漸近平坦, 静的, 真空であるブラックホール時空は*Schwarzshild*解である。*(Hwang, Gibbons*+井田+白水*)*

回転ブラックホール

補題 8 (Carter) 定常軸対称時空において，対応する等長変換群はアーベル群$U(1) \oplus \boldsymbol{R}$である。

補題 9 定常軸対称時空において，等長変換の軌道に直交する*2*次元接分布は積分可能。したがって，計量はブロック対角型

$$g = \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

となる。

注意 6 *5*次元の定常*2*軸対称時空で同様なことが成り立つ。*(*森澤*+*井田*)*

補題 10 (Geroch,Ernst) 定常軸対称時空において，*Einstein* 方程式の真空解は，非線形シグマ模型: $E^3 \to H^2$ の軸対称解と等価である。

Kaluza-Klein 的な解釈

$$
\begin{aligned}
g &= e^{2\psi}(d\phi^2 + A_0 dt)^2 + e^{-2\psi} h^{(3)} \\
h^{(3)} &= -\rho^2 dt^2 + e^{2\gamma(\rho,z)}(d\rho^2 + dz^2)
\end{aligned}
$$

古典的に等価なスカラー-ベクトル or 2スカラー理論

$$
\begin{aligned}
L &= R^{(3)} - 2(d\psi)^2 - \frac{1}{4}e^{4\psi}F^2 \\
&\sim R^{(3)} - 2(d\psi)^2 - \frac{1}{4}e^{-4\psi}(d\theta)^2 \\
d\theta &= e^{4\psi} *_h F
\end{aligned}
$$

補題 11 (Mazur, Bunting) 標的空間が等質リーマン多様体であるか, 断面曲率が非正のリーマン多様体であるような, 非線形シグマ模型のディリクレ問題の解は一意である。

命題 12（Kerrブラックホールの一意性，Robinson） 漸近的に平坦で，定常軸対称なブラックホール時空は，地平線が縮退していなければ、2つの実パラメータ(M, J)の自由度をのぞいて一意的である。

注意 7 *5次元時空において，漸近的に平坦で，定常2軸対称で事象の地平面が3球面に同相であるようなブラックホール時空は，地平線が縮退していなければ、3つの実パラメータ(M, J_1, J_2)の自由度をのぞいて一意的である。(森澤+井田)*

まとめ

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{定常b.h.} \arrow[d, "d\geq 5"] \arrow[dr, "d\geq 5"] & \\
 & \text{定常1軸対称} \arrow[dl] \arrow[d, "?"] & \\
\text{対称性の低いb.h.?} & \text{定常}[(d-1)/2]\text{軸対称} \arrow[d, "d=5"] & \text{静的} \arrow[dd, "d\geq 5"] \\
 & M^3\text{上の非線形}\sigma\text{模型} \arrow[d, "d=5"] & \\
 & \text{Kerr/Myers-Perry} & \text{Schwarzschild}
\end{tikzcd}
$$

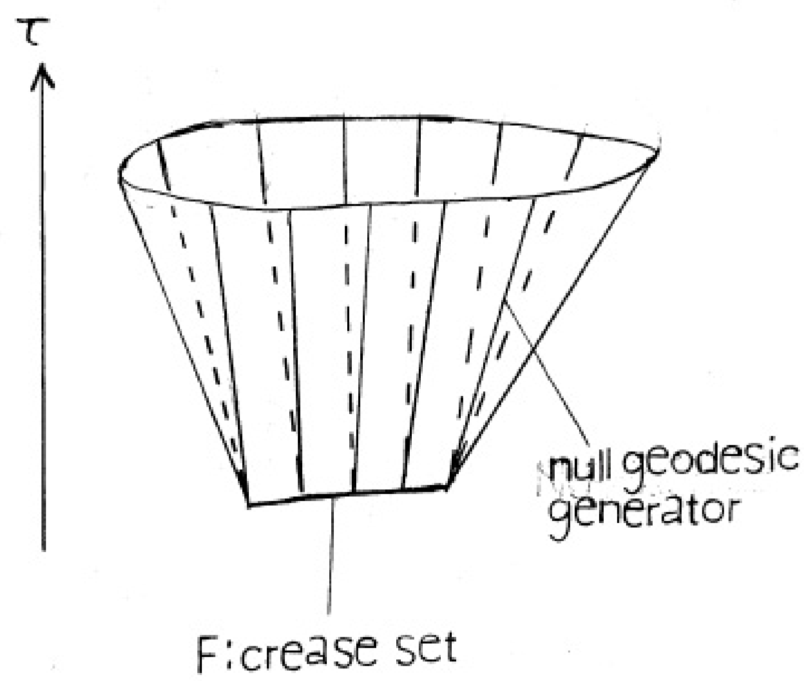
- extreme Kerr の一意性 (Amsel+Horowitz+Marolf+Roberts)
- 剛性定理を必要としない一意性定理 (Ionescu+Klainerman)

事象の地平面のトポロジー

事象の地平面

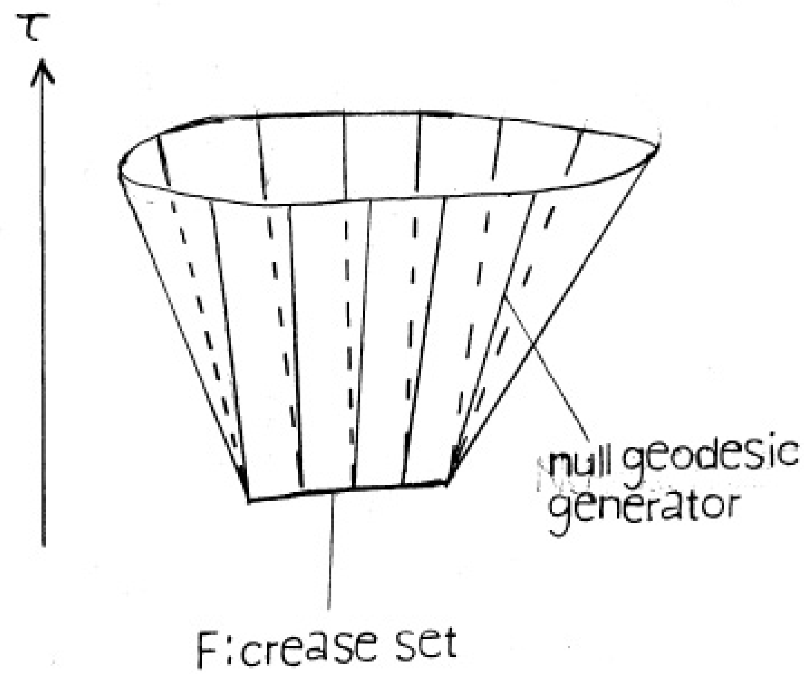
補題 13 *e.h.* (H) は未来側の端点をもたないヌル測地線を母線としてもつヌル超曲面である。

有限の過去からはじまるe.h.を考える。このとき，$W(\tau_1) = H \cap \{\tau \leq \tau_1\}$ はコンパクト位相多様体である。



折り目集合

定義 14 (折り目集合) *e.h.*の過去側の端点の集合 F を折り目集合とよぶ。



注意 8

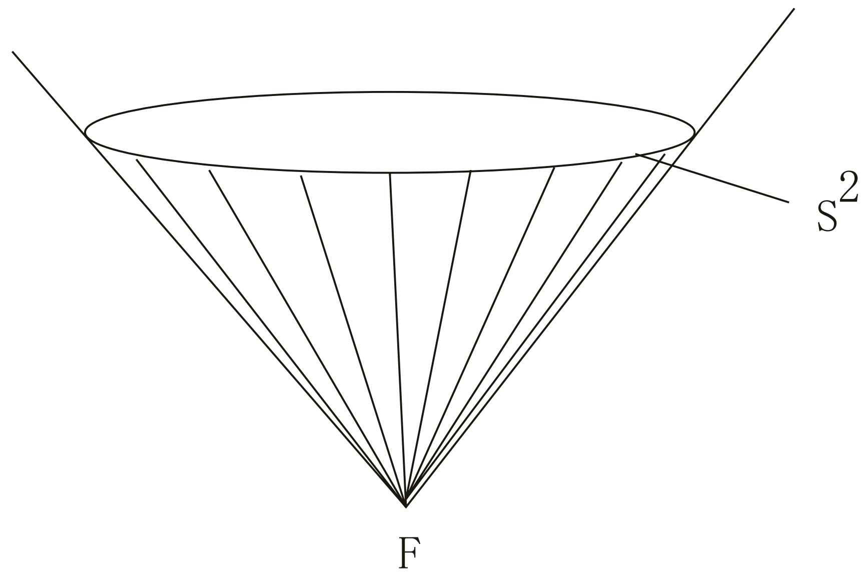
- F は H より次元の低い部分集合。
- F は H の部分多様体であるとは限らない。
- F の閉包の上で $H \subset M$ は微分可能でない。

e.h. のトポロジーは折り目集合できまっている。(椎野 1998)

1. $F =$ 一点: S^2-b.h. の生成

2. $F =$ 線分: N 個の b.h. の合体

3. $F =$ ディスク: $T^2 \to S^2$-b.h.

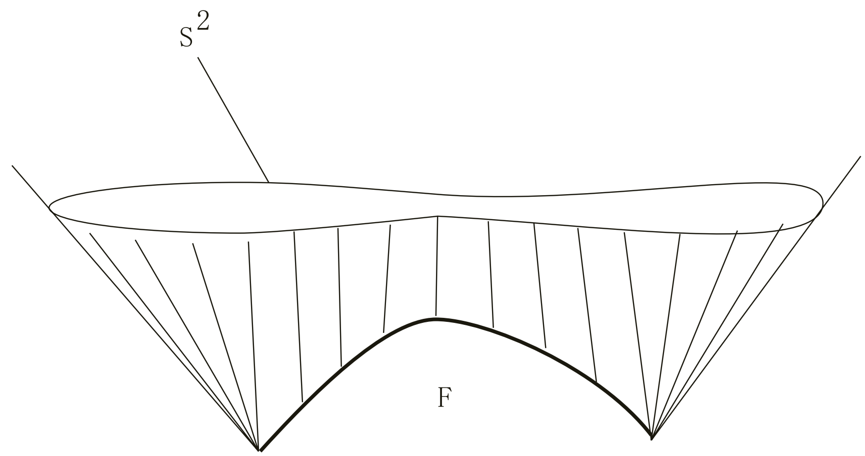


e.h. のトポロジーは折り目集合できまっている。(椎野 1998)

1. $F =$ 一点: S^2-b.h. の生成

2. $F =$ 線分: N 個の b.h. の合体

3. $F =$ ディスク: $T^2 \to S^2$-b.h.

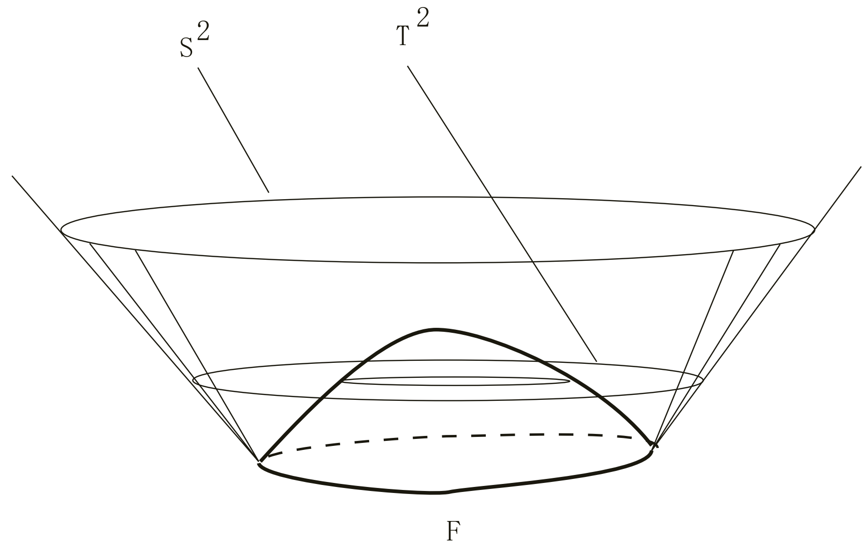


e.h. のトポロジーは折り目集合できまっている。(椎野 1998)

1. $F =$ 一点: S^2-b.h. の生成

2. $F =$ 線分: N 個の b.h. の合体

3. $F =$ ディスク: $T^2 \to S^2$-b.h.



- M^4 において，1次元的な折り目集合の長さ L はb.h. の質量 M として，$L \lesssim GM/c^2$ だろう。(井田＋中尾＋椎野＋Hayward)

- M^4 において，1次元的な折り目集合の配意はb.h. エントロピーを与える。(椎野)

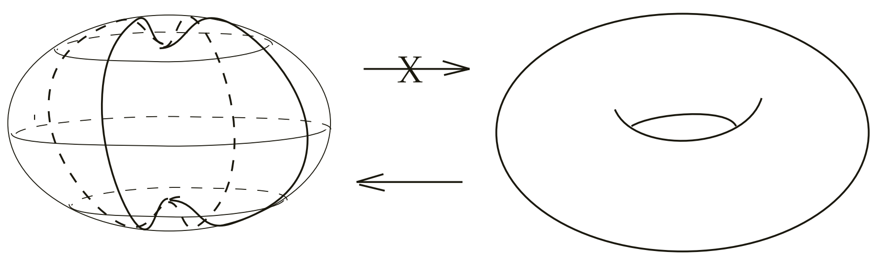
- M^4 において，generic な折り目集合は位相的に分類される。(古池＋椎野 2004)

- M^4 において，連星b.h. は半周まわる前に合体する。(椎野＋井田 2009)

b.h.の位相変化における禁止過程

1. M^nにおいて, 1つのb.h.が複数のb.h.に分裂することはない。(Hawking)

2. M^5において, S^3-b.h.に穴があいて, $S^2 \times S^1$-b.h.となることはない。(井田+椎野 2007)



e.h. と折り目集合の関係

補題 15 (井田 2009) 十分大きな τ に対して, $W(\tau)$ と折り目集合 F はホモトピー同値である。

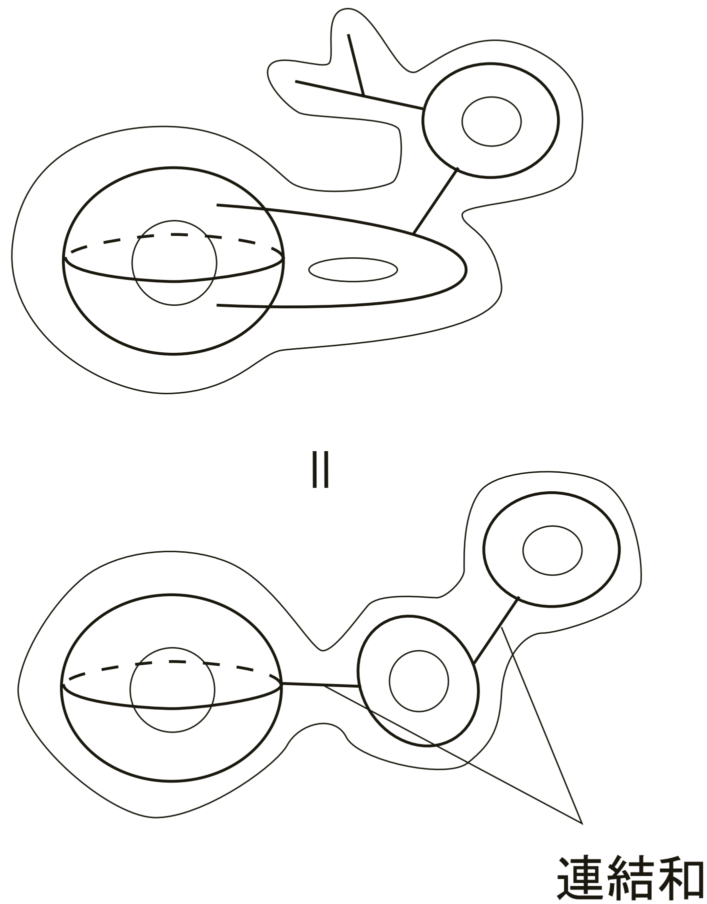
注意 9

1. $i: F \to W(\tau)$, $p: W(\tau) \to F$ が存在して,
   $ip \simeq id_{W(\tau)}$, $pi \simeq id_F$

2. F は弧状連結であるという結果 (椎野) の高階のホモトピー群への一般化である。

注意 10

- F は多様体ではないが，多様体を線分でつなげたものと思える。
- F が多様体 M ならば，$H(\infty)$ は M 上の球面束。
- $H(\infty)$ は球面束の連結和や鉛管工事と思える。



高次元ブラックホールの可能な位相

補題 16 (Cai＋Galloway 2001) 主エネルギー条件のもと，十分未来における *e.h.* の空間的断面は非負スカラー曲率をもつリーマン計量を許容する。

系 17 5次元時空において，*e.h.* の空間的断面は十分未来において，S^3，$S^2 \times S^1$，$L(p,q) = S^3/\Gamma$ またはそれらのいくつかのコピーの連結和である。

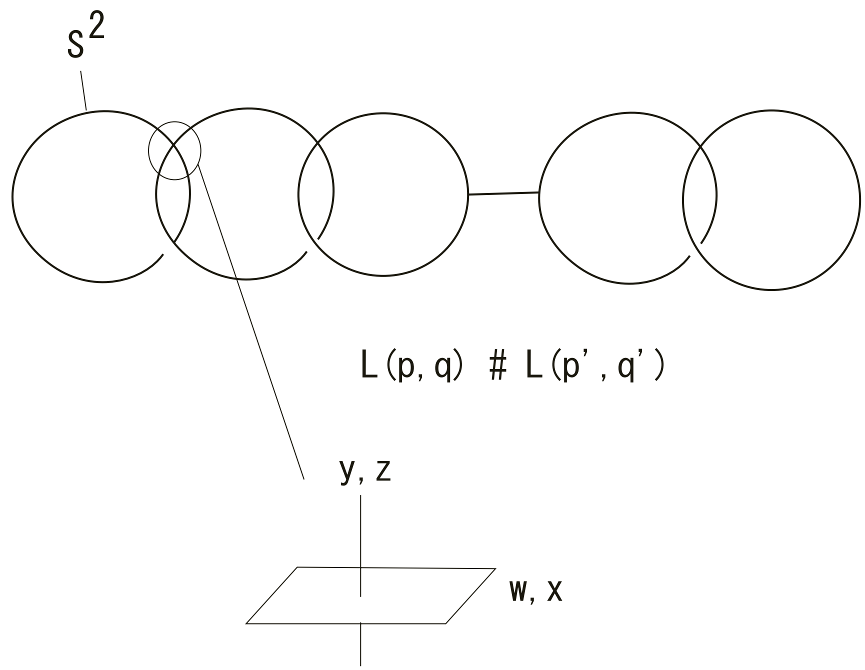
５次元時空におけるe.h.と折り目集合 (井田 2009)

1. $F \simeq$ 一点: S^3-b.h. の生成

2. $F \simeq S^1$: $S^2 \times S^1$-b.h. の生成

3. $F \simeq S^2$: S^3, $S^2 \times S^1$ または レンズ空間 $L(p, 1)$-b.h.

4. $F \simeq S^2 * S^2 * \cdots * S^2$: レンズ空間 $L(p, q)$-b.h.



今後の課題

- e.h. の geometry を考慮し，フープ予想等に応用したい。

- 半周定理のように，因果関係だけからいえることはないか？

- 6 次元以上の時空の e.h. の形成について何かわかることはないか？