Minkowski Inequality Yam

We prove that $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $p \geq 1 \neq \infty$

If $f, g = 0$, trivially true, so assume $f, g \neq 0$.

Then $|f+g| \leq |f| + |g| \Rightarrow |f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p$ (1)

Now multiply by $\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p}$, $\frac{\|g\|_p}{\|g\|_p}$, $\left(\frac{\|f\|_p + \|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right)^p$, so we have

$$\overset{(1)}{=} (\|f\|_p + \|g\|_p)^p \left(\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_p} \right)^p \quad (2)$$

Since $\|\cdot\|_p$ is positive definite, $\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$, $\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \in [0, 1]$

Furthermore, $F(x) = x^p$ is convex $\forall x \geq 0$, $p \geq 1$, so we have the following relation:

$$\boxed{F(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda F(a) + (1-\lambda) F(b)}, \quad \lambda \in [0,1],\ a, b \in \mathbb{R}$$

Then, $(2) \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p \left(\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p} \right)$

Integrating we have:

$$\overbrace{\int_\Omega |f+g|^p(x)\,dx}^{=\|f+g\|_p^p} \leq (\|f\|_p+\|g\|_p)^p \underbrace{\left(\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\overbrace{\frac{\int_\Omega |f|^p(x)\,dx}{\|f\|_p^p}}^{=1} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\overbrace{\frac{\int_\Omega |g|^p(x)\,dx}{\|g\|_p^p}}^{=1}\right)}_{=1}$$

So $\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p+\|g\|_p)^p$

Since norm is positive-definite, we have that

$$\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p}$$

Minkowski's Inequality in L^p

For $p=\infty$, we have $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}(f) = \inf\{M \mid |f| \leq M \text{ a.e}\}$

Since $|f| \leq N \;\; \forall N \in \{M \mid |f| \leq M \text{ a.e}\}$, $|f| \leq \|f\|_\infty$ a.e

Then $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ a.e

But $\|f+g\|_\infty = \inf\{M \mid |f+g| \leq M \text{ a.e}\}$

and $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \in \{M \mid |f+g| \leq M \text{ a.e}\}$

So by definition of inf, $\boxed{\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty}$

Minkowski's Inequality in L^∞