2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 1 回 2023 年 4 月 14 日

いきなりですが，問題を解いてみましょう．きっと見覚えがありますね！ n を正の整数とし，n 次の多項式 $x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して，

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

と表す．また，$\binom{n}{k}$ は二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を表す．このとき，次の問に答えよ．

(0) $\left[{4 \atop 0}\right], \left[{4 \atop 1}\right], \left[{4 \atop 2}\right], \left[{4 \atop 3}\right], \left[{4 \atop 4}\right]$ を求めよ．また，$\left[{n \atop 0}\right] = 0$ と $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$ と $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$ と $\left[{n \atop n}\right] = 1$ を示せ．

(1) 等式

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

を示せ．

($1\frac{1}{2}$) $n \geq 2$ のとき，等式

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k = 0$$

を示せ．

(2) 等式

$$(x+1)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{j} x^j$$

を示せ．

(3) $j = 0, 1, \ldots, n$ に対して，等式

$$\sum_{k=j}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{j} = \begin{bmatrix} n+1 \\ j+1 \end{bmatrix}$$

を示せ．

(4) 漸化式

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

を示せ．

(5) 等式

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)$$

を示せ．

(∞) $\left[{n \atop k}\right]$ の組合せ論的な意味を与えよ．

講義について

この講義の目的は離散数学への入門で，真の目的は数理学科への進学希望者を増やすことです．数学がおもしろいということを若者に伝えたいと思っています．大学数学は高校数学とひとあじ違うので，面食らってる人も多いでしょう．いろいろ訊いてください．

一般に，大学の勉強では能動性と積極性が大切です．では，能動的かつ積極的な勉強をするにはどうしたらよいのか．まずは質問することから始めたらどうでしょうか．講義中でも講義後でもよくわからないことがあれば，放置せず，訊いてみましょう．講義中でも質問してくださって構いません．むしろ歓迎します．例えば『Ψ はどうやって読むのか？』みたいな質問も歓迎です．（ちなみに，答はプシーやプサイでギリシア文字．）

シラバスには

> 高校生でもわかるのに高校ではほとんど習わないし，大学の普通の講義でもほとんど扱われないが，ものすごくおもしろい数学の一つに，離散数学がある．この講義では，グラフ理論や組み合わせ論や整数論の中からいくつかのトピックを厳選して，離散数学を紹介する．そして，離散数学の基礎知識を習得することを通じて，高校数学から大学数学への橋渡しをして，しあわせに大学数学に入門することを目的とする．

と書きました．まずは 2023 年度理系 4 番を題材に，『数え上げ組合せ論』への入門として，Stirling 数や Bernoulli 数を解説していきます．

ボーナス点

講義中の板書や配布プリントに間違いを見つけたら，どんな細かいことでもいいので，教えてください．一カ所につき一点を最終成績に加点します．つまり，100 カ所の間違いを見つけたら 100 点になります．

本当にどんな細かいことでもよいです．例えば $((x+1)x))$ で右の括弧が一つ多いなど．特に，講義中の板書の書き間違いの指摘は，みんなに役立つので，その場で積極的に教えてください．

また，間違いの指摘が間違っていたとしても減点はしません．

成績

- 成績はレポートや試験に基づいて総合的に判断して決定します．
- 出席点はありません．従って，出席も取りません．
- ボーナス点は最終的な成績の素点に加点します．

注意

- 講義についての連絡は全て TACT を経由します．休講やレポートなど．
- 土曜の講義日には対面講義はありません．ただし，TACT で課題を出すかもしれません．

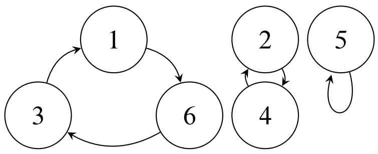
2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 2 回 2023 年 4 月 21 日

今週もまずは問題を解きましょう．周りの人と議論してもよいし，私に質問してもよいです．とにかく，この講義では，頭と手を動かすことが大切です．

n を正の整数として，$k = 1, \dots, n$ とせよ．n 人を k 組のグループに分け，さらにそれぞれのグループで手をつないで円になってもらう．ただし，グループは一人以上で構成されるものとして，一人のグループでは自分の左手と右手をつないで円になる．例えば，$n = 6$ のとき，



は $k = 3$ のグループ分けの例である．このとき，$c(n, k)$ をそのようなグループ分けの場合の数としよう．また，$c(n, 0) = 0$ とする．

(1) $c(4, 2)$ を求めよ．

(2) $c(n, 1)$ を求めよ．

(3) $c(n, n-1)$ を求めよ．

(4) $c(n, n)$ を求めよ．

(5) 等式

$$\sum_{k=0}^{n} c(n, k) = n!$$

を示せ．

(6) 漸化式

$$c(n+1, k) = nc(n, k) + c(n, k-1)$$

を示せ．

(7) 等式

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n, k)$$

を示せ．

(∞) k 次の多項式 $x^{\underline{k}} := x(x-1)\dots(x-k+1)$ を用いて，

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

と表すとき，係数 $\left\{{n \atop 0}\right\}, \dots, \left\{{n \atop n}\right\}$ について考察せよ．

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 3 回 2023 年 4 月 28 日

今週も例によって問題を解きましょう．周りの人と議論してもよいし，私に質問してもよいです．とにかく，この講義では，頭と手を動かすことが大切です．

n を正の整数として，$k = 1, \dots, n$ とせよ．n 人を k 組のグループに分け，さらにそれぞれのグループで手をつないで円になってもらう．このとき，$c(n,k)$ でそのようなグループ分けの場合の数を表していた．

(1) $\sum_{k=0}^{n} kc(n,k) = c(n+1,2)$ を示せ．

(2) $\sum_{j=k}^{n} c(n,j)\binom{j}{k} = c(n+1,k+1)$ を示せ．

(3) $\sum_{k=0}^{n} 2^k c(n,k) = (n+1)!$ を示せ．

1 から n までの数字を並び替えてできる数列を $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ とするとき，σ_i が数列 $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ の **left to right minima** であるとは，

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \left[j < i \Longrightarrow \sigma_j > \sigma_i \right]$$

が成り立つことだった．すなわち，その左側の全ての数字よりも小さいということである．

(4) σ_1 は必ず left to right minima であることを示せ．

(5) 1 は必ず left to right minima であることを示せ．

(6) 1 の右側には left to right minima はないことを示せ．

(7) $n = 4$ のとき，left to right minima がちょうど 2 個の数列は何通りあるか求めよ．

(8) $n = 6$ のとき，左から 1 番目と 2 番目と 4 番目だけが left to right minima であるような数列が 40 通りあることを示せ．

(∞) 等式

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{0 \le i \le j \le n-k} (-1)^{n-k+i+j} \binom{j}{i} \binom{n-1+j}{n-k+j} \binom{2n-k}{n-k-j} \frac{(j-i)^{n-k+j}}{j!}$$

を示せ．

今週の問題 (∞) が解けた人は，レポートや試験を全て免除して，満点をあげます．締切は 7 月末．

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 4 回 2023 年 5 月 12 日

ゴールデンウィーク明けも例によって問題を解きましょう．周りの人と議論してもよいし，私に質問してもよいです．とにかく，この講義では，この講義に限らず数学では，自分の頭と手を動かすことが大切です．

n を正の整数とし，n 次の多項式 $x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ を展開して，

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k} x^{\underline{k}}$$

と表す．但し，$x^{\underline{0}} = 1$ とする．

(1) $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{3}{0}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{3}{1}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{3}{2}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{3}{3}$ を求めよ．

(2) $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{4}{0}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{4}{1}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{4}{2}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{4}{3}, \genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{4}{4}$ を求めよ．

(3) $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{n}{0} = 0$ と $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{n}{1} = 1$ と $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{n}{n} = 1$ を示せ．

(4) $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{1}{n}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ を示せ．

(5) 漸化式

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n+1}{k} = k \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k-1}$$

を示せ．

(6) $(x+1)^{\underline{p+1}} - x^{\underline{p+1}}$ を計算せよ．

(7) $\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{p}}$ を計算せよ．

(8) 等式

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} x^k$$

を示せ．

(9) $\sum_{i=1}^{n} i^p$ を計算せよ．

(∞) 等式

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

を示せ．

今週の問題 (∞) はボーナス 50 点です．もしかしたら講義でやるかもしれません．締切は，講義でやるときか七月末の早い方です．今回の問題は，結構がんばれば，たぶん自力で解けます．

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 5 回 2023 年 5 月 26 日

n を正の整数として，$x^{\underline{n}}$ を展開して，

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k$$

と表す．ちなみに，$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$ かつ $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$ で，$\left[{n+1 \atop k} \right] = n\left[{n \atop k} \right] + \left[{n \atop k-1} \right]$ かつ $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k\left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}$ でした．

(1) $x^{\underline{n}}$ を $x^{\overline{n}}$ を用いて表せ．

(2) $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ を $\left[{n \atop k} \right]$ を用いて表せ．

(3) $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ が充たすべき漸化式を求めよ．

(4) m を正の整数とする．このとき，

$$\sum_{k=m}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \left\{ {k \atop m} \right\}$$

を計算せよ．

(5) さらに

$$\sum_{k=m}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left\langle {k \atop m} \right\rangle$$

も計算せよ．

(6) 行列

$$A := \begin{pmatrix} \left\langle {0 \atop 0} \right\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left\langle {1 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {1 \atop 1} \right\rangle & 0 & 0 & 0 \\ \left\langle {2 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {2 \atop 1} \right\rangle & \left\langle {2 \atop 2} \right\rangle & 0 & 0 \\ \left\langle {3 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle & \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle & \left\langle {3 \atop 3} \right\rangle & 0 \\ \left\langle {4 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 1} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 2} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 3} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 4} \right\rangle \end{pmatrix}$$

を計算せよ．

(7) 行列

$$B := \begin{pmatrix} \left\{ {0 \atop 0} \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left\{ {1 \atop 0} \right\} & \left\{ {1 \atop 1} \right\} & 0 & 0 & 0 \\ \left\{ {2 \atop 0} \right\} & \left\{ {2 \atop 1} \right\} & \left\{ {2 \atop 2} \right\} & 0 & 0 \\ \left\{ {3 \atop 0} \right\} & \left\{ {3 \atop 1} \right\} & \left\{ {3 \atop 2} \right\} & \left\{ {3 \atop 3} \right\} & 0 \\ \left\{ {4 \atop 0} \right\} & \left\{ {4 \atop 1} \right\} & \left\{ {4 \atop 2} \right\} & \left\{ {4 \atop 3} \right\} & \left\{ {4 \atop 4} \right\} \end{pmatrix}$$

を計算せよ．

(8) ベクトル $u := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$ と $v := \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ x^{\underline{2}} \\ x^{\underline{3}} \\ x^{\underline{4}} \end{pmatrix}$ に対して，Au と Bv を計算せよ．

(9) 行列の積 AB と BA を計算せよ．

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 6 回 2023 年 6 月 2 日

今日は大雨なので，微分と積分をやります．n を非負の整数としましょう．

(1) $\frac{(1+x^2)^{1/3}}{(1+\cos x)^{3/2}}\frac{\log x}{x^2}$ を微分せよ．

(2) $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ を計算せよ．

(3) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\,dx$ を計算せよ．

(4) $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}\,dx$ を計算せよ．

Richard Feynman の *Surely You're Joking, Mr. Feynman* の中の **A different Box of Tools** には次のような話が載っています．皆さんもファインマンさんの**毛色の違った道具**を勉強して積分の達人になりましょう．

> One thing I never did learn was contour integration. I had learned to do integrals by various methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me.
>
> One day he told me to stay after class. "Feynman," he said, "you talk too much and you make too much noise. I know why. You're bored. So I'm going to give you a book. You go up there in the back, in the corner, and study this book, and when you know everything that's in this book, you can talk again."
>
> So every physics class, I paid no attention to what was going on with Pascal's Law, or whatever they were doing. I was up in the back with this book: *Advanced Calculus*, by Woods. Bader knew I had studied *Calculus for the Practical Man* a little bit, so he gave me the real works–it was for a junior or senior course in college. It had Fourier series, Bessel functions, determinants, elliptic functions–all kinds of wonderful stuff that I didn't know anything about.
>
> That book also showed how to differentiate parameters under the integral sign–it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals.
>
> The result was, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me.

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 7 回 2023 年 6 月 16 日

今日からは新しい話題です．数列 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，$C_0 = 1$ かつ漸化式

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

を充たすとする.

(1) $C_0, C_1, \ldots, C_{10}$ を計算せよ.

(2) n を正の整数とする．凸 $(n+2)$ 角形を $(n-1)$ 本の交わらない対角線で n 個の三角形に分割する場合の数を E_n とする．但し，回転したり裏返したりして同じになるものも区別して数える．また，$E_0 = 1$ とする．例えば，$E_1 = 1$ かつ $E_2 = 2$ かつ $E_3 = 5$ である．このとき，E_4 を求めよ.

(3) n を正の整数とする．n 組のカッコを正しく並べる場合の数を P_n とする．例えば，)(は正しくない．また，$P_0 = 1$ とする．例えば，$n = 1$ のときは () だけなので $P_1 = 1$ であり，$n = 2$ のときは (()) と ()() の二通りなので $P_2 = 2$ である．このとき，P_3 と P_4 を求めよ.

(4) n を正の整数とする．n 個の分岐を持つ二分木 (binary tree) の総数を T_n とする．但し，n 個の分岐を持つ二分木とは，$n+1$ 人でトーナメント戦をするときのトーナメント表の形のことである．また，$T_0 = 1$ とする．例えば，$T_1 = 1$ かつ $T_2 = 2$ かつ $T_3 = 5$ である．このとき，T_4 を求めよ.

(5) E_n と P_n と T_n のそれぞれが充たす漸化式を求めよ.

(6) 形式的冪級数 $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$ が

$$\frac{C(x) - 1}{x} = C(x)^2$$

を充たすことを示せ.

(7) 三角形分割とカッコの付け方の一対一対応を与えることで $E_n = P_n$ を示せ.

(8) カッコの付け方と二分木の一対一対応を与えることで $P_n = T_n$ を示せ.

(9) 三角形分割と二分木の一対一対応を与えることで $E_n = T_n$ を示せ.

(10) $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ を示せ.

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 8 回 2023 年 6 月 23 日

今週は先週の続きです．Catalan 数 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，$C_0 = 1$ かつ漸化式 $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ によって定義されていました．母函数 $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$ は $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ でした．また，凸 $(n+2)$ 角形を $(n-1)$ 本の交わらない対角線で n 個の三角形に分割する場合の数が E_n で，n 組のカッコを正しく並べる場合の数が P_n で，n 個の分岐を持つ二分木の総数が T_n でした．

(1) 三角形分割とカッコの付け方の一対一対応を与えることで $E_n = P_n$ を示せ．

(2) カッコの付け方と二分木の一対一対応を与えることで $P_n = T_n$ を示せ．

(3) 三角形分割と二分木の一対一対応を与えることで $E_n = T_n$ を示せ．

(4) $\sqrt{1-4x}$ を $x = 0$ の周りで 10 次まで Taylor 展開すると

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 - 28x^5 - 84x^6 - 264x^7 - 858x^8 - 2860x^9 - 9724x^{10} + O(x^{11})$$

となることを示せ．

(5) $\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^{n+1}$ を示せ．

(6) $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$ を示せ．

(7) $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ を示せ．

(8) Fibonacci 数 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，$F_0 = F_1 = 1$ かつ漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ によって定義される．その母函数を $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots$ とする．このとき，

$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x)$$

を示せ．

(9) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ かつ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とするとき，$\frac{1}{1-x-x^2}$ を $\frac{1}{1-\alpha x}$ と $\frac{1}{1-\beta x}$ を用いて表せ．

(10) Fibonacci 数 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ．

(11) 一円玉 10 枚と五円玉 5 枚と十円玉 3 枚と五十円玉 1 枚を用いて，50 円を支払う場合の数を求めよ．

(12) $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{25})(1 + x^{10} + x^{20} + x^{30})(1 + x^{50})$ の x^{50} の係数を求めよ．

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 9 回 2023 年 6 月 30 日

今週は，先週の補足訂正と包除原理です．

(1) n を正の整数とする．n 組のカッコを正しく並べる場合の数を P_n とする．$(n+1)$ 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ に n 組のカッコを正しく入れる場合の数を A_n とする．例えば，$n=2$ のときは $((x_1x_2)x_3)$ と $(x_1(x_2x_3))$ の 2 通りであり，$C_2 = 2$ である．このとき，$P_n = A_n$ を示せ．

(2) n を正の整数とする．円上に並んだ $2n$ 人が二人ずつ手が交叉しないように同時に握手をする場合の数を H_n とする．このとき，$H_n = C_n$ を示せ．

(3) n を正の整数とする．格子上を上か右に一つずつ進んで原点 $(0,0)$ から点 (n,n) まで到達する道筋を考える．このとき，$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，格子点 (k,k) を通る道の個数を考えることで，

$$2C_{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{0=k_0<k_1<k_2<\cdots<k_m<k_{m+1}=n} (-1)^m \prod_{j=0}^{m} \frac{(2(k_{j+1}-k_j))!}{((k_{j+1}-k_j)!)^2} \right)$$

を示せ．

(4) n を正の整数とする．n 人がプレゼントを一つずつ持ってパーティーに行き，全員でプレゼント交換をする．このとき，誰もが自分ではない人のプレゼントを持ち帰れる確率を求めよ．また，$n \to \infty$ のときの挙動を考察せよ．

(5) n を正の整数とする．このとき，n と互いに素な n 以下の正の整数の個数 $\phi(n)$ を求めよ．例えば，$n=6$ のとき，6 と互いに素な 6 以下の正の整数は $1, 5$ なので，$\phi(6) = 2$ である．

(6) 正の整数の逆数の和が発散することを示せ．

(7) 十進法表記で 9 を含まない正の整数の逆数の和は，発散するか収束するか？

(8) 素数の逆数の和は，発散するか収束するか？

(9) X を有限集合として，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を X の部分集合とする．このとき，

$$\#\bigl(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\bigr) = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{\#I} \, \#A_I$$

を示せ．但し，$I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $A_I := \bigcap_{i \in I} A_i$ であり，$A_\emptyset := X$ とする．また，一般に，有限集合 Y に対して Y の元の個数を $\#Y$ とする．

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 10 回 2023 年 7 月 7 日

今週は，素朴集合論と包除原理です．一般に，X を集合として，A と B を X の部分集合とするとき，

$$A \cap B := \left\{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\right\} = A \text{ と } B \text{ の両方に含まれる元の集合}$$
$$A \cup B := \left\{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\right\} = A \text{ か } B \text{ の少なくとも一方に含まれる元の集合}$$
$$A \setminus B := \left\{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\right\} = A \text{ には含まれるが } B \text{ には含まれない元の集合}$$

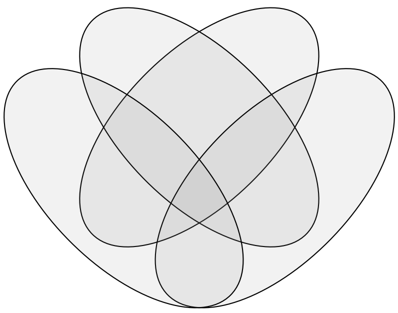
とします．また，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ が X の部分集合のとき，$I := \{1, 2, \ldots, n\}$ として，

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

とします．

(1) X を集合として，A と B を X の部分集合とする．このとき，$A \cap B$ と $A \cup B$ と $A \setminus B$ と $X \setminus A$ を Venn 図に図示せよ．

(2) X を集合として，A_1, A_2, A_3, A_4 を X の部分集合とする．このとき，$((A_1 \cap A_2) \setminus A_3) \cup A_4$ を Venn 図に図示せよ．



(3) 部分集合が 6 個のときの Venn 図を描いてみよ．

(4) 420 以下の正の整数であって 420 と互いに素なものの個数を求めよ．

(5) $X := \{1, 2, \ldots, 420\}$ として，$I := \{2, 3, 5, 7\}$ とする．また，$i \in I$ に対して．

$$A_i := \left\{n \in X \mid n \text{ は } i \text{ の倍数である．}\right\}$$

とする．このとき，次の問に答えよ：

1. A_i の元の個数 $\#A_i$ を求めよ．

2. $A_2 \cap A_3$ と $A_2 \cap A_3 \cap A_5$ と $A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7$ はどのような集合か？

3. $X \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)$ はどのような集合か？

4. $\#X - \#A_2 - \#A_3 - \#A_5 - \#A_7 + \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_5) + \#(A_2 \cap A_7) + \#(A_3 \cap A_5) + \#(A_3 \cap A_7) + \#(A_5 \cap A_7) - \#(A_2 \cap A_3 \cap A_5) - \#(A_2 \cap A_3 \cap A_7) - \#(A_2 \cap A_5 \cap A_7) - \#(A_3 \cap A_5 \cap A_7) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7)$ を求めよ．

(6)（**再掲**）X を有限集合として，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を X の部分集合とする．このとき，

$$\#\bigl(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\bigr) = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{\#I} \#A_I$$

を示せ．但し，$I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $A_I := \bigcap_{i \in I} A_i$ であり，$A_\emptyset := X$ とする．また，一般に，有限集合 Y に対して Y の元の個数を $\#Y$ とする．

(7)（**再掲**）n を正の整数とする．このとき，n 以下の正の整数であって n と互いに素なものの個数 $\phi(n)$ を求めよ．例えば，$n = 6$ のとき，6 と互いに素な 6 以下の正の整数は 1, 5 なので，$\phi(6) = 2$ である．

(8) 正の整数 N に対して，N 以下の素数の個数を $\pi(N)$ とする．このとき，次の問に答えよ：

1. ある整数が square free であるとは，その整数の約数で平方数であるものが 1 だけであるときをいう．素数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ を用いて square free な整数を作るとき，何通りが作れるか？

2. N を正の整数とする．このとき，N 以下の平方数の個数は何個か？

3. 任意の正の整数は square free な整数と平方数の積として一意に表せることを示せ．

4. N を正の整数とする．このとき，$N \leq 2^{\pi(N)} \sqrt{N}$ を示せ．すなわち，$\pi(N) \geq \frac{\log N}{\log 4}$ である．

ちなみに，素数定理によれば，$N \to \infty$ のとき，$\pi(N) \sim \frac{x}{\log x}$ である．

(9) X を，自分自身を要素として含まないような集合の全てからなる集合とする．すなわち，

$$X := \{x \mid x \notin x\}$$

である．このとき，X は X を元として含むか？

(10) ある小さな街の美容師は，自分自身で髪を切らない者全ての髪を切っているが，自分自身で髪を切っている者の髪は絶対に切らない．このとき，この美容師の髪は誰が切るのか？

2023 年度 数学展望 I

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

第 11 回 2023 年 7 月 14 日

今週は鳩ノ巣原理と Ramsey 理論です.

(1) 367 人が集まれば，その人たちの中に誕生日が全く同じ二人が必ず存在することを示せ.

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を m 個の整数とする．このとき，ある k と ℓ が存在して，$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_\ell$ が m で割り切れることを示せ.

(3) $1, 2, \ldots, 200$ から 101 個の数字をどのように選んでも，その 101 個の中に 2 個の数字 m と n が存在して，m が n の倍数となることを示せ.

(4) α を無理数として，n を正の整数とする．このとき，有理数 q/p が存在して，$1 \leq p \leq n$ かつ

$$\left|\alpha - \frac{q}{p}\right| < \frac{1}{p(n+1)}$$

を充たすことを示せ.

(5) β を有理数とする. このとき, 定数 $c > 0$ が存在して, 任意の有理数 q/p に対して, $q/p \neq \beta$ ならば,

$$\left|\beta - \frac{q}{p}\right| > \frac{c}{p}$$

を充たすことを示せ.

(6) 世界中の Threads アカウントからランダムに 6 人を選ぶとき，その中に，『お互いをフォローし合っている 3 人』か『お互いをフォローし合っていない 3 人』のどちらかが必ず存在することを示せ.

(7) 世界中の Twitter アカウントからランダムに 5 人を選ぶとき，その中に，『お互いをフォローし合っている 3 人』も『お互いをフォローし合っていない 3 人』のどちらも存在するとは限らないことを示せ.

(8) 世界中の Facebook アカウントからランダムに 9 人を選ぶとき，その中に，『お互いをフォローし合っている 3 人』か『お互いをフォローし合っていない 4 人』のどちらかが必ず存在することを示せ.

(9) 無限にユーザーがいる SNS が存在したと仮定する．このとき，この SNS には,『お互いをフォローし合っている ∞ 人』か『お互いをフォローし合っていない ∞ 人』のどちらかが必ず存在することを示せ.

(10) 無限にユーザーがいる SNS が存在したと仮定する．このとき，任意の正の整数 m と n に対して，ある正の整数 R が存在して，この SNS から R 人をランダムに選んだとき,『お互いをフォローし合っている m 人』か『お互いをフォローし合っていない n 人』のどちらかが必ず存在することを示せ.