$b_+ = 1$ のときの SW 不変量について

松尾 信一郎

2014-04-10

SW 不変量は，$b_+ = 1$ のとき，部屋に依存する．しかし，文献により様々な書き方がされているので脳みそが混乱した．全ては本質的に同じなので，ここで整理する．

1 Seiberg-Witten 方程式の可約解

X を四次元有向閉多様体かつ $b_+(X) = 1$ とする．$H^+(X;\mathbb{Z})$ の向きを固定せよ．すなわち，$\{u \in H^2(X;\mathbb{Z}) \mid u^2 > 0\}$ の二つの連結成分のどちらかを指定する．

g を X の計量とする．$H^+(X;\mathbb{R})$ と g-自己双対調和形式の空間 $\mathbb{H}_g^+$ を同一視する．このとき，$\mathbb{H}_g^+$ の有向正規直交基底として，g-自己双対調和形式 ω_g が唯一に定まる．また，μ を g-自己双対形式とする．

さて，$\mathfrak{s}$ を Spin^c 構造とする．$(g,\mathfrak{s},\mu)$-SW 方程式とは

$$\begin{cases} D_A\Phi = 0 \\ iF_A^+ = \sigma(\Phi) + \mu \end{cases}$$

である．$(g,\mathfrak{s},\mu)$-SW 方程式の可約解とは $(A,0)$ のことだった．

1.1 可約解の存在

$(g,\mathfrak{s},\mu)$-SW 方程式に可約解 $(A,0)$ があるための条件を考えたい．まず $(g,\mathfrak{s},\mu)$-SW 方程式に可約解 $(A,0)$ が存在したとき，

$$iF_A^+ = \mu$$

が成り立つ．特に，$2\pi c_1(\mathfrak{s}) = iF_A$ なので，

$$\mathbb{H}_g(\mu) = \mathbb{H}_g(iF_A^+) = \mathbb{H}_g^+(iF_A) = \mathbb{H}_g^+(2\pi c_1(\mathfrak{s}))$$

である．従って，

$$\int_X (2\pi c_1(\mathfrak{s}) - \mu) \wedge \omega_g = \int_X (iF_A - \mu) \wedge \omega_g = \int_X (iF_A^+ - \mu) \wedge \omega_g = 0 \tag{1}$$

である．逆に，等式 (1) が成り立っているとき，Hodge 理論より，接続 A が存在して $iF_A^+ = \mu$ を充たす．従って，$(g, \mathfrak{s}, \mu)$-SW 方程式に可約解 $(A, 0)$ が存在する．

1.2　壁

g-自己双対形式の空間 $\Omega_g^+(X)$ の部分集合

$$\mathrm{W}(X, g, \mathfrak{s}) := \{\mu \in \Omega_g^+(X) \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } iF_A^+ = \mu\}$$

を壁と呼ぶ．このとき，$(g, \mathfrak{s}, \mu)$-SW 方程式に可約解が存在するための必要充分条件は $\mu \in \mathrm{W}(X, g, \mathfrak{s})$ となる．また，$b_+(X) = 1$ なので，

$$\mu \in \mathrm{W}(X, g, \mathfrak{s}) \Longleftrightarrow \int_X (2\pi c_1(\mathfrak{s}) - \mu) \wedge \omega_g = 0$$

が成り立つ．

さて，$\Omega_g^+(X) \setminus \mathrm{W}(X, g, \mathfrak{s})$ は連結成分が二つあり，SW 不変量の値は摂動 μ がどちらの連結成分に属するかに依存する．

2　Morgan [1, Section 6.9] の場合

- 計量の空間で壁を考える．
- 摂動しない SW 方程式が既約解しかもたない計量だけを考える．
- すなわち，任意の計量で SW 不変量が定義されるわけではない．

$(g, \mathfrak{s}, \mu = 0)$-SW 方程式に可約解がない必要充分条件は，式 (1) より，

$$c_1(\mathfrak{s}) \cdot [\omega_g] \neq 0$$

である [1, Lemma 6.9.1]．これを充たす計量 g だけを考える．このとき，g-自己双対形式 μ を $|\mu| \ll 1$ かつ generic にとれば，$(g, \mathfrak{s}, \mu)$-SW 方程式には可約解が存在せず横断的である．この $(g, \mathfrak{s}, \mu)$-SW 方程式のモジュライで SW 不変量を定義する．従って，Riemann 計量のなす空間 $\mathrm{Riem}(X)$ の部分集合 R_+ と R_- を

$$\mathcal{R}_\pm := \{g \in \mathrm{Riem}(X) \mid c_1(\mathfrak{s}) \cdot [\pm\omega_g] > 0\}$$

により定めるとき，SW 不変量の値は計量 g が $\mathcal{R}_\pm$ のどちらに属するかに依存する．

3 Nicolaescu [2, Section 2.3.3] の場合

- このノートの 1 節と同じ.
- 摂動は自己双対閉形式を使っている.

4 Teleman [3, Section 7.2.2] の場合

- 合わせ技
- Donaldson の ASD の論文や深谷先生の教科書と同じ.

コホモロジー類 $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ が特性的であるとは，$c \equiv w_2(X)$ を充たすことである [3, Définition 5.2.15]．特性的コホモロジー類 $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ に対して，計量と閉形式の組 $(g,b) \in \mathrm{Riem}(X) \times H^2_{\mathrm{dR}}(X)$ が c-bonne であるとは，$(c-b)$ の g-調和代表元が g-反自己双対ではないことである [3, Définition 6.9.9]．そして，特性的コホモロジー類 $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ に対して，c-bonne な組の空間を $\mathcal{G}(c)$ とする．このとき，$\mathcal{G}(c)$ の連結成分は二つである [3, Exercise 6.9.11 (3)]．

$\mathcal{G}(c)$ の連結成分を指定するために次のようにする．$H^2_{dR}(X)$ の超曲面

$$H(X) := \{u \in H^2_{dR}(X) \mid u^2 = 1\}$$

は二つの連結成分があるが，$H^+(X;\mathbb{Z})$ の向きと適合しているものを選び，nappe $\mathbf{H}$ と呼ぶ．このとき，

$$C^{\pm}_{\mathbf{H}} := \{(g,b) \in \mathrm{Riem}(X) \times H^2_{dR}(X) \mid \pm[\omega_g] \cup (c-b) < 0\}$$

とする．

5 LeBrun [4, Section 2] の場合

- このノートの 1 節と同じ.
- Riemann 計量に興味があるので，全ての計量で定義したい.
- 究極的には $t\omega$ という Taubes 型摂動に興味がある.

X の Riemann 計量 g を固定する．$H^+(X;\mathbb{Z})$ の向きを固定すると言わずに，$H^2_{dR}(X;\mathbb{R})$ の開錐 $\{[\omega] \in H^2_{dR}(X) \mid [\omega]\cdot[\omega] > 0\}$ の連結成分の一つ $\mathcal{C}^+$ を固定する．$\mathcal{C}^+$

を nappe と呼ぶ．このとき，$[\omega] \in \mathcal{C}^+$ に対して，自己双対形式 ϵ を

$$\int_X \epsilon \wedge \omega > 2\pi c_1(\mathfrak{s}) \cdot [\omega]$$

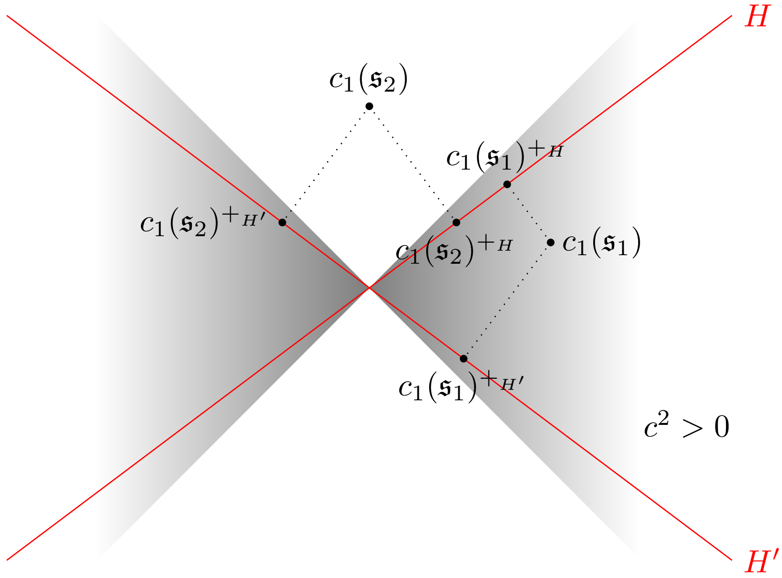
かつ generic に取り，$(g, \mathfrak{s}, \epsilon)$-SW 方程式のモジュライから構成された不変量を $p_{\mathfrak{s}}(X, \mathcal{C}^+)$ と呼ぶ．ここで重要なことは，$t \gg 0$ ならば $\epsilon = t\omega$ とできること．

6 LeBrun [5, Section 2] の場合

- まずは poralization $H \subset H^2(X; \mathbb{R})$ を決める．
- その次に $H = \mathbb{H}_g^+$ となる Riemann 計量だけを考える．
- Morgan と似てる．
- $b_+(X) = 1$ かつ $c_1(\mathfrak{s})^2 \geq 0$ かつ $c_1(\mathfrak{s})$ が捻れ元でも零でもないとき，chamber のどちらかを位相的情報だけで指定できる．Donaldson 理論のときの Kotschick-Lisca [6] を参照のこと．

$H^2(X; \mathbb{R})$ の $b_+(X)(=1)$ 次元部分空間 H を X の poralization と呼び，(X, H) を polarized 4-manifold と呼ぶ．また，polarization H が与えられたとき，$\mathbb{H}_g^+ = H$ を充たす Riemann 計量 g を H-adapted という．$c_1(\mathfrak{s})$ の H への射影を $c_1^+(\mathfrak{s})$ とかく．H-adapted 計量 g が与えられたとき，$c_1(\mathfrak{s})$ とその g-調和形式による代表元を同一視して，$c_1(\mathfrak{s})$ の g-自己双対部分と $c_1^+(\mathfrak{s})$ も同一視する．つまり，捻れは無視する．

H を polarization として，g を H-adapted 計量として，$\mathfrak{s}$ を Spin^c 構造とする．このとき，$c_1^+(\mathfrak{s}) \neq 0$ であれば，式 (1) より，$(g, \mathfrak{s}, \mu = 0)$-SW 方程式には可約解がない．



LeBrun は，まずは次の場合に SW 不変量が定義されるとしている [5, Definition 2.1].

1. $b_+(X) \geq 2$
2. $b_+(X) = 1$ かつ $c_1(\mathfrak{s})^2 \geq 0$ かつ $c_1(\mathfrak{s})$ が捻れ元でも零でもない.

つまり，$b_+(X) = 1$ のとき，$c_1(\mathfrak{s})^2 \geq 0$ かつ $c_1(\mathfrak{s})$ が捻れ元でも零でもないので，任意の polarizaiton H に対して，$c_1^+(\mathfrak{s}) \neq 0$ であり，$(g, \mathfrak{s}, \mu = 0)$-SW 方程式には可約解がない．よって，$g$-自己双対形式 μ を $|\mu| \ll 1$ かつ generic にとれば，$(g, \mathfrak{s}, \mu)$-SW 方程式には可約解が存在せず横断的である．この $(g, \mathfrak{s}, \mu)$-SW 方程式のモジュライで SW 不変量を定義する．この場合 2 とは，chamber のどちらかを位相的情報だけで指定できる状況と言える．（二木先生の教科書の補題 4.2.23 も参照せよ．）

さらに，次の場合には polarization の取り方に依存して SW 不変量が決まると注意している [5, p.286].

3. $b_+(X) = 1$ かつ $c_1(\mathfrak{s})^2 < 0$

このときの polarization H は $c_1^+(\mathfrak{s}) \neq 0$ を充たす必要があり，$c_1^+(\mathfrak{s}) \neq 0$ のとき，$\mu = 0$ が壁のどちら側にあるかで SW 不変量の値が決まる．もしも polarization H が $c_1^+(\mathfrak{s}) = 0$ を充たすときは，$\mu = 0$ はちょうど壁の上にあり，H だけに依存するようには SW 不変量の値を決められない．

参考文献

[1] John W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Mathematical Notes, vol. 44, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. MR1367507 (97d:57042)

[2] Liviu I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR1787219 (2001k:57037)

[3] Andrei Teleman, *Introduction à la théorie de jauge*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 18, Société Mathématique de France, Paris, 2012 (French). MR2985702

[4] Claude LeBrun, *Yamabe constants and the perturbed Seiberg-Witten equations*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), no. 3, 535–553. MR1487727 (98j:58032)

[5] ———, *Ricci curvature, minimal volumes, and Seiberg-Witten theory*, Invent. Math. **145** (2001), no. 2, 279–316, DOI 10.1007/s002220100148. MR1872548 (2002h:53061)

[6] D. Kotschick and P. Lisca, *Instanton invariants of* $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ *via topology*, Math. Ann. **303** (1995), no. 2, 345–371, DOI 10.1007/BF01460994. MR1348804 (96h:57028)