高次元時空の漸近構造と分類

YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

基礎物理学研究所

D3 田辺健太郎

CONTENTS

1. INTRODUCTION

- 我々の宇宙は4次元時空
- 4次元時空の様々な性質

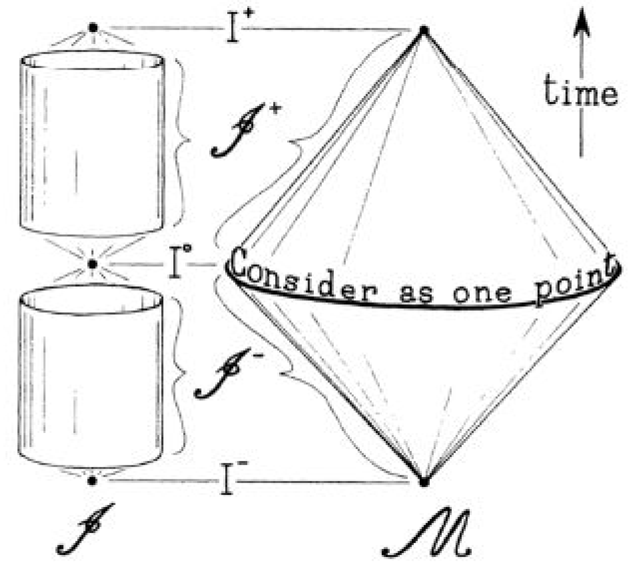
  $\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$ Einstein 方程式

  - ブラックホール解の構成法
  - ブラックホール解の唯一性
  - 漸近構造
  - ….

- 高次元への拡張

  漸近的平坦性の定義、時空の大域的な量（ADM質量、Bondi質量）

2. ASYMPTOTIC STRUCTURE

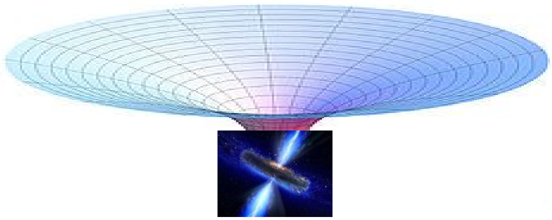


Penrose in PRL (1963)

ASYMPTOTIC FLATNESS

漸近構造を調べるには、境界条件を決める必要がある

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(\frac{1}{|x|^a})$$



「漸近的に平坦な時空」という境界条件

- 時空のどこで境界条件を課すのか

  ➡ spatial infinity or null infinity

- どのような境界条件が適切か

  ➡ 必要かつ十分なクラスの解を含む境界条件

SPATIAL INFINITIE

d 次元の場合

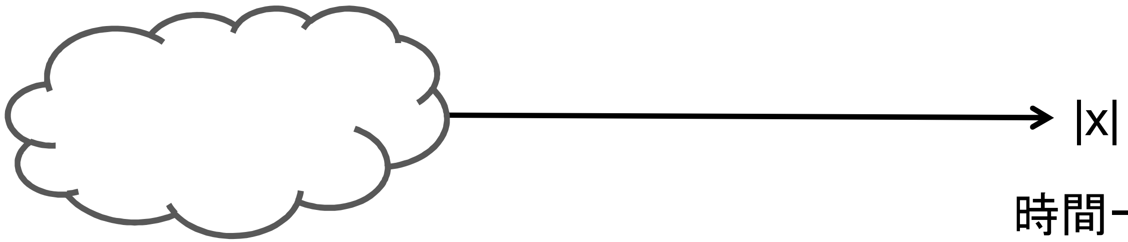
spatial infinity

$$\Delta\phi = 0 \;\Rightarrow\; \phi = \frac{1}{|x|^{d-3}}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O\left(\frac{1}{|x|^{d-3}}\right)$$

ADM質量、角運動量

境界条件



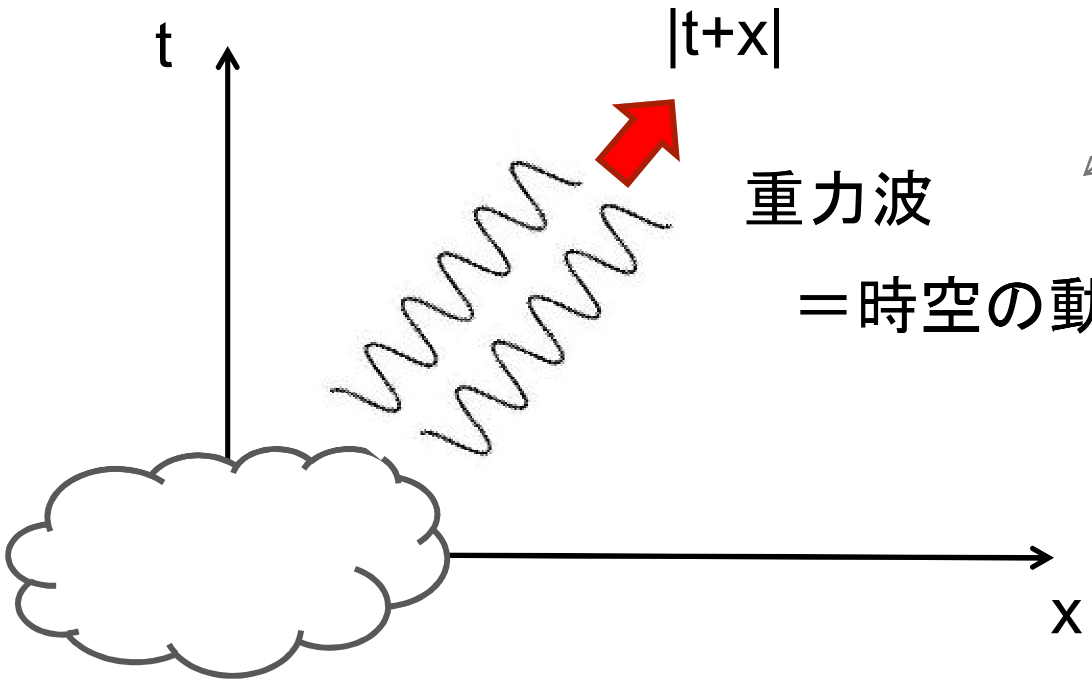
時間一定面

NULL INFINITY

d 次元の場合

$\boxed{\text{null infinity}}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\underline{\frac{1}{|t+x|^a}}\right)$$



重力波

＝時空の動的な情報

GRAVITATIONAL WAVES

重力波は波動方程式を満たす

$$\Box\phi = 0$$

$$\phi = \frac{1}{|t+x|^{d-2/2}} + \ \cdots$$

spatial infinity

$$\Delta\,\phi = 0$$

$$\phi = \frac{1}{|x|^{d-3}}$$

重力波を含む境界条件

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{|t+x|^{d-2/2}}\right)$$

HOW TO DEFINE

どのように定式化するか？

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{\underline{|t+x|}^{d-2/2}}\right)$$

- ✓ 共形埋込みを用いる方法

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \, g_{\mu\nu}$$

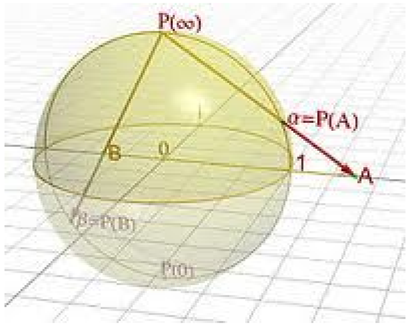
Penrose (1963),
Hollands and Ishibashi (2003)

- ✓ 座標系を導入する方法

Bondi coordinate

Bondi, et.al. (1962),
Tanabe, Kinoshita and Shiromizu (2011)

CONFORMAL METHOD



無限遠＝体積が無限大

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \, g_{\mu\nu}$$

共形埋込みで時空をコンパクト化

⇒ 境界(無限遠)を付加

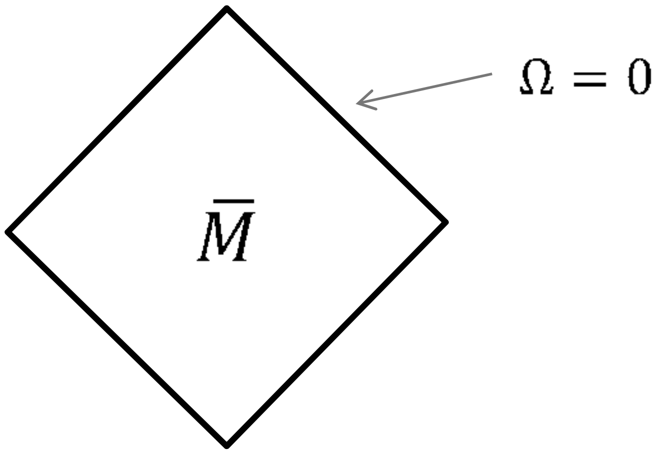
$$\Omega = 0$$

Minkowski 時空

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \, \eta_{\mu\nu}$$

⇒

共形埋込み



ASYMPTOTIC FLATNESS

BY CONFORMAL METHOD

n 次元時空のnull infinity における漸近的平坦性

n次元時空 $(\tilde{M},\ \tilde{g})$ に対して次の条件を満たす共形埋込み $g_{\mu\nu} = \Omega^2\ \tilde{g}_{\mu\nu}$ が存在するとき、時空は漸近的に平坦

i. $\mathrm{M} = \widetilde{M}\ \cup I$ は$\bar{M}$ と同相

ii. 次の境界条件を満たす

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + O\left(\ \Omega^{d-2/2}\right), \ldots$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{|t+x|^{d-2/2}}\right)$$

STABILITY

境界条件が安定　＝　重力波を含む境界条件

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + O(\,\Omega^{d-2/2}),\ldots$$

初期面で境界条件を満たすよう線形摂動を与える

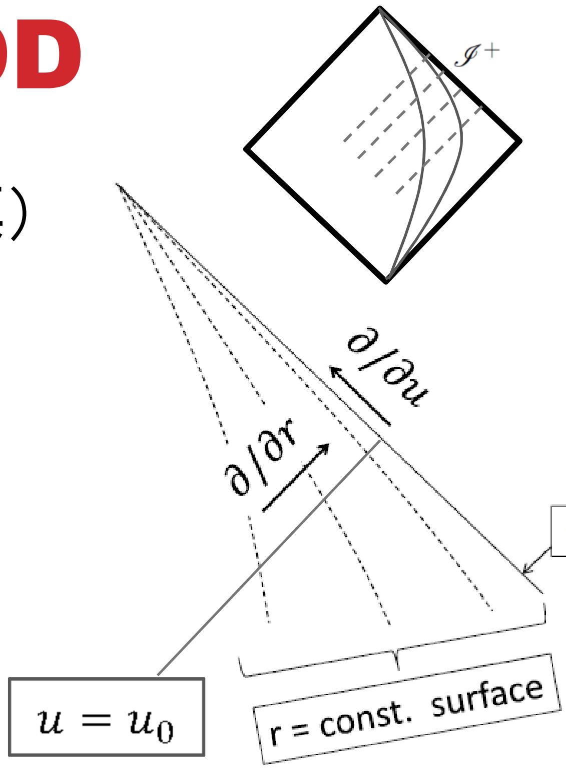
⇒ 偶数次元においては境界条件を満たしつつ
摂動は発展する

奇数次元では安定性は保証できない

境界条件が null infintiy ($\Omega = 0$) にて滑らかのものでない

COORDINATE METHOD

無限遠から直接座標を張る（Bondi座標）



- $g^{\mu\nu}\partial_\mu u \partial_\nu u = 0$ (u 座標)
- $g^{\mu\nu}\partial_\mu u \partial_\nu x^I = g^{uI} = 0$ (x^I (角度)座標)
- $\sqrt{\det g_{IJ}} = r^{d-2}\omega_{d-2}$ (r 座標)

Bondi座標での計量

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 &= -Ae^B du^2 - 2e^B du dr \\ &\quad + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du) \end{aligned}}$$

null infinity は $r=\infty$

EINSTEIN EQUATION

$$ds^2 = -Ae^B du^2 - 2e^B du dr + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du)$$

どのように境界条件を課すと良いかを調べるために、
Einstein方程式をBondi座標の下で見てみる。

Einstein 方程式は拘束系

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$

- 拘束条件 (u微分を含まない)
- 発展方程式 (u微分を含む)

CONSTRAINT EQUATION

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -Ae^B du^2 - 2e^B du dr \\
&\quad + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du)
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{IJ} = r^2 h_{IJ}$$

$\hat{R}_{rr} = 0$ ⇨ $$B' = \frac{r}{4(d-2)} h'_{IJ} h'_{KL} h^{IK} h^{JL}$$

$\hat{R}_{ab}\gamma^{ab} = 0$ ⇨
$$
\begin{aligned}
(d-2)\frac{(r^{d-3}A)'}{r^{d-2}} &= -\nabla_I U^{I\prime} - \frac{2(d-2)}{r}\nabla_I U^I - \frac{r^2 e^{-B}}{2} h_{IJ} U^{I\prime} U^{J\prime} \\
&\quad - \frac{e^B}{2r^2} h^{IJ} \nabla_I B \nabla_J B - \frac{e^B}{r^2}\nabla_I (h^{IJ}\nabla_J B) + \frac{e^B}{r^2}{}^{(h)}R
\end{aligned}
$$

$\hat{R}_{rJ}\gamma^{IJ} = 0$ ⇨ $$\frac{1}{r^{d-2}}(r^d e^{-B} h_{IJ} U^{J\prime})' = -\nabla_I B' + \frac{d-2}{r}\nabla_I B + {}^{(h)}\nabla^J h'_{IJ}$$

⇨ A, B, U^I は h_{IJ} から求めることができる

h_{IJ} への境界条件を考えればよい

EVOLUTION EQUATION

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 &= -Ae^B du^2 - 2e^B du dr \\ &\qquad + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du) \end{aligned}}$$

$$\gamma_{IJ} = r^2 h_{IJ}$$

$$\hat{R}_{\mu\nu}\gamma^{\mu}{}_I \gamma^{\nu}{}_J = 0$$

$$\begin{aligned}
& e^{-B}\left[r^2 \dot{h}'_{IJ} + \frac{d-2}{2} r\dot{h}_{IJ} - \frac{r^2}{2}\dot{h}_{IK}h'_{JL}h^{KL} - \frac{r^2}{2}\dot{h}_{JK}h'_{IL}h^{KL}\right] \\
& \quad -\frac{Ae^{-B}}{2}\left[r^2 h''_{IJ} + (d-2)rh'_{IJ} + 2(d-3)h_{IJ} + r^2 h^{KL}h'_{IK}h'_{JL}\right] - \frac{A' e^{-B}}{2}\left[r^2 h'_{IJ} + 2rh_{IJ}\right] \\
& \quad -\frac{e^{-B}}{2}\Big[2r^2 \mathcal{L}_U h'_{IJ} + (d-2)r\mathcal{L}_U h_{IJ} + r^2 \mathcal{L}_{U'} h_{IJ} - \mathcal{L}_U h_{IK} h'_{JL} h^{KL} \\
& \qquad\qquad - \mathcal{L}_U h_{JK} h'_{IL} h^{KL} + \nabla_K C^K (r^2 h'_{IJ} + 2rh_{IJ})\Big] \\
& \quad -\frac{e^{-2B}}{2} r^4 h_{IK} h_{JL} U'^K U'^L - {}^{(h)}\nabla_I \nabla_J B - \frac{1}{2}\nabla_I B \nabla_J B + {}^{(h)}R_{IJ} = 0
\end{aligned}$$

INITIAL VALUE PROBLEM

Bondi座標における初期値問題

$$ds^2 = -Ae^B du^2 - 2e^B du dr + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du) \qquad \gamma_{IJ} = r^2 h_{IJ}$$

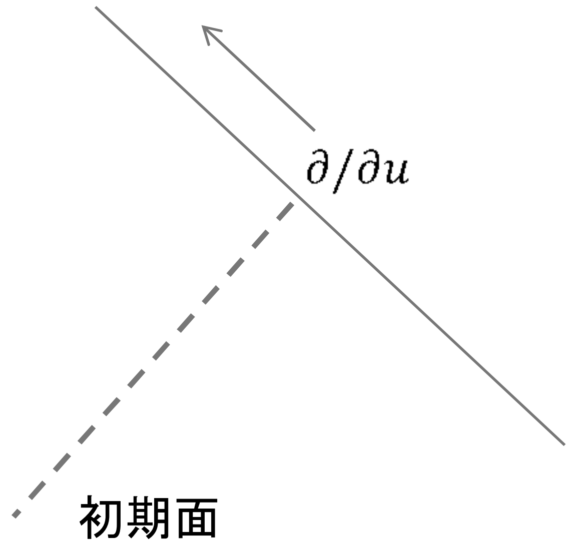
初期面で h_{IJ} を与える

拘束条件

A, B, U^I が求まる

発展方程式

h_{IJ} の発展が求まる



ASYMPTOTIC FLATNESS

BY COORDINATE METHOD

Bondi座標における漸近的平坦性

$$\begin{aligned} ds^2 &= -Ae^B du^2 - 2e^B du dr \\ &\quad + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du) \end{aligned}$$

$$\gamma_{IJ} = r^2 h_{IJ}$$

$$\sqrt{\det h_{IJ}} = \omega_{d-2}$$

次の境界条件を満たすとき時空はnull infinityで**漸近的に平坦**という

$$h_{IJ} = \omega_{IJ} + O(r^{-(d/2-1)})$$

他の計量関数への境界条件はEinstein方程式から決まる

$$A = 1 + O(r^{-(d/2-1)}) \,,\ B = O(r^{-(d-2)}) \,,\ U^I = O(r^{-(d/2)})$$

GLOBAL QUANTITIES

Einstein方程式より大域的な量の存在が示唆される

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -Ae^B du^2 - 2e^B du dr \\
&\qquad + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du)
\end{aligned}
$$

A に関する拘束条件

$$
\begin{aligned}
(d-2)\frac{(r^{d-3}A)'}{r^{d-2}} = &-\nabla_I U^{I\prime} - \frac{2(d-2)}{r}\nabla_I U^I - \frac{r^2 e^{-B}}{2} h_{IJ} U^{I\prime} U^{J\prime} \\
&-\frac{e^B}{2r^2} h^{IJ}\nabla_I B \nabla_J B - \frac{e^B}{r^2}\nabla_I (h^{IJ}\nabla_J B) + \frac{e^B}{r^2}{}^{(h)}R
\end{aligned}
$$

BONDI MASS

$$ds^2 = -Ae^B du^2 - 2e^B du dr + \gamma_{IJ}(dx^I + U^I du)(dx^J + U^J du)$$

A をnull infinity で展開する

ADM質量と同じオーダー

$$A = 1 + \ \dots - \frac{m}{r^{d-3}} + \ \dots$$

拘束条件からは決まらない初期面での関数

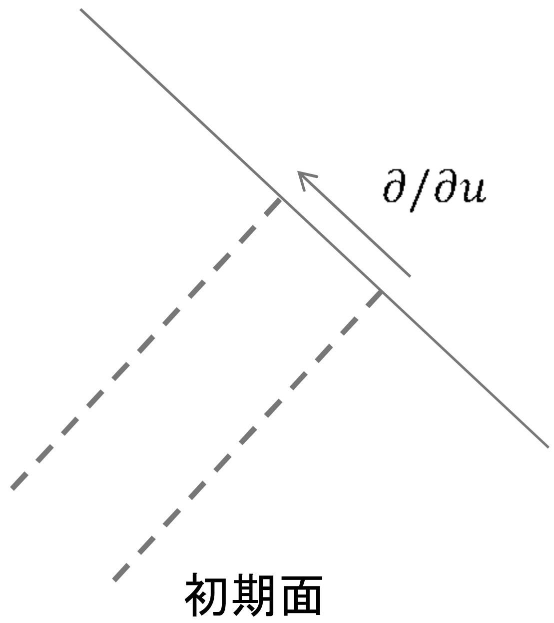
Bondi mass $M = \int_{S^{d-2}} m \, d\Omega$

DYNAMICS

<u>初期面での自由関数=Bondi質量</u>の発展はEinstein方程式より決まる

$$\dot{M} \propto -\int_{S^d} \left| \dot{h}^{(1)}_{IJ} \right|^2 d\Omega$$

$$h_{IJ} = \omega_{IJ} + \frac{h^{(1)}_{IJ}}{r^{d-2/2}} + \dots$$



重力波のエネルギーが正であることを意味

SHORT SUMMARY

Einstein方程式を用いて、

- 一般次元において漸近的平坦性を定義

  ➡ 必要かつ十分な解のクラスを持つ境界条件

- 重力波のエネルギーは正である

  ➡ null infinity における時空の質量の妥当性

※角運動量も議論可能

3. CLASSIFICATION

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}\quad \psi_2,\psi_3,\psi_4 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{II}\quad \psi_2,\psi_3 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{III}\quad \psi_3 \\
& \mathrm{D}\quad \psi_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{N}\quad \psi_4 \\
& & \mathrm{O}
\end{tikzcd}
$$

Petrov (1954)

PURPOSE

Einstein方程式を解きたい

= Weyl テンソルをなんとかすべき

⇧

Weyl tensor の方程式が満たす方程式（Bianchi恒等式）
を何とか解きやすい（扱いやすい）形にしてみる

＝ Petrov 分類 (4次元)

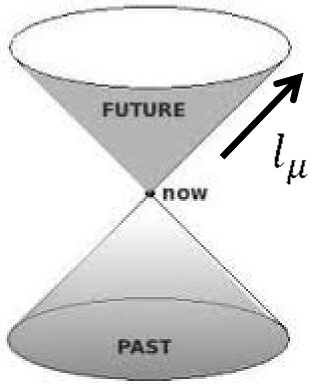
TETRAD SYSTEM

次のような tetrad (vector) を用意する

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu m_\nu^* + m_\nu^* m_\mu$$

$$l \cdot n = -1 \qquad m \cdot m^* = 1$$

$$l \cdot l = 0 = n \cdot n$$



WEYL SCALAR

tetrad を用いてWeyl テンソルを分解する

$$\psi_0 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma$$

$$\psi_1 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma$$

$$\psi_2 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu n^\rho m^{*\sigma}$$

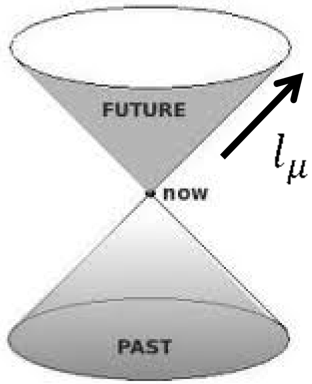
$$\psi_3 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu n^\rho m^\sigma$$

$$\psi_4 = C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu m^\nu n^\rho m^\sigma$$

4次元Weylテンソル（10成分） ＝ 5つの複素関数

PRINCIPAL NULL DIRECTION

tetrad system には gauge が存在する



$$n^\mu \to n^\mu$$

$$m^\mu \to m^\mu + a\, n^\mu$$

$$l^\mu \to l^\mu + a\, m^{*\mu} + a^*\, m^\mu + aa^*\ n^\mu$$

うまくとってみる = principal null direction (PND)

$$\psi_0 \to \psi_0 + 4a\,\psi_1 + 6a^2\,\psi_2 + 4a^3\,\psi_3 + a^4\,\psi_4 \ = 0$$

4次方程式となり、4つの解が存在する

⇒ 4方向のprincipal null direction

※ n^μ を回転することで$\psi_1 = 0$ ともできる

PETROV CLASSIFICATION

0 でないWeyl スカラーがいくつあるかで時空を分類

Petrov type

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}\quad \psi_2,\psi_3,\psi_4 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{II}\quad \psi_2,\psi_3 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{III}\quad \psi_3 \\
& \underline{\mathrm{D}\quad \psi_2} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{N}\quad \psi_4 \\
& & \mathrm{O}
\end{tikzcd}
$$

可解（Kinnersley 1969）

TYPE D

type D のクラスは方程式系が特に簡単になる

$$\nabla_l \psi_2 = 3\rho \psi_2 \qquad \rho = m^\mu \nabla_m l_\mu$$

$$\nabla_n \psi_2 = -3\mu \psi_2 \qquad \mu = m^\mu \nabla_{m^*} n_\mu$$

$$\nabla_m \psi_2 = 3\tau \psi_2 \qquad \tau = n^\mu \nabla_m l_\mu$$

$$\nabla_{m^*} \psi_2 = -3\pi \psi_2 \qquad \pi = m^{*\mu} \nabla_l n_\mu$$

これらの方程式は完全に解けてしまう

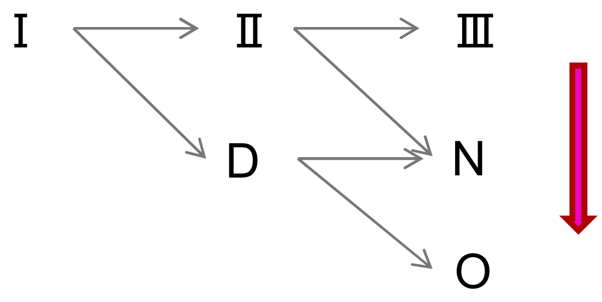
Kerr解、C-metric 等の１４種類の解

（Kinnersley 1969）

PEELING PROPERTY

null infinityにおいて漸近的に平坦な時空（4次元）

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{|t+x|}\right)$$



Weyl テンソルの振る舞い

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{r}\underbrace{C^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{type N}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{C^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{type III}} + \frac{1}{r^3}\underbrace{C^{(3)}_{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{type II, D}} + \frac{1}{r^4}\underbrace{C^{(4)}_{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{type I}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right)$$