2023 年度 数学展望 I 講義録

松尾 信一郎 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 shinichiroh@math.nagoya-u.ac.jp

2023 年 6 月 21 日 16 時 19 分 版

この講義の目的は離散数学への入門で，真の目的は数理学科への進学希望者を増やすことです．数学がおもしろいということを若者に伝えたいと思っています．大学数学は高校数学とひとあじ違うので，面食らってる人も多いでしょう．いろいろ訊いてください．

一般に，大学の勉強では能動性と積極性が大切です．では，能動的かつ積極的な勉強をするにはどうしたらよいのか．まずは質問することから始めたらどうでしょうか．講義中でも講義後でもよくわからないことがあれば，放置せず，訊いてみましょう．講義中でも質問してくださって構いません．むしろ歓迎します．例えば『Ψ はどうやって読むのか？』みたいな質問も歓迎です．（ちなみに，答はプシーやプサイでギリシア文字．）

シラバスには

> 高校生でもわかるのに高校ではほとんど習わないし，大学の普通の講義でもほとんど扱われないが，ものすごくおもしろい数学の一つに，離散数学がある．この講義では，グラフ理論や組み合わせ論や整数論の中からいくつかのトピックを厳選して，離散数学を紹介する．そして，離散数学の基礎知識を習得することを通じて，高校数学から大学数学への橋渡しをして，しあわせに大学数学に入門することを目的とする．

と書きました．まずは 2023 年度理系 4 番を題材に，**数え上げ組合せ論**への入門として，Stirling 数を解説していきます．

また，この講義録に間違いを見つけたら，どんな細かいことでもいいので，教えてください．一カ所につき一点を最終成績に加点します．つまり，100 カ所の間違いを見つけたら 100 点になります．本当にどんな細かいことでもよいです．例えば $((x+1)x))$ で右の括弧が一つ多いなど．間違いの指摘が間違っていたとしても減点はしません．

1　第 1 種 Stirling 数

1.1　名古屋大学 2023 年度理系 4 番

まずは問題を解いてみましょう．きっと見覚えがありますね！

問題 1.1. n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m$ と表す．

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$ を示せ．

(2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^{n} \left({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m\right)$$

を示せ．ただし，${}_m\mathrm{C}_0, {}_m\mathrm{C}_1, \dots, {}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である．

(3) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して，等式 $\sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ．

この講義の前半では，この問題の数学的背景を考えていきます．ただし，ここで強調しておきたいのですが，もちろん全ての入試問題に現代数学からの深淵な背景があるというわけではありません．むしろこの問題はたまたまです．

1.2　第 1 種 Stirling 数

n を正の整数とするとき，n 次多項式 $x(x+1)\dots(x+n-1)$ を $x^{\overline{n}}$ と表す：

$$x^{\overline{n}} := x(x+1)\dots(x+n-1)$$

また，$x^{\overline{0}} := 1$ とする．このとき，$x^{\overline{n}}$ を x の n 次**上昇階乗冪 (rising factorial)** と呼ぶ．

定義 1.2. n を非負の整数とするとき，x の n 次上昇階乗冪 $x^{\overline{n}}$ を展開して，

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

と表す．このとき，係数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ たちを**第 1 種 Stirling 数**という．

例えば，$n=4$ のとき，

$$x^{\overline{4}} = 0 \cdot x^0 + 6x^1 + 11x^2 + 6x^3 + x^4$$

なので，

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 6, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 6, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 1$$

である．また，$n=0$ のとき，$x^{\overline{0}} = 1$ が定義だったので，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ となる．さらに，$x^{\overline{n}}$ は n 次多項式なので，$k > n$ のとき $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ である．

まずは定義から簡単にわかる性質を見ておこう．

命題 1.3. n を正の整数とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

(2) $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$

(3) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$

(4) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$

証明 上昇階乗冪 $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$ を展開して，x^0, x^1, x^{n-1}, x^n の係数を考えればよい．

(1) $n > 0$ なので，$x^{\overline{n}}$ には定数項はない．よって，$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ である．

(2) $x^{\overline{n}}$ の x^1 の係数は，各項 $(x+1), \dots, (x+n-1)$ から数字だけを選んで掛け合わせて作られるので，$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ である．

(3) $x^{\overline{n}}$ の x^{n-1} の係数は，各項 $(x+1), \dots, (x+n-1)$ から数字を一回だけ選んで足し合わせて作られるので，

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

である．

(4) $x^{\overline{n}}$ の x^n の係数は，各項 $(x+1), \dots, (x+n-1)$ から変数だけを選んで掛け合わせて作られるので，$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ である．

この命題は，命題**??**として一般化される．また，$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$ だが，$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ なので，

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

でもあり，その組み合わせ論的な意味はこれから明らかになっていくであろう．

命題 1.4. n を正の整数とする．このとき，

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

が成り立つ．

証明 上昇階乗冪 $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$ を展開して，x^2 の係数を考えればよい．まず，$j = 1,2,\dots,n-1$ に対して，$(x+j) = j(x/j+1)$ なので，

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{n}} &= x(x+1)\dots(x+n-1)\\
&= x\cdot 1\left(\frac{x}{1}+1\right)\cdot 2\left(\frac{x}{2}+1\right)\dots(n-1)\left(\frac{x}{n-1}+1\right)\\
&= (n-1)!\cdot x\left(\frac{x}{1}+1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)\dots\left(\frac{x}{n-1}+1\right)
\end{aligned}
$$

である．さて，$x(x/1+1)\dots(x/(n-1)+1)$ の x^2 の係数は，各項 $(x/1+1),\dots,(x/(n-1)+1)$ から x/j を一回だけ選んで足し合わせて作られる．よって，

$$
\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\dots+\frac{1}{n-1}\right)
$$

である．

一般に，正の整数 n に対して，$1/1+\dots+1/n$ を**調和数 (harmonic number)** と呼ぶ．H_n と表すこともある：

$$
H_n := \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}
$$

この記号を用いれば，$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = (n-1)!H_{n-1}$ である．

次に，第 1 種 Stirling 数が充たす漸化式を導出する．

定理 1.5. n を正の整数とする．このとき，$k = 1,2,3,\dots$ に対して，漸化式

$$
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}
$$

が成り立つ．

証明 一般に，

$$
x^{\overline{n+1}} = x(x+1)\dots(x+n-1)\cdot(x+n) = x^{\overline{n}}\cdot(x+n)
$$

が成り立つ．従って，

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{n+1}} &= x^{\overline{n}}\cdot(x+n)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k\right)(x+n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k
\end{aligned}
$$

である．さて，

$$
\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}x^k = \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}x^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}x^{n+1}
$$

である．また，$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$ なので，

$$
\sum_{k=0}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k = \sum_{k=1}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k
$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k &= \sum_{k=1}^{n} n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k + \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}x^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}x^{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right)x^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

である．

以上より，
$$\sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}x^k = x^{\overline{n+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\right)x^k + \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}x^{n+1}$$
がわかった．$k=1,2,\dots,n$ に対して，上式の両辺の x^k の係数を比較することで，
$$\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix} = n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}$$
がわかる．
$k=n+1$ のときは，$\left[\begin{smallmatrix}n+1\\n+1\end{smallmatrix}\right]=1$ かつ $n\left[\begin{smallmatrix}n\\n+1\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}n\\(n+1)-1\end{smallmatrix}\right]=n\cdot 0+1=1$ なので，主張はたしかに成り立つ．また，$k>n+1$ のときは，両辺がともに 0 なので，主張はたしかに成り立つ．

この節の最後に問題**??**(3) を解く．証明のポイントは，$x^{\overline{n+1}}$ を二通りに計算し，二重和を交換することである．二重和の交換については注意**??**を参照のこと．

命題 1.6. n を正の整数とする．このとき，$k=0,1,2,\dots$ に対して，
$$\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix} = \sum_{j=k}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\binom{j}{k}$$
が成り立つ．

証明 一般に
$$x^{\overline{n+1}} = x(x+1)\dots(x+n) = x\cdot(x+1)\dots((x+1)+n-1) = x\cdot(x+1)^{\overline{n}}$$
が成り立つ．
まずは，第 1 種 Stirling 数の定義により，
$$\begin{aligned}x^{\overline{n+1}} &= \sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}x^k\\ &= \begin{bmatrix}n+1\\1\end{bmatrix}x^1 + \begin{bmatrix}n+1\\2\end{bmatrix}x^2+\dots+\begin{bmatrix}n+1\\n+1\end{bmatrix}x^{n+1}\\ &= x\left(\begin{bmatrix}n+1\\1\end{bmatrix}x^0+\begin{bmatrix}n+1\\2\end{bmatrix}x+\dots+\begin{bmatrix}n+1\\n+1\end{bmatrix}x^n\right) = x\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}x^k\end{aligned}$$
である．最後の等式で $\left[\begin{smallmatrix}n+1\\0\end{smallmatrix}\right]=0$ を用いた．
次に，$x^{\overline{n+1}}=x\cdot(x+1)^{\overline{n}}$ を用いて，
$$\begin{aligned}x^{\overline{n+1}} &= x\cdot(x+1)^{\overline{n}}\\ &= x\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(x+1)^k\end{aligned}$$
である．さらに，二項定理 $(x+1)^k=\sum\limits_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^j$ を用いて，
$$x\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(x+1)^k = x\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^j = x\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{j}x^j$$
となる．ここで，二重和を交換することにより，
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{j}x^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{j}x^j$$

がわかる．そして，ダミー添字の j と k を交換することで，

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{j}x^j = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\binom{j}{k}x^k$$

となる．従って，

$$x^{\overline{n+1}} = x\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\binom{j}{k}\right)x^k$$

である．

以上より，

$$x\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}x^k = x^{\overline{n+1}} = x\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\binom{j}{k}\right)x^k$$

がわかった．$k = 0, 1, \ldots, n$ に対して上式の両辺の x^k の係数を比較することにより，

$$\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix} = \sum_{j=k}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\binom{j}{k}$$

がわかる．

$k > n$ のときは，両辺がともに 0 なので，主張はたしかに成り立つ．

注意 1.7. 上の証明での二重和の交換

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{j}x^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{j}x^j$$

について補足しておく．$a_k^j := \left[{n \atop k}\right]\binom{k}{j}x^j$ とする．総和記号を一歩ずつ外してから組み替えれば，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_k^j = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}a_k^j\right) &= \sum_{k=0}^{n}(a_k^0 + a_k^1 + \cdots + a_k^k)\\
&= \quad a_0^0\\
&\quad + a_1^0 + a_1^1\\
&\quad + a_2^0 + a_2^1 + a_2^2\\
&\qquad \vdots\\
&\quad + a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^n\\
&= a_0^0 + a_1^0 + a_2^0 + \ldots + a_n^0\\
&\qquad + a_1^1 + a_2^1 + \ldots + a_n^1\\
&\qquad\qquad + a_2^2 + \ldots + a_n^2\\
&\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad\qquad + a_n^n\\
&= \sum_{j=0}^{n}(a_j^j + a_{j+1}^j + \cdots + a_n^j) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}a_k^j\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}a_k^j
\end{aligned}$$

である．または，次のように考えてもよい．添字が動く範囲について

$$\begin{matrix}0 \le k \le n\\ 0 \le j \le k\end{matrix} \iff 0 \le j \le k \le n \iff \begin{matrix}0 \le j \le n\\ j \le k \le n\end{matrix}$$

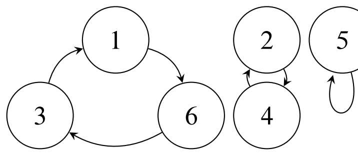
と書き換えられるので，

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_k^j = \sum_{0\le j\le k\le n}a_k^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}a_k^j$$

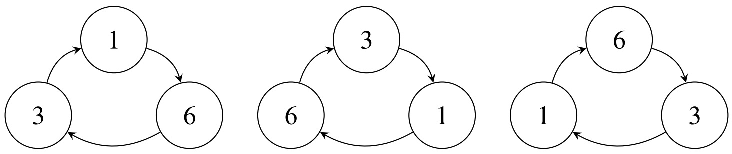
である．

1.3 Stirling サイクル数

n を正の整数として，$k = 1, 2, \ldots$ とする．n 人を k 組のグループに分け，さらにそれぞれのグループで手をつないで円になってもらう．ただし，グループは一人以上で構成されるものとして，一人のグループでは自分の左手と右手をつないで円になる．このようなグループ分けの場合の数を $c(n,k)$ とする．また，$c(n,0) = 0$ とする．例えば，$n = 6$ のとき，人々を①から⑥と表すことにして，



は $k = 3$ のグループ分けの例である．また，



のように回転して同じものは区別されない．このような円のそれぞれを**サイクル (cycle)** と呼ぶ．この講義だけの用語として，$c(n,k)$ を **Stirling サイクル数**と呼ぶことにしよう．

例えば，$n = 4$ かつ $k = 2$ のとき，具体的にサイクルを列挙することで，$c(4,2) = 11$ がわかる．

まずは定義から簡単にわかる性質を見ておこう．

命題 1.8. n を正の整数とする．このとき，次が成り立つ．
(1) $c(n,1) = (n-1)!$
(2) $c(n,n-1) = \binom{n}{2}$
(3) $c(n,n) = 1$
(4) $k > n \Longrightarrow c(n,k) = 0$

証明 それぞれの意味を考えればよい．
(1) n 人で一つのサイクルを作る場合の数なので，要するに円順列であって，例えば①の位置を固定すれば，残りの②からⓝを好きな順番に並べればいいので，$c(n,1) = (n-1)!$ となる．
(2) n 人で $(n-1)$ 個のサイクルを作るには，$(n-2)$ 個の一人のサイクルと 2 個の二人のサイクルを作ればよい．どの二人を選ぶかで $\binom{n}{2}$ 通りあり，その二人の円順列の場合の数で $(2-1)!$ 通りある．よって，$c(n,n-1) = \binom{n}{2} \cdot (2-1)!$ である．
(3) n 人で n 個のサイクルを作るには，n 個の一人のサイクルを作るしかない．すなわち，$c(n,n) = 1$ である．
(4) $k > n$ のとき，n 人では k 個のサイクルは作れないので，$c(n,k) = 0$ である．

次に，Stirling サイクル数が充たす漸化式を導出する．

定理 1.9. n を正の整数とする．このとき，$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，漸化式

$$c(n+1,k) = nc(n,k) + c(n,k-1)$$

が成り立つ．

証明 $(n+1)$ 人で k 個のサイクルを作る場合の数を二通りに計算する．人々に番号をつけて①から(n+1)と表すことにする．
数え方 A：定義から，そのような場合の数は $c(n+1,k)$ 通りである．
数え方 B：(n+1)を特別視して数える．

- ①からⓝまでで k 個のサイクルを作ってからどこかのサイクルに(n+1)を付け加えるとき，①からⓝまでで k 個のサイクルを作る場合の数が $c(n,k)$ 通りで，さらに(n+1)を①からⓝの誰の右隣に入れるかで n 通りあるので，このような場合の

数は $c(n,k)\cdot n$ 通りである．
- (n+1)が一人でサイクルを作るとき，残りの①からⓝまでで $(k-1)$ 個のサイクルを作ればよいので，このような場合の数は $c(n,k-1)$ 通りである．

よって，両者を合わせて，$nc(n,k)+c(n,k-1)$ 通りある．
数え方 A と数え方 B は同じ結果を与えるので，

$$c(n+1,k)=nc(n,k)+c(n,k-1)$$

がわかる．

問題 1.10. 上の証明で，①からⓝまでで $(k-1)$ 個のサイクルを作ってから(n+1)を付け加えるとき，誰の右隣に(n+1)を入れるかを考えるだけでいいことを確かめよ．

この証明のように，同じものを二通りに計算する手法は，数え上げ組み合せ論における定跡である．

1.4 第 1 種 Stirling 数の組み合わせ論的な意味

この節の目的は $c(n,k)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ を示すことである．すなわち，第 1 種 Stirling 数の組み合わせ論的な意味は Stirling サイクル数により与えられる．

1.4.1 left to right minimum

まずは準備として，次の用語を導入しよう．

定義 1.11. n を正の整数とする．1 から n までの数字を並び替えてできる数列を $\langle \sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle$ とする．このとき，σ_i が数列 $\langle \sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle$ の **left to right minimum** であるとは，

$$\forall j=1,2,\ldots,n\ \left[j<i \Longrightarrow \sigma_j>\sigma_i\right]$$

が成り立つことをいう．

すなわち，σ_i が left to right minimum であるとは，σ_i がその左側の全ての数字よりも小さいということである．例えば，$n=6$ のとき，数列 $\langle 5,2,4,1,6,3\rangle$ の left to right minimum は，5 と 2 と 1 である．

命題 1.12. n を正の整数とする．1 から n までの数字を並び替えてできる数列を $\langle \sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle$ とする．このとき，次が成り立つ．
(1) σ_1 は left to right minimum である．
(2) 1 は常に left to right minimum である．
(3) 1 の右側には left to right minimum はない．

証明 定義の自明な帰結である．
(1) σ_1 の左には数字が一つもないので，たしかに σ_1 はその左の全ての数字よりも小さい．
(2) 1 から n までの数字の中で 1 が最小なので，1 はどこにあってもその左の全ての数字よりも小さい．
(3) 1 から n までの数字の中で 1 が最小なので，1 の右にある数字はその左の全ての数字よりも小さくなることはない．

系 1.13. left to right minimum は常に 1 個は存在する．

n を正の整数として，$k=0,1,2,\ldots$ とする．1 から n までの数字を並び替えてできる数列 $\langle \sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle$ であって，その left to right minimum がちょうど k 個であるものを考える．そのような条件を充たす数列の全ての個数を $\mathrm{Lrm}(n,k)$ とする．

例えば，$n=4$ かつ $k=2$ のとき，

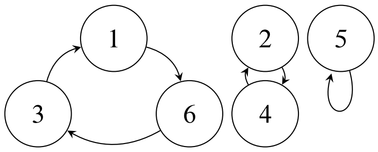
$$\begin{array}{llllll}
\langle 2,3,4,1\rangle, & \langle 2,4,3,1\rangle & & & & \\
\langle 3,4,1,2\rangle, & \langle 2,4,1,3\rangle, & \langle 2,3,1,4\rangle & & & \\
\langle 4,1,2,3\rangle, & \langle 4,1,3,2\rangle, & \langle 3,1,2,4\rangle, & \langle 3,1,4,2\rangle, & \langle 2,1,3,4\rangle, & \langle 2,1,4,3\rangle
\end{array}$$

が条件を充たす数列の全てなので，$\mathrm{Lrm}(4,2)=11$ である．そして，$c(4,2)=0$ であった．すなわち，$\mathrm{Lrm}(4,2)=c(4,2)$ である．

系**??**により，left to right minimum が 0 個の数列は存在しないので，$\mathrm{Lrm}(n,0)=0$ である．そして，$c(n,0)=0$ であった．すなわち，$\mathrm{Lrm}(n,0)=c(n,0)$ である．

また，命題**??**により，left to right minimum が 1 個の数列を作るためには，左端を 1 として，その右側に 2 から n までを好きな順番に並べればよい．すなわち，$\mathrm{Lrm}(n,1)=(n-1)!$ である．これは，円順列の場合の数を求めるときの考え方とそっくりである．そして，$c(n,1)$ は円順列の場合の数そのものであり，$c(n,1)=(n-1)!$ であった．すなわち，$\mathrm{Lrm}(n,1)=c(n,1)$ である．

以下では，一般に $\mathrm{Lrm}(n,k)=c(n,k)$ が成り立つことを示したい．そのためには，k 個のサイクルが与えられたとき，left to right minimum が k 個の数列を構成すればよい．例えば，



から left to right minimum が 3 個の数列を構成するにはどうすればよいだろうか．上で述べた $k=1$ のときのアイデアを拡張することを考えよう．それぞれのサイクルで最小の数字から時計回りに数字を読むことで，3 個の数列

$$\langle 1,6,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 5\rangle$$

が得られる．これら 3 個の数列から，一つの数列であって left to right minimum が 3 個のものを作りたい．単純に

$$\langle 1,6,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 5\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle 1,6,3,2,4,5\rangle$$

のようにしては left to right minimum が 1 個になってしまう．そこで，それぞれの数列の左端の数字 $1,2,5$ が小さくなるように並べ直して

$$\langle 1,6,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 5\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle 5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,6,3\rangle$$

から，改めて

$$\langle 5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,6,3\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle 5,2,4,1,6,3\rangle$$

としてみよう．すると，数列 $\langle 5,2,4,1,6,3\rangle$ の left to right minimum はめでたく 3 個になっている．このアイデアを一般化することにより，次を得る．

定理 1.14. n を正の整数とする．このとき，$k=0,1,2,\ldots$ に対して，等式

$$c(n,k)=\mathrm{Lrm}(n,k)$$

が成り立つ．

証明 人々に番号をつけて，数字 1 から n と同一視する．
k 個のサイクルが与えられたとする．まずは，k 個のサイクルそれぞれに対して，その中で最小の数字から時計回りに数字を読むことで，k 個の数列ができる．次に，それら k 個の数列を，それぞれの左端の数列が小さくなるように並べてから，つないで，一つの数列を作る．こうして構成された数列の left to right minimum はちょうど k 個である．
逆に，left to right minimum が k 個の数列が与えられたとする．まずは，left to right minimum の直前で数列を切ることで，k 個の数列を作る．次に，それら k 個の数列の両端をつなげることで，k 個のサイクルができる．
以上より，k 個のサイクルと left to right minimum が k 個の数列は一対一に対応することがわかった．すなわち，

$$c(n,k)=\mathrm{Lrm}(n,k)$$

である．

問題 1.15. 漸化式

$$\mathrm{Lrm}(n+1,k)=n\mathrm{Lrm}(n,k)+\mathrm{Lrm}(n,k-1)$$

を示せ.

また，本筋からは外れるが，left to right minimum を用いることで，次が示される.

命題 1.16. n を正の整数とする．このとき，次が成り立つ.

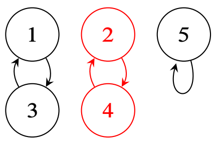
(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c(n,k) = n!$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kc(n,k) = c(n+1,2)$

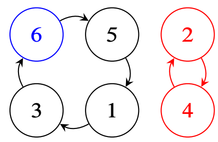
(3) $k = 0,1,2,\ldots$ に対して $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} c(n,j)\binom{j}{k} = c(n+1,k+1)$ が成り立つ.

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k c(n,k) = (n+1)!$

例えば，(2) の証明のアイデアは



$\rightsquigarrow \quad \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 5\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle 5\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle 6,5,1,3\rangle, \langle 2,4\rangle \quad \rightsquigarrow$



である.

証明 同じものを二通りに数えよう．人々に番号をつけて，数字 1 から n と同一視する.

(1) n 人からいくつかのサイクルを作る場合の数を考える.

- $k = 0,1,2,\ldots$ に対して，k 個のサイクルができるときの場合の数を考えてから，それらを足せば，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c(n,k)$ 通りである.
- 1 から n までの数字を適当に並び替えてから，left to right minimum で切り開いてサイクルを作ることを考えれば，1 から n までの数字を適当に並び替える場合の数の $n!$ 通りである.

これら二通りの数え方は同じ結果を与えるので，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c(n,k) = n!$ である.

(2) n 人からいくつかのサイクルを作り，さらに，どれかのサイクル一つに印をつける場合の数を考える.

- $k = 0,1,2,\ldots$ とする．k 個のサイクルを作ってから，そのどれかに印をつける場合の数は，$c(n,k)\cdot k$ 通りである．それらを足して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kc(n,k)$ 通りである.
- まずは，いくつかのサイクルを作り，どれかのサイクル一つに印をつける．次に，それぞれのサイクルを切り開いて，k 個の順列を作る．印がつけられていないサイクルから作られた順列を，left to right minimum が小さくなる順に並べ直してからつなげて一つの順列を作り，左端に $n+1$ を付け加えてから，それらの両端をつなげてサイクルを作る．また，印がつけられているサイクルはそのままにしておく．すると，$1,\ldots,n,n+1$ からなる二つのサイクルができる．そのような場合の数は $c(n+1,2)$ である.

これら二通りの数え方は同じ結果を与えるので，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kc(n,k) = c(n+1,2)$ である.

(3) n 人からいくつかのサイクルを作り，さらに，k 個のサイクルに印をつける場合の数を考えればよい.

(4) n 人からいくつかのサイクルを作り，さらに，いくつかのサイクルに印をつける場合の数を考えればよい.

問題 1.17. (3) と (4) の証明の詳細を埋めてみよ.

1.4.2 left to right minimum **の位置が指定された数列の個数**

例えば，1 から 6 までを数字を並び替えてできる数列であって，左から 4 番目と 2 番目と 1 番目だけに left to right minimum があるものは何個あるだろうか？ 順番に数えていく．常に 1 は右端の left to right minimum なので，今の場合，左から 4 番目にある left to right minimum は 1 である．そこで，まずは，1 から 6 までを数字を並び替えてできる数列であって，左から 4 番目に 1 があるものを数える．次のように考えてみよう．例えば，数列 $\langle 1,2,3,4,5,6\rangle$ が与えられたとき，これらを巡回的に回すと

$$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle \rightsquigarrow \langle 2,3,4,5,6,1\rangle \rightsquigarrow \langle 3,4,5,6,1,2\rangle \rightsquigarrow \langle 4,5,6,1,2,3\rangle \rightsquigarrow \langle 5,6,1,2,3,4\rangle \rightsquigarrow \langle 6,1,2,3,4,5\rangle$$

の 6 個の数列が得られる．このとき，左から 4 番目に 1 があるのは $\langle 4,5,6,1,2,3\rangle$ だけである．他の数列 $\langle \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\rangle$ についても同様である．よって，左から 4 番目に 1 があるものは，$6!/6$ 個あることになる．次に，左から 4 番目に 1 があり，さらに，

1 のすぐ左の left to right minimum が左から 2 番目にあるものを考える．今度は，例えば，$\langle 4,5,6,1,2,3\rangle$ に対して，1 の左側だけを巡回的に回してみると

$$\langle 4,5,6,1,2,3\rangle \rightsquigarrow \langle 5,6,4,1,2,3\rangle \rightsquigarrow \langle 6,4,5,1,2,3\rangle$$

の 3 個の数列が得られるが，条件を充たすものは $\langle 6,4,5,1,2,3\rangle$ だけである．他の数列 $\langle \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,1,\sigma_5,\sigma_6\rangle$ に対しても同様である．よって，左から 4 番目に 1 があり，1 のすぐ左の left to right minimum が左から 2 番目にあるものは，$6!/(6\cdot 3)$ 個あることになる．このアイデアを一般化することにより，次を得る．

命題 1.18. n を正の整数とする．$k=1,2,\dots,n$ とする．このとき，正の整数からなる数列 $1=c_1<c_2<\cdots<c_k\le n$ に対して，1 から n までの数字を並び替えてできる数列であって，その left to right minimum がちょうど k 個であり，さらに left to right minimum の位置が左から c_j 番目にあるものの個数は，$k=1$ のとき $(n-1)!$ であり，$k=2,3,\dots,n$ のとき

$$\frac{(n-1)!}{(c_k-1)\dots(c_2-1)}$$

である．

証明 順番に数えていく．まずは，c_k 番目にある left to right minimum は 1 であり，c_k 番目が 1 であるような数列の個数は，

$$(n-1)!$$

である．次に，c_k 番目が 1 であるような数列に対して，1 の左側の (c_k-1) 個の数字を巡回的に回すことで，(c_k-1) 個の数列が得られるが，それらの中で 1 のすぐ左の left to right minimum が左から c_k 番目にあるものは唯一つである．従って，c_k 番目が 1 であり，さらに，1 のすぐ左の left to right minimum が左から c_k 番目にあるような数列は，$(n-1)!/(c_k-1)$ 個ある．以下，同様のことを繰り返せばよい．

系 1.19. n を正の整数とする．$k=1,2,\dots,n$ に対して，

$$\mathfrak{C}_k := \{(c_1,c_2,\dots,c_k)\in\mathbb{Z}^k \mid 1=c_1<c_2<\cdots<c_k\le n\}$$

とする．このとき，

$$\mathrm{Lrm}(n,k)=\sum_{(c_1,c_2,\dots,c_k)\in\mathfrak{C}_k}\frac{(n-1)!}{(c_k-1)\dots(c_2-1)}$$

である．

1.4.3 第 1 種 Stirling 数の直接表示

次節への準備として，上昇階乗冪を展開して第 1 種 Stirling 数の一つの表示を求めておく．

例えば，$n=4$ のとき，

$$\begin{aligned} x^{\overline{4}} &= x(x+1)(x+2)(x+3)\\ &= (0\cdot 1\cdot 2\cdot 3)x^0+(1\cdot 2\cdot 3+0\cdot 1\cdot 2+0\cdot 1\cdot 3+0\cdot 2\cdot 3)x\\ &\quad +(1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3+0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 3)x^2+(0+1+2+3)x^3+x^4 \end{aligned}$$

なので，0 個の整数の積を 1 とすれば，

$$\begin{bmatrix}4\\k\end{bmatrix} = 0 \text{ から } (4-1) \text{ までの相異なる整数の } (4-k) \text{ 個の積の和}$$

である．命題**??**も参照のこと．また，$k=1,2,3,4$ に対して，

$$0 \text{ から } (4-1) \text{ までの相異なる整数の } (4-k) \text{ 個の積の和} = 1 \text{ から } (4-1) \text{ までの相異なる整数の } (4-k) \text{ 個の積の和}$$

である．さらに，例えば

$$1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3=\frac{(4-1)!}{3}+\frac{(4-1)!}{2}+\frac{(4-1)!}{1}$$

であり，

$$1 \text{ から } (4-1) \text{ までの相異なる整数の } (4-k) \text{ 個の積の和} \\ = 1 \text{ から } (4-1) \text{ までの相異なる整数の } (k-1) \text{ 個の積による (n-1)!の商の和}$$

なので，

$$\begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix} = 1 \text{ から } (4-1) \text{ までの相異なる整数の } (k-1) \text{ 個の積による (n-1)!の商の和}$$

である．一般に次が成り立つ．

命題 1.20. n を正の整数とする．$k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して，

$$\mathfrak{A}_k := \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k} \mid 0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-k} \leq (n-1)\right\}$$

として，$\mathfrak{A}_n = \emptyset$ とする．このとき，$k = 0, 1, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}) \in \mathfrak{A}_k} a_1 a_2 \ldots a_{n-k}$$

である．

系 1.21. n を正の整数とする．$\mathfrak{B}_1 = \emptyset$ として，$k = 2, 3, \ldots, n$ に対して，

$$\mathfrak{B}_k := \{(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} \mid 1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{k-1} \leq (n-1)\}$$

とする．このとき，

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) \in \mathfrak{B}_k} \frac{(n-1)!}{b_1 b_2 \ldots b_{k-1}}$$

である．

1.4.4 第 1 種 Stirling 数の組み合わせ論的な意味

最後に，第 1 種 Stirling 数の組み合わせ論的な意味を明らかにしよう．

定理 1.22. n を正の整数とする．このとき，$k = 0, 1, \ldots, n$ に対して，等式

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \mathrm{Lrm}(n, k)$$

が成り立つ．

証明 $k = 0$ のときは，両辺がともに 0 なので，主張はたしかに成り立つ．$k = 1, 2, \ldots, n$ とする．系**??**により，

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) \in \mathfrak{B}_k} \frac{(n-1)!}{b_1 b_2 \ldots b_{k-1}}$$

である．また，系**??**により，

$$\mathrm{Lrm}(n, k) = \sum_{(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathfrak{C}_k} \frac{(n-1)!}{(c_k - 1) \ldots (c_2 - 1)}$$

である．ところで，任意の $(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) \in \mathfrak{B}_k$ に対して，

$$c_1 := 1,\ c_2 := b_1 + 1,\ c_3 := b_2 + 1,\ \ldots,\ c_k := b_{k-1} + 1$$

とすれば，$(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathfrak{C}_k$ であって，$\mathfrak{B}_k$ と $\mathfrak{C}_k$ は一対一対応し，

$$\frac{(n-1)!}{b_1 b_2 \ldots b_{k-1}} = \frac{(n-1)!}{(c_k - 1) \ldots (c_2 - 1)}$$

である．よって，

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) \in \mathfrak{B}_k} \frac{(n-1)!}{b_1 b_2 \ldots b_{k-1}} = \sum_{(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathfrak{C}_k} \frac{(n-1)!}{(c_k - 1) \ldots (c_2 - 1)} = \mathrm{Lrm}(n, k)$$

である．

この証明のように，一対一対応を経由して等式を示す手法は，数え上げ組み合わせ論における定跡である．

最後に，定理**??**と定理**??**を合わせることにより，目標の式が得られる．

系 1.23. n を正の整数とする．このとき，$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，等式

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n, k)$$

が成り立つ．

問題 1.24. 等式 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right] = \mathrm{Lrm}(n, k) = c(n, k)$ を，次の手法でも示してみよ．

1. 漸化式を利用する．
2. $x^{\overline{n}}$ が重複組み合わせの場合の数であることを利用する．