2023 年度 数学展望 I 期末課題

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

2023 年 6 月 26 日 21 時 10 分 版

単位が欲しい人は少なくとも一問を解いてください．何問解いても良いです．締切は 2023 年 7 月 31 日です．それまでは何度再提出しても構いません．答案は，一つの PDF ファイルにまとめたものを，ファイル名を「学籍番号_名字_下の名前.pdf」という形式にして，tact で提出してください．複数の PDF ファイルや JPG ファイルは受け付けません．直前に慌てないようにしてください．手書きでも TEX でもよいです．

Euclid 曰く，点とは部分がないものです．完璧な答案を心掛けてください．もしも問題に不備があると思ったら，質問するか私の意図を適切に解釈して，正しい問題にしてから正しく解いてください．

問題を解く過程では，数学書を調べたり，友達と相談したり，ChatGPT を使ったり，ネット検索したり，何をしても良いですが，最終的には，自分の脳みそで完全に理解したものを自分のことばで書いてください．

また，夏休み中やそれ以後でも，今回の講義についての質問やそれ以外の数学についての質問があれば，何でも気軽に訊いてください．

復習. n を正の整数とする．上昇階乗冪 $x^{\overline{n}} := x(x+1)\dots(x+n-1)$ と下降階乗冪 $x^{\underline{n}} := x(x-1)\dots(x-n+1)$ を用いて，第 1 種 Stirling 数は $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$ によって，第 2 種 Stirling 数は $x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$ によって，定義されていた．また，

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

を Bell 数という．さらに，

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) x^{\underline{k}}$$

によって Lah 数 $L(n,k)$ を定める．また，Catalan 数は，漸化式

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \end{cases}$$

によって定義されていた．

問題 1. n を正の整数とする．このとき，

$$(1+x)(1+2x)\dots(1+(n-1)x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} x^k$$

を示せ．

問題 2. p を素数とする．このとき，$1 < k < p$ に対して，$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$ は p で割り切れることを示せ．

問題 3. 第 2 種 Stirling 数 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ は，n 人を k 個のグループに分ける場合の数と等しいことを示せ．但し，グループは一人以上からなるものとする．例えば，4 人を 2 個のグループに分ける方法は，

$$\{\{1\},\{2,3,4\}\},\{\{2\},\{1,3,4\}\},\{\{3\},\{1,2,4\}\},\{\{4\},\{1,2,3\}\},\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

の 7 通りあり，$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = 7$ である．

問題 4. n を正の整数とする．このとき，

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-nx)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ n \end{Bmatrix} x^k$$

を示せ．

問題 5. n を正の整数とする．このとき，

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

を示せ．

問題 6. $n = 1, 2, \dots, 10$ とする．このとき，$k = 0, 1, \dots, n$ に対して，$L(n,k)$ を計算せよ．

問題 7. Lah 数の漸化式を与えよ．

問題 8. $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L'(n,k) x^{\overline{k}}$ とするとき，$L'(n,k)$ を $L(n,k)$ で表せ．

問題 9. n を正の整数とする．このとき，$k = 0, 1, \dots, n$ に対して，

$$L(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}$$

を示せ．

問題 10. n を正の整数とする．このとき，$k = 1, 2, \dots, n$ に対して，

$$L(n,k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}$$

を示せ．

問題 11. n を正の整数とする．このとき，

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{1}{x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n L(n,k)}{x^{n+k}} e^{\frac{1}{x}}$$

を示せ．

問題 12. Lah 数 $L(n,k)$ は，n 人を k 個のグループに分けてからそれぞれのグループで一列に並んでもらう場合の数と等しいことを示せ．但し，グループは一人以上からなるものとする．例えば，3 人を 2 個のグループに分けてからそれぞれのグループで一列に並んでもらう方法は，

$$\{1,\{2\leftarrow 3\}\},\{1,\{3\leftarrow 2\}\},\{2,\{1\leftarrow 3\}\},\{2,\{3\leftarrow 1\}\},\{3,\{1\leftarrow 2\}\},\{3,\{2\leftarrow 1\}\}$$

の 6 通りあり，$L(3,2)=6$ である．

問題 13. n を正の整数として，t を非負の実数とする．このとき，$\theta := \arcsin 1/\sqrt{1+t^2}$ として，

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx}\sin x\,\frac{dx}{x} = \frac{(n-1)!\sin n\theta}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}$$

を示せ．

問題 14. C_{10^n} を十進数で表したときの桁数は，$n\to\infty$ のとき，$\log_{10}4$ を十進数で表したときの小数点の右の数に収束することを示せ．例えば，C_{10^8} は 60205987 桁であり，$\log_{10}4 = 0.60205999132...$ である．

問題 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log C_n}{n} = \log 4$ を示せ．

問題 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n} = 4$ を示せ．

問題 17. n を非負の整数とする．このとき，

$$C_n = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_{-1}^{1} x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

を示せ．

問題 18. $C(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ とする．このとき，

$$C(x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{1-\ddots}}}$$

を示せ．

問題 19. θ を実数とする．このとき，$|\theta| < \frac{\pi}{2}$ に対して，

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{4^{n-1}}\sin^{2n+1}\theta$$

を示せ．

問題 20. 講義で扱った事柄について自分なりにまとめよ．または，何でも良いので自分で勉強した数学について自分なりにまとめよ．講義の感想も書いてください．