# 一般相対論における数学のいくつかの話題

山田　澄生

２０１２年3月２１日

## ADM-Hamiltonian形式と３つの話題

1. 擬局所的質量

2. Cheeger-Gromov理論の応用

3. Penrose予想にまつわるモース汎関数

## 0．アインシュタイン方程式のADM-Hamiltonian形式

まずローレンツ多様体$(M^4, h)$上のEinstein-Hilbert作用$\int_{M^4} R_h\sqrt{-h}dx$からラグランジアン$\mathcal{L}_h = R_h\sqrt{-h}$が定まる．アインシュタイン方程式は

$$\delta\mathcal{L}_h = 0 \Longleftrightarrow (\mathrm{Ric}_h)_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R_h g_{\alpha\beta} = 0$$

である。いま

$$(\Sigma^3, g_{ij}) \hookrightarrow (M^4, h_{ij})$$

$g_{ij}, k_{ij}$はそれぞれ$\Sigma$の第１、第２基本形式として

$$\pi^{ij} = \sqrt{g}(k^{ij} - (\mathrm{tr}_g k)g^{ij})$$

とおくと一般化座標$q = g_{ij}$、一般化運動量$p = \pi^{ij}$とおくことでハミルトニアンが以下で定義される：

$$\mathcal{H}_h := \pi^{ab}\dot{g}_{ab} - \mathcal{L}_h$$

$g$ と $\pi$ は $\Sigma^3$ が $M^4$ の部分多様体であることから Gauss 方程式と Codazzi 方程式をみたす：

$$R_g = \frac{1}{g}[\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}(g_{ab}\pi^{ab})^2], \quad \nabla_i \pi^{ij} = 0$$

$\nabla$ は $g$ の Levi-Civita 接続．このときハミルトニアン力学の一般論から

$$\dot{g}_{ij} = \frac{\delta \mathcal{H}_h}{\delta \pi^{ij}} = 2Ng^{-1/2}[\pi_{ij} - \frac{1}{2}(g_{ab}\pi^{ab})g_{ij}] + N_{i;j} + N_{j;i}$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta \mathcal{H}_h}{\delta g_{ij}} = -Ng^{1/2}[R_g^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R_g] + \cdots$$

ここで $t^\mu := \frac{\partial}{\partial x^0}$、$n^\mu$ を $\Sigma^3$ の単位時間的方ベクトルとすると $N^\mu$ は $\Sigma$ の接束上のベクトル場；

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu, \quad n^\mu N_\mu = 0$$

$(N, N^i)$ は Lapse と Shift とよばれるゲージで、$N^i$ は微分同相写像の族 $\phi(x,t) : \Sigma \to \Sigma$ に対して $(\Sigma, \phi^* g) \to (\Sigma, g)$ が等長写像であることの線形化 $(\dot{\phi} = N^i)$

**漸近平坦性**：$\Sigma^3 \backslash K \cong^{\text{diff}} \mathbb{R}^3 \backslash B_1(0)$ で $\mathbb{R}^3 \backslash B_1(0)$ の座標系 $x = (x^1, x^2, x^3)$ を用いて計量 $g$ と外的曲率 $k$ が以下の減衰を持つ；

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O_2(|x|^{-1}),\ \ p_{ij} = O_1(|x|^{-2})$$

ここで $O_i(|x|^{-j})$ は関数が $C/|x|^j$ と比較されその $i$ 階微分が $C'/|x|^{j+i}$ の減衰をすることを指す.

いまアインシュタイン方程式の解 $(M^4, h)$ が漸近的にミンコフスキー空間で近似されているとするとき、ネーターの定理により $M$ の無限遠方には $SO(3,1)$ の作用によって保存される量がある。

- 時間の平行移動に関する保存量：ADM 質量　$M$

- 空間の平行移動に関する保存量：（線形）運動量 $P(= p^\mu)$

- 空間の回転に関する保存量：角運動量 $J$

# 1．擬局所的質量

Christodoulou-YauはADM質量（漸近的平坦な時空に定義される）の擬局所的な質量が以下の条件を満たすことを要請した.

1. The ADM or Bondi mass should be recovered as spatial or null infi

   nity is approached.

2. The correct limits need be obtained when the surface converges to a point.

3. Quasi-local mass must be nonnegative in general (under local energy condition) and zero when the ambient spacetime of the surface is the at Minkowski spacetime.

4. It should also behave well when the spacetime is spherically symmetric.

Shi-Tamは2001に以下の重要な結果を証明した.

**定理**　Let $(\Omega, g)$ be an $n$-dimensional compact Riemannian spin manifold with non-negative scalar curvature and mean convex boundary. If every component $\Sigma_i$ of the boundary is isometric to a strictly convex hypersurface $\hat{\Sigma}_i \subset \mathbb{R}^n$, then

$$\int_{\Sigma_i} H d\sigma \leq \int_{\hat{\Sigma}_i} \hat{H} d\hat{\sigma}$$

where $H$ is the mean curvature of $\Sigma_i$ in $(\Omega, g)$ $\hat{H}$ is the Euclidean mean curvature of $\hat{\Sigma}$ in $\mathbb{R}^n$, and where $d\sigma$ and $d\hat{\sigma}$ denote the respective volume forms. Moreover, equality holds for some boundary if and only if $(\Omega, g)$ is isometric to a domain in $\mathbb{R}^n$.

**定義** RHS-LHS: Brown-York mass

これは擬局所正質量定理と解釈できる．(Brown-York，Hawking-Horowitz，Liu-Yau，Wang-Yau)

いま$(M^4, h)$を境界付きローレンツ多様体とする．また$\partial M$がミンコフスキー空間$\mathbb{R}^{3,1}$に等長的に埋め込まれているとき相対的Einstein-Hilbert作用を（$g_0$はミンコフスキー計量）

$$I(g) - I(g_0) = \frac{1}{16\pi}\int_M (R_h - 0) + \frac{1}{8\pi}\int_{\partial M}(K - K_0)$$

で定めると境界付きADM形式のもとで以下のハミルトニアンが定まる．

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M\cap\{t=t_0\}} N(K_0^{(2)} - K^{(2)}) + N^\mu k_{\mu\nu} r^\nu$$

ここで$K^{(2)}$、$K_0^{(2)}$は$\partial M \cap \{t = t_0\}$の平均曲率、$r^\nu$は$\partial M \cap \{t = t_0\}$の空間的外向き法線ベクトル．$\partial M$の$\mathbb{R}^{3,1}$への全ての等長埋め込みに関してinfをとることで擬局所質量$m(\partial M)$が定義され、それは上に述べた条件を満たしている。

**コメント**：

1. $\partial M \cap \{t = t_0\}$が全測地線的$k_{ij} = 0$のときShi-Tamの定理に帰着する.

2. $\{\partial M\} \to \{P\}$（Null測地線に沿って極限を取る）のとき$m(\partial M)$はBel-Robinsonテンソルに収束.

3. Yauの動機（の一つ）はアインシュタイン方程式に非線形波動方程式のエネルギー評価法の導入.

## 2. Cheeger-Gromov理論の応用

いま与えられたデータ$(g_{ij}, k_{ij})$がKillingベクトル場$k^i$ $(L_k g = 0)$を持つ空間的スライスΣ$^3$であるとすると、ある適当なゲージ$(N, N^i)$を択ぶことで、$k^i = t^i$にすることで

$$\dot{g}_{ij} = 0,\ \ \dot{\pi}^{ij} = 0$$

と正規化できる。いま時空$(M, h)$全体にKillingベクトル場が存在し、$k^i$の積分曲線は$\mathbb{R}$に等長的であるとする．このときローレンツ計量$h$はアインシュタイン方程式の定常解(stationary solution)とよばれる．ΣはKillingベクトル場のOrbit空間とみることで$P : M^4 \to \Sigma^3$という射影が存在する。このときローレンツ計量は$P$と$g$を用いて

$$h = -N^2(dt + \theta)^2 + P^*(g)$$

とあらわされる。ここで$\theta$はshiftベクトル場の双対１形式である．このとき上のハミルトニアン形式から導かれた等式を使ってアインシュタイン方程式は$N = u$と置き換えると以下のΣ上で定義される方程式系に還元される．ただし$\omega = -u^4 * d\theta$

$$(\mathrm{Ric}_g)_{ij} = u^{-1}\nabla_i\nabla_j u + 2u^{-4}(\omega \otimes \omega - |\omega|^2 g)_{ij}$$

$$\triangle_g u = -2u^{-3}|\omega|^2$$

$$d\omega = 0$$

いまKillingベクトル場$k^i$は$\Sigma$に直交しているとすると$N^\mu = 0$になり、$\omega = 0$が従う．よって上の式は

$$u(\mathrm{Ric}_g)_{ij} = \nabla_i \nabla_j u, \ \ \triangle_g u = 0$$

このとき$h$はアインシュタイン方程式の静的解とよばれる．ちなみに$\pi^{ij} = 0$で$\Sigma$は$M = \Sigma \times \mathbb{R}$内で全測地線的な埋め込みとなる．($\longrightarrow$ Bunting-Masood-al-Alam一意性定理)

$(\Sigma, g)$上のリーマン幾何学的設定に、さらに共形変換$\tilde{g} = u^2 g$をなす．すると上の3つの式から

$$\tilde{\mathrm{Ric}}_g = 2(d\ln u)^2 + 2u^{-4}\omega^2 \geq 0$$

かつ$d\phi = 2\omega$としたとき$E(x) := (\phi(x), u^2(x))$で定まるErnst Map
$E : (\Sigma, \tilde{g}) \to \mathbb{H}^2$が調和写像になっていることがわかる．

**定理**(M. Anderson, 2000) アインシュタイン方程式の完備かつ真空な定常解はミンコフスキー時空とその商空間に限る

**証明のキーポイント：**

1. 上記の定常解$(\Sigma, g, u, \omega)$の満たす方程式系が
$$u \mapsto \lambda u,\ \ \omega \mapsto \lambda^2 \omega$$
に関してスケール不変である.

2. 定常解の列$\{(\Sigma_i, g_i, u_i, \omega_i)\}$がリッチ曲率、直径の上界のもとでのGromov-Cheegerによる収束／崩壊定理.

3. 調和写像のエネルギー濃度に関するBochner公式を用いた消滅定理. ここで$\widetilde{\mathrm{Ric}}_g \geq 0$を用いる.

# 3.Penrose予想にまつわるモース理論の可能性

**Penrose予想**：漸近的平坦な初期条件 $(\Sigma^3, g, k)$ のもとアインシュタイン方程式の解は時間漸近的に定常 (Kerr) 解に収束する.

**正質量定理**(Schoen-Yau, Witten)

$$m \geq 0$$

等式は $\Sigma = \mathbb{R}^3$

**Riemannian Penrose不等式**(Bray, Huisken-Ilmanen)
$(M, g, k = 0)$ の初期値に対して

$$m \geq \frac{1}{2} R$$

等式は（質量 $M$ の）Schwarzschild空間的スライスの時のみ. $R = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$：面積半径.

## 厳密解における等式

1. $m(\mathbb{R}^3) = 0$
   $(ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2)$

2. $m(\text{Schwarzschild}) = \frac{1}{2}R$
   $(ds^2 = (1 + \frac{m}{2r})^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2))$

3. $m(\text{Reissner-Nordstrom}) = \frac{1}{2}(R + \frac{Q^2}{R})$

4. $m(\text{Kerr}) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{4J^2}{R^2})^{1/2}$

**厳密解の等式は不等式の剛性か？**
**どの不等式か？**

1. $R \leq 2m$ Penrose不等式　OK

2. $R \leq m + \sqrt{m^2 - Q^2}$ ?

3. $R \leq \sqrt{2}(m^2 + \sqrt{m^4 - J^2})^{1/2}$ ?

**問題設定**：漸近不変量 $(M, Q, J)$ を固定したときに定まるモジュライ空間 $\mathcal{M}$ 上で汎関数としての面積半径 $R : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ をモース関数としてその最大値を特定する.

# 参考文献


- Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C.: The dynamics of general relativity. Gravitation: An introduction to current research pp. 227–265 Wiley, New York, (1962) available on arXiv.

- Anderson, M.: On stationary vacuum solutions to the Einstein equations. Ann Henri Poincaré 1 977–994 (2000).

- Shi, Y.-G., Tam, L.-F.: Positive mass theorem and the boundary behaviors of compact manifolds with nonnegative scalar curvature. J. Differ. Geom. 62, 79–125 (2002).

- Wang, M.-T., Yau, S.-T.: Quasi-local mass in general relativity. Phys. Rev.Lett. 102:021101 (2009)

- Bray, H.: Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. J. Differential Geom. 59, no. 2, 177–267 (2001).