

X (旧ツイッター) 投稿問題集¹

$$\delta(\wedge_{\varepsilon} \wedge) \delta$$

吉田伸生²

大学学部程度の数学を題材に、適度な難易度で面白い問題を選んで収めています。数
学徒の皆さん、力試しに活用してください

1 問題

1.1 初等数学

問 1.1.1 変数 $x = (x_1, \dots, x_n) \in [\delta, 1]^n$ ($n \geq 2$, $\delta \in (0, 1/2)$ は定数) に対し、次の関数
の最大値を求めよ。

$$f_n(x) = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \cdots + x_{n-1}(1 - x_n) + x_n(1 - x_1).$$

1.2 集合・位相

問 1.2.1 村に一軒しかない床屋の主人はこう言う。「わしは自分で髭を剃る村人の髭を
剃るほどおせっかいではないが、自分で髭を剃らん村人の髭は必ずわしが剃るのじゃ」
だが、これには矛盾がある。指摘せよ。

問 1.2.2 N 個の風船があり、このうち、どの二つも赤または白の糸で結ばれていると
する。このとき、個数 $\sqrt{N}$ 以上の風船が同色の糸で結ばれていることを示せ。

(ここで、風船の部分集合 S が「赤（白）色の糸で結ばれている」とは、「 S の任意の 2
元が複数本經由も含め赤（白）色の糸で結ばれている」という意味とし、「同色の糸で
結ばれている」の意味もこれに準じる)

問 1.2.3 それぞれが背番号 $1, \dots, m$ をもつ m 人編成の競技チーム n 組が交流会のため
に集まり、任意の方法で m 席のテーブルに n 人ずつ着席した。このとき、各テーブル
から選手を一人ずつ選ぶことにより、選ばれた m 人の選手の背番号が全て異なるよう
にできることを示せ (ヒント：ホールの結婚定理)。

問 1.2.4 任意の無限集合 S に対し S と同じ濃度をもつ部分集合 $S_j \subset S$ ($j = 1, 2$) が存
在し $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S = S_1 \cup S_2$ をみたすことを示せ。

問 1.2.5 $A \subset (0, \infty)$ が開かつ非有界とする。このときある $a \in A$ に対し、 A は a の整
数倍を無限個含むことを示せ。

¹2024 年 5 月 4 日。

²[e-mail] noby@math.nagoya-u.ac.jp, [URL] <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~noby>,
[X]@noby_1eb

問 1.2.6 閉集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ が $\mathbb{R}^d$ の線形部分空間 $\neq \{0\}$ を含むためには次の性質 i), ii) をみたすことが必要十分であることを示せ. i) 原点は A の集積点である. ii) 任意の $a \in A$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対し $na \in A$.

問 1.2.7 $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体の集合 $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ の濃度を求めよ.

問 1.2.8 位相空間に関する以下の命題が正しければ証明を, さもなくば反例を述べよ.

- a) 内点を持たない有限個の閉集合の合併は内点を持たない.
- b) 内点を持たない可算無限個の閉集合の合併は内点を持たない.

問 1.2.9 距離空間 X, Y , および X の部分集合 $\mathcal{D}(f)$ から Y への写像 f について, 以下の2条件は同値であることを示せ.

- a) グラフ $\mathcal{G}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) ; x \in \mathcal{D}(f)\}$ は $X \times Y$ の閉集合;
- b) 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ の引き戻し $f^{-1}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{D}(f) ; f(x) \in K\} \subset X$ は閉集合.

問 1.2.10 可分距離空間の部分集合は可分か?

問 1.2.11 距離空間 (X, ρ) のある非可算部分集合 S が次をみたせば, X は可分でないことを示せ.

$$\inf\{\rho(x, y) ; x, y \in S, x \neq y\} > 0.$$

問 1.2.12 $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, I 上の有界連続関数全体の集合 $C_b(I \rightarrow \mathbb{R})$ に, 次の距離を付与する:

$$d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

- i) $C_b([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}) = C([0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$ は可分か?
- ii) $C_b(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ は可分か?

1.3 代数・線形代数

問 1.3.1 次の命題が正しければ証明し, さもなくば反例を挙げよ.

「群 G の部分群 H, H_1, H_2 について, $H \subset H_1 \cup H_2$ なら H は H_1, H_2 いずれかの部分群である」

問 1.3.2 次の命題が正しければ証明し, さもなくば反例を挙げよ.

「群 G の部分群 H, H_1, H_2, H_3 について, $H \subset H_1 \cup H_2 \cup H_3$ なら H は H_1, H_2, H_3 いずれかの部分群である」

問 1.3.3 次の命題が正しければ証明し, さもなくば反例を挙げよ.

「 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $H, H_1, \dots, H_m$ について, $H \subset H_1 \cup \dots \cup H_m$ なら H は $H_1, \dots, H_m$ いずれかの部分集合である」

問 1.3.4 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $v_1, \dots, v_n \in V$ は一次独立とする. このとき, $v \in V$ に対し次を示せ:

$$\{v_j - v\}_{j=1}^n \text{ は一次従属 } \iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n c_j = 1, v = \sum_{j=1}^n c_j v_j.$$

問 1.3.5 線形空間 X, Y に対し, $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow X$ は線形写像とする. このとき以下を示せ. ただし, $I_X: X \rightarrow X, I_Y: Y \rightarrow Y$ はそれぞれ恒等写像を表す. i) $x \mapsto Bx$ は $\text{Ker}(I_X - BA)$ から $\text{Ker}(I_Y - AB)$ への同型写像である. ii) $I_X - BA$ が X から X への全単射 $\iff I_Y - AB$ は Y から Y への全単射.

問 1.3.6 $n \times n$ 実行列 A, B に対し $C = (A^*A + B^*B)/2$ とする (A^*, B^* は転置). このとき, $|\det(AB)| \leq \det C$ を示せ. ($a, b \in \mathbb{R}$ に対する $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$ の一般化)

1.4 数列

問 1.4.1 自然数 n に対し $I = \{1, \dots, n\}$ とおく. 次の条件をみたす $J, K \subset I$ が存在するために n がみたすべき必要十分条件を求めよ.

$$(*) \quad J \cap K = \emptyset, I = J \cup K, \sum_{j \in J} j = \sum_{j \in K} j.$$

問 1.4.2 自然数 n に対し $\{j\}_{j=1}^{2n}$ から任意に $n+1$ 個の数字 $a_1 < \dots < a_{n+1}$ を選ぶ. このとき, ある $1 \leq p < q \leq n+1$ に対し a_q/a_p が 2 のべき乗となることを証明せよ.

問 1.4.3 一般二項係数 $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ ($\alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$) に対し以下を示せ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}, k, n \in \mathbb{N}$). i) $\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k}$. ii) $\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{2k}{k}$. iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ に対し

$$\binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_p}{k} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_p = k}} \binom{\alpha_1}{k_1} \cdots \binom{\alpha_p}{k_p}.$$

問 1.4.4 関数 $f_j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2$) の離散畳み込み $f_1 * f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める.

$$(f_1 * f_2)(n) = \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 = n}} f_1(n_1) f_2(n_2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

より一般に k 個の関数 $f_j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, \dots, k$) の離散畳み込みは次のように定める.

$$(f_1 * \dots * f_k)(n) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} f_1(n_1) \cdots f_k(n_k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

以下を示せ. i) $(\underbrace{1 * \dots * 1}_k)(n) = \binom{n+k-1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), ただし 1 は恒等的に値 1 をとる関数を表す. ii) $b(n) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) に対し $b * b = 1$. iii) 整数 $n \geq 0, k \geq 1$ に対し,

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2k} \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_{2k} = n}} \binom{2n_1}{n_1} \cdots \binom{2n_{2k}}{n_{2k}} = 4^n \binom{n+k-1}{n}.$$

問 1.4.5 非負数列 $\{a_n\}$ に対し次を示せ：

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n a_k \geq \sqrt{n} \implies \exists c \in (0, \infty), \forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq c \log n.$$

問 1.4.6 $A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し次の数列が収束すれば、その極限 $\mu(A)$ を**密度**とよぶ。

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_A(j)$$

また、 $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\} ; \mu_n(A) \text{ が収束する} \}$ とし、 $A, B \in \mathcal{A}$ が、 $A \cap B \in \mathcal{A}$ かつ $\mu(AB) = \mu(A)\mu(B)$ をみたすとき A, B は**独立**であるという。以下を示せ。

i) $A, B \in \mathcal{A}$ に対し、 $A \cap B \in \mathcal{A} \iff A \cup B \in \mathcal{A}$ 。また、これら的一方 (したがって両方) を仮定すると

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

ii) $A, B \in \mathcal{A}$ に対し、 A と B が独立なら、 A と $\mathbb{N} \setminus B$, $\mathbb{N} \setminus A$ と $\mathbb{N} \setminus B$ も独立である。

iii) $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が互いに素なら $p\mathbb{N}$, $q\mathbb{N}$ は独立かつそれぞれの密度は $1/p$, $1/q$ 。

iv)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{\substack{p: \text{素数} \\ p \leq n}} (\mathbb{N} \setminus p^2 \mathbb{N}) \right) = 6/\pi^2.$$

(上式左辺は、漸近的に「平方因子をもたない数全体の密度」と解釈できる)

問 1.4.7 記号は 問 1.4.6 のとおりとし、 $A_0, A_1, B_0, B_1 \subset \mathbb{N}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} A_0 &= \{ \text{正の偶数} \}, \quad A_1 = \{ \text{正の奇数} \} \\ B_0 &= \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{N} \cap [2^{2m}, 2^{2m+1}), \quad B_1 = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{N} \cap [2^{2m+1}, 2^{2m+2}). \end{aligned}$$

以下を示せ。

i) $A_j \in \mathcal{A}$, $\mu(A_j) = 1/2$ ($j = 0, 1$).

ii) $B_j, A_j \cap B_j \notin \mathcal{A}$ ($j = 0, 1$).

iii) $C = (A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1) \in \mathcal{A}$. $\mu(C) = 1/2$.

注: i)–iii) より $A_0, C \in \mathcal{A}$ かつ $A_0 \cap C = A_0 \cap B_0 \notin \mathcal{A}$ 。これと問 1.4.6 i) より $A_0 \cup C \notin \mathcal{A}$ したがって $\mathcal{A}$ は交差・合併で閉じていない。

問 1.4.8 自然数 $n \geq 1$ を 10 進表示したときの桁数を $d(n)$ と書く。このとき例えば、 $n = 1, 2, \dots$ に対し

$$4^n = 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536 \dots$$

だから $d(4^{n-1}) < d(4^n)$ をみたす n は $n = 2, 4, 5, 6, 8 \dots$ いま、自然数 $2 \leq q \leq 9$ を任意に固定するとき、 $d(q^{n-1}) < d(q^n)$ をみたす自然数 $n \geq 2$ は自然数全体の中でどのくらいの割合を占めるか？適切に定式化し、割合を求めよ。

1.5 微分積分

問 1.5.1 連続関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $a > 0$ に対し数列の極限として $f(na) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ をみたすとする. このとき, 関数の極限として $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ か? ヒント: 問 1.2.5.

問 1.5.2 正数列 p_n が 0 に収束するなら, 集合 $\{mp_n; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}$ で稠密であることを示せ.

問 1.5.3 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し $p \in \mathbb{R}$ が, 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+p) = f(x)$ をみたすとき, p を f の周期と呼ぶ.

i) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が任意に小さな正の周期を持ち, かつ, ある一点で右連続, あるいは左連続なら f は定数であることを示せ.

ii) 任意に小さな正の周期を持つ全射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は存在するか?

問 1.5.4 関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が, 全ての $x \in (0, 1]$ に対し x で有限な左極限を持ち, かつ全ての $x \in [0, 1)$ に対し x で有限な右極限を持つとする. このとき, f は有界か?

問 1.5.5 平面を, 互いに重ならない無限個の円周で埋め尽くすことはできるか? (円周ごとに半径を自由に変えてもよいが, 一点は「円周」と考えない)

問 1.5.6 $f \in C([0, 1]) \cap C^1((0, 1))$ とする. 次の命題が正しければ証明, さもなくば反証せよ.

i) f' の $(0, 1)$ 上での広義積分は収束する.

ii) f' の $(0, 1)$ 上での広義積分は絶対収束する.

問 1.5.7 $a, b, c \in (0, \infty)$, $a^2 + b^2 = c^2$ とするとき, 次の広義積分 I と J の間にどのような関係があるか?

$$I = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(c^2 - x^2)}}, \quad J = \int_b^c \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)(c^2 - x^2)}}.$$

問 1.5.8 $f \in C([0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し, f の「折れ線近似」 $f_n \in C([0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$ を次のように定める. $f_n(j/n) = f(j/n)$ ($j = 0, 1, \dots, n$), かつ, 区間 $[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ ($j = 1, \dots, n$) 上で f_n は直線. このとき, f_n は f に $[0, 1]$ 上一様収束することを示せ.

1.6 ルベグ積分

問 1.6.1 測度空間 $(S, \mathcal{A}, \mu)$ は半有限, すなわち次の条件をみたすとする.

$$A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \infty, \implies \exists B \in \mathcal{A}, B \subset A, 0 < \mu(B) < \infty.$$

以下を示せ.

i) $\forall A \in \mathcal{A}$ に対し, 単調増加可測集合列 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ で以下をみたすものが存在する.

$$\forall n \geq 1, B_n \subset A, \mu(B_n) < \infty, \mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A).$$

- ii) 可測関数 $f: S \rightarrow [0, \infty]$ に対し可測単関数の単調増加列 $\{g_n\}_{n \geq 1}$ で以下をみたすものが存在する.

$$\forall n \geq 1, g_n \leq f \quad \int_S g_n d\mu < \infty, \quad \int_S g_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f d\mu.$$

問 1.6.2 有界なルベグ可測関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が任意に小さな正の周期を持てば, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在し $f = c$, a.e. であることを示せ.

1.7 確率

問 1.7.1 事象 $A_1, \dots, A_n$ が任意の $J \subset \{1, \dots, n\}$ に対し $P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$ をみたすとき, $A_1, \dots, A_n$ は独立であるという. さて, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) > 0$ のとき A, B, C は独立か? 証明または反証せよ.

問 1.7.2 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義され, $\{0, 1\}$ に値をとる独立確率変数 $X_1, \dots, X_n$ であって $P(X_j = 1) = p \in (0, 1)$ をみたすものをパラメーター (n, p) の独立試行列と呼ぶ. パラメーター (n, p) の独立試行列 $X_1, \dots, X_n$ に対し $S_n = X_1 + \dots + X_n$ はパラメーター (n, p) の二項分布に従う: $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. では逆に, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義され, パラメーター (n, p) の二項分布に従う確率変数 S_n が任意に与えられたとする. 与えられた S_n はパラメーター (n, p) の独立試行列 $X_1, \dots, X_n$ の和で表すことができるか?

問 1.7.3 $X_1, \dots, X_n$ は正の値をとる i.i.d. かつある $\varepsilon > 0$ に対し $E[X_1^{-\varepsilon}] < \infty$ とする. 次を示せ.

$$\frac{n}{X_1 + \dots + X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E[X_1]} \quad \text{in } L^1(P),$$

ここで, $E[X_1] = \infty$ なら $\frac{1}{E[X_1]} = 0$ とする.

問 1.7.4 $q \geq 2$ を整数とすると, 以下を示せ.

- i) 任意の $x \in (0, \infty)$ に対し $dq^m \leq x < (d+1)q^m$ をみたす $m = m(x) \in \mathbb{Z}$, $d = d(x) \in \{1, \dots, q-1\}$ が一意的に存在する.
- ii) 任意の $x \in (0, \infty)$, $d = 1, \dots, q-1$ に対し $d(q^x) = d \Leftrightarrow \log_q d \leq \langle x \rangle < \log_q(d+1)$, ただし $\langle x \rangle = x - [x]$.
- iii) (ベンフォードの法則) 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$ に対し, 確率測度の列 $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\langle x_j \rangle}$ ($n \geq 1$) が $(0, 1)$ 上の一様分布に弱収束するとする. このとき,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{d(q^{x_j}) = d\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log_q \left(\frac{d+1}{d} \right), \quad d = 1, \dots, q-1.$$

1.8 関数解析

問 1.8.1 $(X, \|\cdot\|)$ はノルム空間, $p: X \rightarrow [0, \infty)$ は半ノルム, $x \in X$ は任意,

$$f(x) = \sup_{\|y\| \leq 1} p(x+y)$$

とする. このとき, $0 \leq s < t \Rightarrow f(sx) \leq f(tx)$ を示せ.

問 1.8.2 無限次元ノルム空間の開単位球は半径 $r \in (0, 1/3)$ の非交差な閉球を無限個含むことを示せ.

問 1.8.3 $(\star)$ X を線形空間, $\mathcal{L}(X)$ を X から X への線形写像全体の集合, $A, B \in \mathcal{L}(X)$, $AB - BA = 1$ とする. 以下を示せ. i) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, B^n \neq 0, AB^n - B^n A = nB^{n-1}$. ii) X がノルム空間なら, A, B の少なくとも一方は有界作用素でない.

問 1.8.4 ノルム空間 X, Y に対し, $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow X$ は有界線形作用素とする. このとき以下を示せ. ただし, $I_X: X \rightarrow X, I_Y: Y \rightarrow Y$ はそれぞれ恒等写像を表す. i) $I_X - BA$ が X から X への全単射かつ逆作用素は連続 $\Leftrightarrow I_Y - AB$ は Y から Y への全単射かつ逆作用素は連続. ii) $\text{Ker}(I_X - BA), \text{Ker}(I_Y - AB)$ のいずれか一方が有限次元なら両者はともに有限次元かつ両者の次元は等しい. iii) $(\star) \text{Ran}(I_X - BA), \text{Ran}(I_Y - AB)$ はともに閉部分空間と仮定する. このとき, $X/\text{Ran}(I_X - BA), Y/\text{Ran}(I_Y - AB)$ のいずれか一方が有限次元なら両者はともに有限次元かつ両者の次元は等しい. iv) $(\star) I_X - BA, I_Y - AB$ のいずれか一方がフレドホルム作用素なら両者はともにフレドホルム作用素かつ両者の指数は等しい.

2 解答例・解説

問 1.1.1 結論は,

$$\max\{f_n(x); x \in [\delta, 1]^n\} = \begin{cases} m(1-\delta), & (n=2m) \\ (m+\delta)(1-\delta), & (n=2m+1). \end{cases}$$

まず次を示す,

$$1) \max\{f_n(x); x \in [\delta, 1]^n\} = \max\{f(x); x \in \{\delta, 1\}^n\}.$$

$x_2, \dots, x_n$ を固定するとき, $x_1 \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ は 1 次関数なので

$$\max\{f_n(x_1, \dots, x_n); x_1 \in [\delta, 1]\} = \max\{f_n(x_1, \dots, x_n); x_1 \in \{\delta, 1\}\}.$$

他の変数についても同様に, 区間 $[\delta, 1]$ 上での $\max$ を 2 点集合 $\{\delta, 1\}$ 上での $\max$ におきかえられる. 以上で 1) を得る.

1) より, 結論を示すには次をいえばよい. 任意の $x \in \{\delta, 1\}^n$ に対し,

$$2) f_n(x) \leq \begin{cases} f_{2m}(\delta, 1, \delta, 1, \dots, \delta, 1) = m(1-\delta), & (n=2m) \\ f_{2m+1}(\delta, 1, \delta, 1, \dots, \delta, 1, \delta) = (m+\delta)(1-\delta), & (n=2m+1). \end{cases}$$

これを n に関する帰納法で示す. $n=2$ なら $f_2(x) = x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1)$ より,

$$f_2(1, 1) = 0, \quad f_2(1, \delta) = f_2(\delta, 1) = 1-\delta, \quad f_2(\delta, \delta) = 2\delta(1-\delta).$$

$\delta < 1/2$ より 2) は $n=2$ に対し成立する. 以下, $n-1$ に対し 2) が成立するとし, n の場合を示す. その際, 次に注意する.

$$3) f_n(x_1, \dots, x_n) = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + g(x_{n-1}, x_n, x_1),$$

ただし $g(x_{n-1}, x_n, x_1) = x_{n-1}(1-x_n) + x_n(1-x_1) - x_{n-1}(1-x_1)$.

• $n=2m+1$ とする. また, $x_1, \dots, x_n \in \{\delta, 1\}$ に対し $x_{n+1} = x_1$ とみなす. このとき, n は奇数なので, $\exists j = 1, \dots, n, x_j = x_{j+1}$. また, $f_n(x)$ の値は変数の巡回置換で不変なので $x_{n-1} = x_n$ としてよい. このとき,

$$g(x_{n-1}, x_n, x_1) = x_{n-1}(1-x_n) = \begin{cases} \delta(1-\delta), & (x_{n-1} = x_n = \delta), \\ 0, & (x_{n-1} = x_n = 1) \end{cases} \leq \delta(1-\delta).$$

$n-1=2m$ に注意すると, 上記不等式と 3) より

$$f_n(x_1, \dots, x_n) \leq m(1-\delta) + \delta(1-\delta) = (m+\delta)(1-\delta).$$

• $n=2m$ とする. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ なら $f_n(x) = 0$ だから $\exists j = 1, \dots, n, x_j = \delta$ としてもよい. . また, $f_n(x)$ の値は変数の巡回置換で不変なので $x_1 = \delta$ としてよい. このとき,

$$\begin{aligned} g(x_{n-1}, x_n, x_1) &= x_{n-1}(1-x_n) + (1-\delta)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \begin{cases} \delta(1-\delta), & (x_{n-1} = x_n = \delta), \\ 0, & (x_{n-1} = x_n = 1), \\ (1-\delta)^2, & (x_{n-1} = \delta, x_n = 1) \\ \delta(1-\delta), & (x_{n-1} = 1, x_n = \delta) \end{cases} \leq (1-\delta)^2. \end{aligned}$$

$n - 1 = 2(m - 1) + 1$ に注意すると上記不等式と 3) より

$$f_n(x_1, \dots, x_n) \leq (m - 1 + \delta)(1 - \delta) + (1 - \delta)^2 = m(1 - \delta).$$

以上より 2) を得る.

問 1.2.1 [吉田 1, p.203, 脚注] 参照.

問 1.2.2 風船が「赤（白）い糸で結ばれている」という関係は同値関係なので、それを R (W) と記す. このとき風船全体は R 同値類 B_j ($j = 1, \dots, m$) の非交差和に分解される. 今, 全ての R 同値類 B_j ($j = 1, \dots, m$) が含む元の数 $\sqrt{N}$ 以下と仮定すると, $m\sqrt{N} \geq N$ となり $m \geq \sqrt{N}$. 各 B_j から b_j を選ぶと, b_j ($j = 1, \dots, m$) のうち任意の二つが R 同値でない, 従って仮定より W 同値である. よって風船 b_j ($j = 1, \dots, m$) は同色の糸で結ばれている. 全ての W 同値類が含む元の数 $\sqrt{N}$ 以下と仮定しても同様である.

問 1.2.3 $I = \{1, \dots, m\}$, また, 各 $i \in I$ に対し A_i を i 番目のテーブルに着席した選手全体, $B_i \subset I$ を A_i に属する選手の背番号全体の集合とする. 単射 $f: I \rightarrow I$ が存在し $f(i) \in B_i$ ($\forall i \in I$) をみたせばよいが, それには次の条件が必要十分である (ホールの結婚定理).

$$(*) \quad \forall J \subset I, \quad |J| \leq \left| \bigcup_{i \in J} B_i \right|.$$

ところが $|J| = k$ なら $|\bigcup_{i \in J} A_i| = nk$. 一方, $|\bigcup_{i \in J} B_i| \leq k-1$ なら $|\bigcup_{i \in J} A_i| \leq (k-1)n$. ゆえに $(*)$ が成立する.

問 1.2.4 S と同じ濃度をもつ集合 T_j ($j = 1, 2$) を $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ をみたすようにとる (たとえば $T = \{1, 2\} \times S$ に対し $T_j = \{j\} \times S$). このとき, $|T_1 \cup T_2| = |S|$ [松坂, p.126, 定理 11]. したがって全単射 $f: T_1 \cup T_2 \rightarrow S$ が存在し, $S_j = f(T_j)$ ($j = 1, 2$) が所期部分集合である.

問 1.2.5 まず次を示す.

1) 区間 $[a_k, b_k]$ ($a_k < b_k$, $k \in \mathbb{N}$), および自然数 $1 = N_0 \leq N_1 < N_2 < \dots$ で次をみたすものが存在する: $[a_0, b_0] \subset A$, $[a_k, b_k] \subset (a_{k-1}, b_{k-1}) \cap \frac{1}{N_k} A$, $\forall k \geq 1$.

k についての帰納法による. A は空でない開集合なので, ある区間 $[a_0, b_0]$ ($a_0 < b_0$) を含む. そこで, $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, N_{k-1} までがとれたとする. 今, 自然数 $n_k > N_{k-1}$ を

$$(n_k + 1)a_{k-1} < n_k b_{k-1}$$

なるようにとる. 次に $(n_k a_{k-1}, \infty) \cap A \neq \emptyset$ より, $x \in (n_k a_{k-1}, \infty) \cap A$ をとる. 更にこの x に対し, $n_k a_{k-1} < x$ を満たす最大の自然数を N_k とする. このとき, $n_k \leq N_k$ より $(N_k + 1)a_{k-1} < N_k b_{k-1}$. したがって,

$$N_k a_{k-1} < x \leq (N_k + 1)a_{k-1} < N_k b_{k-1}.$$

ゆえに $x \in (a_{k-1}, b_{k-1}) \cap \frac{1}{N_k} A$. 以上から, $(a_{k-1}, b_{k-1}) \cap \frac{1}{N_k} A$ は空でない開集合なので区間 $[a_k, b_k]$ ($a_k < b_k$) を含む. 以上で 1) が示された.

1) の $[a_k, b_k]$ は A に含まれる有界閉区間の縮小列なので,

$$\exists a \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] \stackrel{1)}{\subset} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{N_k} A.$$

したがって $N_k a \in A, \forall k \in \mathbb{N}$.

問 1.2.6: 必要性は明らかなので十分性を示す. 仮定より点列 $a_n \in A \setminus \{0\}$ で $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ をみたすものが存在する. このとき, ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から $u_n \stackrel{\text{def}}{=} a_n/|a_n|$ の部分列 $u_{k(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$), および $u \in \mathbb{R}^d$ ($|u| = 1$) が存在し $u_{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. 今, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $m_n \in \mathbb{Z}$ を $m_n \leq t/|a_{k(n)}| < m_n + 1$ となるように選べば, $m_n |a_{k(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$. したがって, $A \ni m_n a_{k(n)} = m_n |a_{k(n)}| u_{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} tu$. A は閉だから $tu \in A$. 以上より $\{tu; t \in \mathbb{R}\} \subset A$.

問 1.2.7 $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ は連続濃度 $\aleph$ を持つ. まず全ての $c \in \mathbb{R}$ に対し $f \equiv c$ は $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ の元である. よって $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ は少なくとも連続濃度 $\aleph$ を持つ. また, $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ から $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ への写像 $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ は f の連続性と $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の稠密性より単射である. これと $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ が連続濃度 $\aleph$ を持つことから, $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ は高々連続濃度 $\aleph$ を持つ. 以上より結論を得る.

問 1.2.8 a) の証明: $A_1, \dots, A_n$ を内点を持たない閉集合, B を任意の開集合 $\neq \emptyset$ とし, $B \not\subset A_1 \cup \dots \cup A_n$ を言う. $n = 2$ で言えば, 帰納法より任意の $n \geq 2$ で言えるので $n = 2$ とする. $A_1^\circ = \emptyset$ より $B \not\subset A_1$. ゆえに $B \setminus A_1$ は空でない開集合. これと $A_2^\circ = \emptyset$ より $B \setminus A_1 \not\subset A_2$, つまり $B \not\subset A_1 \cup A_2$.

b) の反例: $\mathbb{R}$ の通常の位相を $\mathbb{Q}$ に制限し, $\mathbb{Q}$ を位相空間とする. このとき, 各 $r \in \mathbb{Q}$ に対し $\{r\} \subset \mathbb{Q}$ は内点を持たない閉集合, かつ全空間 $\mathbb{Q}$ はそれらの可算無限和である.

問 1.2.9 a) $\Rightarrow$ b): $x_n \in f^{-1}(K), x \in X, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ とし, $x \in f^{-1}(K)$ をいえばよい. K はコンパクト, $f(x_n) \in K$ だから $\{x_n\}$ の部分列 $\{x'_n\}$ および $y \in K$ が存在し $f(x'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ をみたす. このとき, $\mathcal{G}(f) \ni (x'_n, f(x'_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$. $\mathcal{G}(f)$ は閉集合だから $(x, y) \in \mathcal{G}(f)$. したがって $x \in \mathcal{D}(f), f(x) = y \in K$, すなわち $x \in f^{-1}(K)$.

b) $\Leftarrow$ a): $(x, y) \in X \times Y, \mathcal{G}(f) \ni (x_n, f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$ とし, $(x, y) \in \mathcal{G}(f)$, すなわち $x \in \mathcal{D}(f), f(x) = y$ をいえばよい. 仮定より $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \rho_Y(f(x_n), y) < \varepsilon$. このとき $K_N = \{f(x_n)\}_{n \geq N} \cup \{y\}$ はコンパクトなので, 仮定より $f^{-1}(K_N)$ は閉. さらに $\{x_n\}_{n \geq N} \subset f^{-1}(K_N), x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, かつ $f^{-1}(K_N)$ は閉なので $x \in f^{-1}(K_N)$, すなわち $x \in \mathcal{D}(f)$ かつ $f(x) \in K_N$. とくに $\rho_Y(f(x), y) < \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ は任意なので $f(x) = y$.

問 1.2.10 結論は正しく, 証明も難しくありません. 一方, 「距離空間」を「位相空間」に一般化した命題には反例が知られています.

問 1.2.11 距離を ρ と書き, 与えられた条件式左辺を $\varepsilon > 0, D \subset X$ を任意の稠密部分集合とする. 各 $x \in S$ に対し $x_D \in D$ を $\rho(x, x_D) < \varepsilon/2$ となるようにとると, $x, y \in S, x \neq y$ に対し

$$\varepsilon \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_D) + \rho(x_D, y_D) + \rho(y_D, y) < \rho(x_D, y_D) + \varepsilon.$$

よって, $\rho(x_D, y_D) > 0$. 以上から $\{x_D; x \in S\} \subset D$ は相異なる非可算無限個の点なので, D は可算集合であり得ない.

問 1.2.12 i) $I = [0, 1]$ とする. $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ が次をみたすとき, f は「 n 個の頂点 $f(j/n)$ ($j = 1, \dots, n$) を持つ折れ線である」ということにする: $j = 1, \dots, n, x \in I_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ に対し,

$$f(x) = (j - nx)f\left(\frac{j-1}{n}\right) + (1 - (j - nx))f\left(\frac{j}{n}\right).$$

つまり f は各区間 $[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ 上で, 両端点での値を補間する直線である. D_n を n 個の頂点を持つ折れ線であり, 頂点が全て有理数であるもの全体, $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ とする. このとき, 可算集合 D が $C(I \rightarrow \mathbb{R})$ で稠密であることを言う. そのためには任意の $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ に対し, f に一様収束する D の列 g_n の存在を言えばよい. まず, n 個の頂点を持つ折れ線 f_n を次で定める: $j = 1, \dots, n, x \in I_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ に対し,

$$f_n(x) = (j - nx)f\left(\frac{j-1}{n}\right) + (1 - (j - nx))f\left(\frac{j}{n}\right).$$

このとき, 問 1.5.8 の証明から, f_n は f に I 上一様収束する. 次に各 n, j に対し

$$|f(j/n) - r_{n,j}| < 1/n$$

をみたす $r_{n,j} \in \mathbb{Q}$ をとり, g_n を, n 個の頂点 $r_{n,j}$ ($j = 1, \dots, n$) を持つ折れ線とする. このとき, $g_n \in D_n$ かつ,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - g_n(x)| \leq \max_{0 \leq j \leq n} |f(j/n) - r_{n,j}| < 1/n.$$

以上より g_n は f に I 上一様収束する.

ii) $n \in \mathbb{Z}$ に対し $f_n(x) = (1 - 2|x - n|)^+$ ($x \in \mathbb{R}$) とする. このとき, $f_n((n - 1/2, n + 1/2)) = (0, 1]$, $(n - 1/2, n + 1/2)$ の外では $f_n \equiv 0$ (特に x を固定するごとに $f_n(x) \neq 0$ となる n は高々ひとつ). さらに $A \subset \mathbb{Z}$ に対し $f_A(x) = \sum_{n \in A} f_n(x)$ とする. このとき, 集合 $\{f_A; A \subset \mathbb{Z}\} \subset C_b(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ は連続濃度を持つ. また, $A, B \subset \mathbb{Z}, A \neq B$ に対し $d(f_A, f_B) = 1$. 以上と問 1.2.11 より $C_b(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ は可分ではない.

注: 上の f_A は全て一様連続なので, $\mathbb{R}$ 上の有界かつ一様連続な関数全体の集合も可分でないことが分かる.

問 1.3.2 反例: $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, G の元を $x = (x_1, x_2, x_3)$ と書く. 更に $H = \{x \in G; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $H_i = \{x \in G; x_i = 0\}$ とする. $(1, 1, 1) \notin H$ より $H \subset H_1 \cup H_2 \cup H_3$. また $(1, 1, 0) \in H \setminus (H_1 \cup H_2)$, $(0, 1, 1) \in H \setminus (H_2 \cup H_3)$ より H は H_1, H_2, H_3 のいずれにも属さない.

問 1.3.3 H に $\mathbb{R}^n$ からの相対位相を考える. $H = \bigcup_{j=1}^m H \cap H_j$, かつ各 $H \cap H_j$ は H の線形部分空間なので H の閉集合である. これと問 1.2.8 より, ある j に対し $H \cap H_j$ は内点を持つ. 一方, H の線形部分空間で内点を持つのは H 自身だけなので, $H = H \cap H_j$. 従って $H \subset H_j$.

[解説: 一見線形代数の問題だが, 証明には位相を用いた. 実際, 命題から「 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間」という仮定を外すと, 例えば $m = 3$ で反例がある (問 1.3.2 の反例で $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ は体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の線形空間, H, H_1, H_2, H_3 はその部分線形空間). なお, $m = 2$ なら位相

と無関係に証明できる (問 1.3.1) .]

問 1.3.4 $(\Rightarrow) \exists(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \gamma_j(v_j - v) = 0$ とする. このとき $\sum_{j=1}^n \gamma_j v_j = \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j\right) v$. $v_1, \dots, v_n$ の一次独立性より $\sum_{j=1}^n \gamma_j \neq 0$. ゆえに $c_j = \gamma_j / \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j\right)$ として結論を得る. $(\Leftarrow) \exists(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n c_j = 1, v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$ なら, $\sum_{j=1}^n c_j(v_j - v) = \sum_{j=1}^n c_j v_j - v = 0$.

問 1.3.5 i) 容易. ii) 対称性より $(\Rightarrow)$ を言えばよい. $U : X \rightarrow X$ が $U(I_X - BA) = (I_X - BA)U = I_X$ をみたすなら, $V = I_Y + AUB$ が $V(I_Y - AB) = (I_Y - AB)V = I_Y$ をみたすことが容易にわかる.

問 1.3.6 [吉田 3, 問 15.8.2] 参照.

問 1.4.1 $(*) \iff n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ を示す.

$(\Rightarrow)$ $(*)$ なら $4|n(n+1)$. 一方, $n \equiv r \pmod{4}$ ($r = 0, \dots, 3$) なら, $\pmod{4}$ で

$$n(n+1) \equiv r(r+1) \equiv \begin{cases} 0 & (r = 0, 3), \\ 2 & (r = 1, 2). \end{cases}$$

よって $4|n(n+1)$ なら $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$.

$(\Leftarrow)$ 一般に, 自然数 $k+r$ ($r = 1, \dots, 4$) に対し,

$$(k+1) + (k+4) = (k+2) + (k+3).$$

したがって $I_1, \dots, I_m \subset \mathbb{N}$ が非交差かつ, それぞれが連続する 4 つの自然数からなるとき, 各 I_k ($k = 1, \dots, m$) の両端を集めて得られる集合 J , 両端以外を集めて得られる集合 K は次をみたとす.

$$1) \quad J \cap K = \emptyset, \quad \bigcup_{k=1}^m I_k = J \cup K, \quad \sum_{j \in J} j = \sum_{j \in K} j.$$

$n = 4m$ ($m \geq 1$) の場合は, $I_k = \{4(k-1) + j\}_{j=1}^4$ ($k = 1, \dots, m$) に 1) を適用し, $(*)$ を得る. $n = 4m + 3$ ($m \geq 1$) の場合は, $I_k = \{3 + 4(k-1) + j\}_{j=1}^4$ ($k = 1, \dots, m$) に 1) を適用し, 次をみたとす $J_0, K_0 \subset \{4, \dots, n\}$ を得る.

$$J_0 \cap K_0 = \emptyset, \quad \{4, \dots, n\} = J_0 \cup K_0, \quad \sum_{j \in J_0} j = \sum_{j \in K_0} j.$$

そこで, $J = \{1, 2\} \cup J_0$, $K = \{3\} \cup K_0$ とすればよい.

問 1.4.2 各 a_j ($j = 1, \dots, n+1$) を $a_j = k_j 2^{e_j}$ ($k_j, e_j \in \mathbb{N}$, k_j は奇数) と表す. このとき, $k_1, \dots, k_{n+1} \in \{2j-1\}_{j=1}^n$ より, ある $1 \leq p < q \leq n+1$ に対し $k_p = k_q$. よって $a_q/a_p = (k_q 2^{e_q})/(k_p 2^{e_p}) = 2^{e_q - e_p}$. さらに $a_p < a_q$ より $e_p < e_q$.

問 1.4.3 i), ii): 単純計算. **iii)** $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ の場合は, 等式 $(1+x)^{\alpha_1+\dots+\alpha_p} = (1+x)^{\alpha_1} \dots (1+x)^{\alpha_p}$ ($x \in \mathbb{R}$) の両辺を二項展開し係数を比較する³. $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ の場合は次のようにして $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ の場合に帰着させる. 所期等式両辺は $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ に関する多項式であり, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ の場合には等式が成立する. 一般に

1) 高々 n 次の多項式 $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が $n+1$ 個の相異なる零点を持てば $P \equiv 0$.

まず, $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ を固定し, 変数 α_1 について 1) を適用し, $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ の場合に所期等式を得る. 次に, $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_3, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ を固定し, 変数 α_2 について 1) を適用し, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_3, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ の場合に所期等式を得る. 以下, この操作を繰り返し, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ の場合に所期等式を得る.

問 1.4.4 i)

$$(\underbrace{1 * \dots * 1}_k)(n) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} 1.$$

³一般二項展開 $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$) を用いれれば $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ の場合に直接所期等式を得る. ここでは, 一般二項展開を用いず, より初等的な証明を与える.

左辺は k 変数 $x_1, \dots, x_k$ の n 次単項式の個数, すなわち $\binom{n+k-1}{n}$ に等しい.

ii) 解1 (@multiple_zeta さん) 問 1.4.3 iii) で p を $2p$ におきかえ, $\alpha_1 = \dots = \alpha_2 = -1/2$ とすると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \binom{-1}{n} \stackrel{\text{問 1.4.3 i)}}{=} (-1)^n, \\ \text{右辺} &\stackrel{\text{問 1.4.3 ii)}}{=} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 = n}} \binom{2n_1}{n_1} \binom{2n_2}{n_2}. \end{aligned}$$

よって所期等式を得る.

解2: $x \in (-1, 1)$ に対し, 一般二項定理より

$$1) \quad (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^n \stackrel{\text{問 1.4.3 ii)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1} \stackrel{1)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (b * b)(n) x^n.$$

上式最左辺と最右辺の係数を比較して所期等式を得る.

解3 (@Jun_Gitef17 さん). 1次元単純ランダムウォーク $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($S_0 = 0$) に対し $L_{2n} = \max\{0 \leq k \leq 2n, ; S_k = 0\}$ とすると,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^n P(L_{2n} = 2k) = \sum_{k=0}^n P(S_{2k} = 0, S_{2k+j} \neq 0, \forall j = 1, \dots, 2n - 2k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(S_{2k} = 0) P(S_j \neq 0, \forall j = 1, \dots, 2n - 2k). \end{aligned}$$

ここで, $P(S_{2k} = 0) = b_k$. また, 鏡映法 (Durrett “Probability: Theory and Examples” 2nd ed. p.198, (3.3)) より

$$P(S_j \neq 0, \forall j = 1, \dots, 2n - 2k) = P(S_{2n-2k} = 0) = b_{n-k}.$$

以上より所期等式を得る.

iii)

$$\underbrace{b * \dots * b}_{2k}(n) = \underbrace{(b * b) * \dots * (b * b)}_k(n) \stackrel{\text{ii)}}{=} \underbrace{(1 * \dots * 1)}_k(n) \stackrel{\text{i)}}{=} \binom{n+k-1}{n}.$$

以上より所期等式を得る.

問 1.4.5 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とし, まず次の命題を示す. 正数列 $\{b_n\}$ について,

$$1) \quad \forall n \geq 1, (b_n - b_{n+1})S_n \geq b_n^2 \implies \forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

仮定より $b_n S_n \geq b_n^2$. したがって,

$$\begin{aligned} b_n^2 &\leq S_n b_n = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (S_k b_k - S_{k-1} b_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=2}^n S_{k-1} (b_{k-1} - b_k) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2. \end{aligned}$$

ここで, 2行目の第1項にシュヴァルツの不等式, 第2項に 1) の仮定を適用することにより 3) 行目に移行した. 上で得られた不等式を整理すると 1) の結論を得る.

次に 1) を $b_n = \frac{1}{4\sqrt{n}}$ に適用して所期命題を示す. $n \geq 1$ に対し

$$b_n - b_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{4\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \geq \frac{1}{16n^{3/2}}.$$

これと $S_n \geq \sqrt{n}$, $b_n^2 = \frac{1}{16n}$ より,

$$(b_n - b_{n+1}) S_n \geq \frac{1}{16n} = b_n^2$$

ゆえに 1) より

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq \sum_{k=1}^n b_k^2 = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{1}{16} \log n.$$

問 1.4.6 i), ii): 容易. **iii)** まず $p\mathbb{N} \in \mathcal{A}$ かつ $\mu(p\mathbb{N}) = 1/p$ を示す. $k = 0, \dots, p-1$ に対し $\sum_{j=1}^{pn+k} \mathbf{1}_{p\mathbb{N}}(j) = n$. したがって $\mu_{pn+k}(p\mathbb{N})$ は $1/p$ に収束する. p, q は互いに素なので $p\mathbb{N} \cap q\mathbb{N} = pq\mathbb{N} \in \mathcal{A}$, $\mu(p\mathbb{N} \cap q\mathbb{N}) = \mu(pq\mathbb{N}) = 1/pq = \mu(p\mathbb{N})\mu(q\mathbb{N})$. **iv)**

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcap_{\substack{p: \text{素数} \\ p \leq n}} (\mathbb{N} \setminus p^2 \mathbb{N}) \right) &\stackrel{\text{ii), iii)}}{=} \prod_{\substack{p: \text{素数} \\ p \leq n}} \mu(\mathbb{N} \setminus p^2 \mathbb{N}) \\ &= \prod_{\substack{p: \text{素数} \\ p \leq n}} (1 - p^{-2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 6/\pi^2. \end{aligned}$$

問 1.4.7 i) A_0 について示すが, A_1 についても同様である. $\sum_{j=1}^{2n} \mathbf{1}_{A_0}(j) = \sum_{j=1}^{2n+1} \mathbf{1}_{A_0}(j) = n$. したがって $\mu_{2n}(A_0)$, $\mu_{2n+1}(A_0)$ はともに $1/2$ に収束する. **ii)** B_0 , $A_0 \cap B_0$ について示すが, その他についても同様である.

$$1) \quad \sum_{j=1}^{2^{2n+2}} \mathbf{1}_{B_0}(j) = \sum_{j=1}^{2^{2n+1}} \mathbf{1}_{B_0}(j) = \sum_{m=0}^n (2^{2m+1} - 2^{2m}) = \sum_{m=0}^n 4^m = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

ゆえに

$$2) \quad \mu_{2^{2n+2}}(B_0) = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{4^{n+1} - 1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}, \quad \mu_{2^{2n+1}}(B_0) = \frac{1}{2 \cdot 4^n} \frac{4^{n+1} - 1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.$$

各 $\mathbb{N} \cap [2^{2m}, 2^{2m+1})$ の中に偶数・奇数はちょうど半分ずつ含まれるから, 1) より

$$\sum_{j=1}^{2^{2n+2}} \mathbf{1}_{A_0 \cap B_0}(j) = \sum_{j=1}^{2^{2n+1}} \mathbf{1}_{A_0 \cap B_0}(j) = \frac{4^{n+1} - 1}{6}$$

ゆえに 2) と同様に, $\mu_{2^{2n+2}}(A_0 \cap B_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6}$, $\mu_{2^{2n+1}}(A_0 \cap B_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$. ii)

$$C = \bigcup_{m=0}^{\infty} (A_0 \cap [2^{2m}, 2^{2m+1})) \cup (A_1 \cap [2^{2m+1}, 2^{2m+2})).$$

よって, 任意の $n \geq 1$ に対し

$$n-1 \leq \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{1}_C(j) \leq \sum_{j=1}^{2n+1} \mathbf{1}_C(j) \leq n+1.$$

上式より $\mu_n(C) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

問 1.4.8 まず次に注意する.

1) $d(q^n) \leq d(q^{n-1}) + 1$.

実際, 任意の $k \geq 1$ に対し $d(k) = \min\{d \in \mathbb{N}; k < 10^d\}$. ゆえに

$$q^n = q^{(n-1)+1} < 10^{d(q^{n-1})} \cdot q < 10^{d(q^{n-1})+1}.$$

上式より 1) を得る.

1) より

$$\begin{aligned} d(q^n) &= \sum_{k=2}^n (d(q^k) - d(q^{k-1})) + 1 \\ &= \#\{2 \leq k \leq n; d(q^{k-1}) < d(q^k)\} + 1. \end{aligned}$$

一方,

$$10^{d(q^n)-1} \leq q^n < 10^{d(q^n)}$$

より,

$$\frac{\log q}{\log 10} < \frac{d(q^n)}{n} \leq \frac{\log q}{\log 10} + \frac{1}{n}.$$

以上より

$$\frac{1}{n} \#\{2 \leq k \leq n; d(q^{k-1}) < d(q^k)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\log q}{\log 10}.$$

問 1.5.1 正しいことを背理法で示す. 関数の極限として $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ でないとする, ある $\varepsilon > 0$ に対し $A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in (0, \infty); |f(x)| > \varepsilon\}$ は非有界である. また, A は開だから 問 1.2.5 より, ある $a \in A$ に対し $na \in A$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ が無限個存在する. ゆえに数列の極限として $f(na) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ でない.

問 1.5.2 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ を任意とするとき, n が十分大きければ $1 < (b-a)/p_n$. ゆえに $a/p_n < m < b/p_n$, すなわち $a < mp_n < b$ をみたす $m \in \mathbb{Z}$ が存在する.

問 1.5.3 i) まず f が $c \in \mathbb{R}$ で右連続とする. このとき $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \stackrel{\text{def}}{=} [c, c+\delta], |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. よって $\sup_I f - \inf_I f < 2\varepsilon$. ところが, f は δ 以下の周期を持つので, $\sup_I f = \sup_{\mathbb{R}} f, \inf_I f = \inf_{\mathbb{R}} f$. よって $\sup_{\mathbb{R}} f - \inf_{\mathbb{R}} f < 2\varepsilon$. $\varepsilon > 0$ は任意だったので $\sup_{\mathbb{R}} f = \inf_{\mathbb{R}} f$, つまり f は定数である. 次に f が $c \in \mathbb{R}$ で左連続とする. f の正の周期 p に対し $-p$ も f の正の周期であることに注意すれば, 上と同様に結論を

得る. ii) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の任意の代表系を V をとり, 分解 $\mathbb{R} = \bigcup_{v \in V} (v + \mathbb{Q})$ (右辺は非交差和) を考える. V は連続濃度を持つので全単射 $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する. そこで $x \in v + \mathbb{Q}$ ($v \in V$) に対し $f(x) = g(v)$ と定める. 構成より f は任意の有理数を周期として持ち, かつ $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

問 1.5.4 [吉田 3, 問 7.3.1] 参照.

問 1.5.5 平面が円周の非交差和であると仮定し矛盾を導く. それら円周達の集合を $\mathcal{C}$ と記す. $C_1 \in \mathcal{C}$ を任意に選び, その半径を r_1 とする. 仮定より C_1 の中心はある $C_2 \in \mathcal{C}$ 上にある. また, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ より, C_2 の半径 r_2 について, $r_2 < r_1/2$ が必要である. 以後, この手続きを続けると, 半径 r_n の円周 $C_n \in \mathcal{C}$ ($n = 1, 2, \dots$) で, C_{n+1} は C_n の内部にあり, $r_n < r_1/2^n$ が成り立つものが得られる. C_n の周および内部からなる閉円盤 K_n はコンパクト集合の縮小列なので $\bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$ ([吉田 3, 問 9.3.3] 参照). これと $r_n \rightarrow 0$ より $\exists x \in \mathbb{R}^2, \bigcap_{n \geq 1} K_n = \{x\}$. 再度, 仮定より点 x は, ある $C \in \mathcal{C}$ の上であり, C の半径を r とすれば, $r_n \leq r$ なる n に対し $C \cap C_n \neq \emptyset$. これは矛盾.

問 1.5.6 i) 命題は正しく証明は以下の通り. $0 < a < b < 1$ に対し,

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

$a \rightarrow 0, b \rightarrow 1$ で上式は $f(1) - f(0)$ に収束する.

ii) 命題には次の反例がある. よく知られているように $\frac{\sin s}{s}$ の $(1, \infty)$ 上の広義積分は収束するが絶対収束しない. また $0 < a < b < 1$ に対し,

$$\int_a^b \frac{\sin(1/t)}{t} dt = \int_{1/b}^{1/a} \frac{\sin s}{s} ds, \quad \int_a^b \left| \frac{\sin(1/t)}{t} \right| dt = \int_{1/b}^{1/a} \left| \frac{\sin s}{s} \right| ds.$$

ゆえに $\frac{\sin(1/t)}{t}$ の $(0, 1)$ 上の広義積分は収束するが絶対収束しない. そこで $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \frac{\sin(1/t)}{t} dt$ ($x \in (0, 1]$), $f(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ とすると $f \in C([0, 1])$, $f'(x) = \frac{\sin(1/x)}{x}$ は $x \in (0, 1)$ について連続. また, 既に見たとおり, f' の $(0, 1)$ 上の広義積分は絶対収束しない.

問 1.5.7 $I = J$ ($J = \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - b^2)(c^2 - y^2)}}$ を $y = (c^2 - x^2)^{1/2}$ とおいて置換積分).

問 1.5.8 $j = 1, \dots, n, x \in I_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right]$ とする.

$$f_n(x) = (j - nx)f\left(\frac{j-1}{n}\right) + (1 - (j - nx))f\left(\frac{j}{n}\right).$$

より,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq (j - nx) \left| f\left(\frac{j-1}{n}\right) - f(x) \right| + (1 - (j - nx)) \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \left(\frac{j-1}{n}\right) - f(x) \right| \vee \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right|. \end{aligned}$$

以上と f の一様連続性より,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{x \in I_{n,j}} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq n} \sup_{x \in I_{n,j}} \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

注: $f \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ に対しても折れ線近似 f_n を同様に定めることができる. さらに, f が一様連続なら, 上と同様にして f_n が f に一様収束することが分かる.

問 1.6.1 i) 簡単のため $\mathcal{A}_f = \{B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty\}$ とする. $A \in \mathcal{A}_f$ なら $B_n \equiv A$ でよい. そこで $A \notin \mathcal{A}_f$ とする. まず次をいう.

1) $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\mu(B); B \in \mathcal{A}_f, B \subset A\} = \infty$.

α の定義より, $\exists\{C_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}_f, C_n \subset A, \mu(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ そこで $B_n = \bigcup_{j=1}^n B_j, B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ とすれば, $B \in \mathcal{A}, B \subset A$,

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \alpha.$$

いま, $\alpha < \infty$ と仮定する. このとき, $B \in \mathcal{A}_f$ と $\infty = \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$ より $\mu(A \setminus B) = \infty$. これと, μ の半有限性より $\exists C \in \mathcal{A}_f, C \subset A \setminus B, 0 < \mu(C) < \infty$. このとき,

$$B \cup C \in \mathcal{A}_f, B \cup C \subset A, \mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) > \alpha.$$

これは α の定義に反するので, $\alpha = \infty$. 以上で 1) を得る.

1) が示されれば, 1) の証明中の $\{B_n\}_{n \geq 1}$ が所期単調増加可測集合列である.

ii) (第一段) f が非負可測単関数の場合. f は $\alpha_j \in (0, \infty), A_j \in \mathcal{A} (j = 1, \dots, m)$ を用い, 次のように表せる:

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}.$$

(i) より各 $j = 1, \dots, m$ に対し, 単調増加可測集合列 $\{B_{n,j}\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}_f$ を $B_{n,j} \subset A_j$ かつ $\mu(B_{n,j}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A_j)$ をみたすようにとれる. このとき $g_n = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{B_{n,j}}$ は非負可積分関数の増加列であり $g_n \leq f$ をみたす. さらに

$$\int_S g_n d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_{n,j} \mu(B_{n,j}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_{n,j} \mu(A_j) = \int_S f d\mu.$$

(第二段) f が非負可測関数の場合. 非負可測単関数の単調増加列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ で各点で $f_n \leq f, f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ をみたすものが存在する [吉田 2, p.48, 命題 2.2.4], また, 単調収束定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

$f \in L^1(\mu)$ なら $\{f_n\}$ が所期可測単関数の単調増加列である. そこで $f \notin L^1(\mu)$ とする. このとき, 上で述べたことから任意の n に対し可測単関数 f_n で各点で $f_n \leq f$ かつ $n < \int_S f_n d\mu$ をみたすものが存在する. この f_n に対し, 第一段により非負かつ可積分な単関数 h_n で $h_n \leq f_n, n < \int_S h_n d\mu$ をみたすものが存在する. 最後に $g_n = \max_{j=1}^n h_j$ として所期可積分単関数の単調増加列を得る.

問 1.6.2 ある周期 $p > 0$ に対し $f(x/p) = c$, a.e. ならよいので 1 は周期であると仮定してよい. したがって, $[0, 1]$ 上 a.e. で定数なら十分. フーリエ級数展開より,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(2\pi i n x) \text{ in } L^2([0, 1]),$$

ただし $c_n = \int_0^1 f(x) \exp(-2\pi i n x) dx$. 仮定より, 正の周期の列 p_m を $p_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ なるようにとれる. このとき,

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 f(x + p_m) \exp(-2\pi i n x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \exp(-2\pi i n (x - p_m)) dx = \exp(2\pi i n p_m) c_n. \end{aligned}$$

(二つ目の等号は, 周期関数の周期積分はシフトしても同じであることによる) $n \neq 0$ とする. このとき m 十分大なら $|np_m| < 1$, よって上式より $c_n = 0$. 以上より $[0, 1]$ 上 a.e. で $f = c_0$.

問 1.7.1 [吉田 2, 問 3.1.10] 参照.

問 1.7.2 できるとは限らない. 実際, $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, また, $k \in \Omega$ に対し, $P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $S_n(k) = k$ と定めると S_n は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義され, パラメーター (n, p) の二項分布に従う確率変数である. ところが, $X_1, \dots, X_n$ がパラメーター (n, p) の独立試行列とすれば, ベクトル $(X_j)_{j=1}^n$ は $\{0, 1\}^n$ の全ての点を正の確率でとる. したがって Ω は少なくとも 2^n 個の相異なる点を含む必要があり, $n \geq 2$ なら $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ 上で $X_1, \dots, X_n$ を実現することはできない.

一方, 「 Ω が十分大きい」と仮定すれば S_n はパラメーター (n, p) の独立試行列 $X_1, \dots, X_n$ の和で表すことができる. 実際, $k = 0, 1, \dots, n$ に対し, $Y(k, \omega)$ は集合

$$H_k = \{(x_j)_{j=1}^n \in \{0, 1\}^n; x_1 + \dots + x_n = k\}$$

上の各点に等確率 $\binom{n}{k}^{-1}$ で値をとり, かつ S_n と独立とする (このような $Y(k, \omega)$ は「 Ω が十分大きい」と仮定すれば存在する). そこで

$$X(\omega) = (X_j(\omega))_{j=1}^n = Y(S_n(\omega), \omega)$$

と定める. このとき,

$$S_n(\omega) = k \iff X(\omega) \in H_k \iff X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) = k.$$

よって $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$. 一方, $(x_j)_{j=1}^n \in H_k$ なら

$$\begin{aligned} P(X_j(\omega) = x_j, j = 1, \dots, n) &= P(S_n(\omega) = k, Y(k, \omega) = (x_j)_{j=1}^n) \\ &= P(S_n(\omega) = k) P(Y(k, \omega) = (x_j)_{j=1}^n) \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}^{-1} = p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

よって $X_1, \dots, X_n$ はパラメーター (n, p) の独立試行列である.

問 1.7.3 大数の法則より, 概収束の意味では示すべき収束が成り立つ. そこで $Y_n = \frac{n}{X_1 + \dots + X_n}$ が一様可積分ならよい. さらに $Y_n \leq Z_n \stackrel{\text{def}}{=} (X_1 \cdots X_n)^{-1/n}$ より Z_n が一様可積分ならよい. 一方, $n \geq 2\varepsilon$ なら, $p = n/2\varepsilon$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ としてヘルダーの不等式を用いると,

$$E[X_1^{-2/n}] = E[(X_1^{-\varepsilon})^{2\varepsilon/n}] \leq E[X_1^{-\varepsilon}]^{2\varepsilon/n}.$$

よって $\lambda > 0$ に対し,

$$E[Z_n : Z_n \geq \lambda] \leq \lambda^{-1} E[Z_n^2] = \lambda^{-1} E[X_1^{-2/n}]^n = \lambda^{-1} E[X_1^{-\varepsilon}]^{2\varepsilon}.$$

上式より Z_n は一様可積分である.

問 1.7.4 i) $dq^m \leq x < (d+1)q^m$ は

$$q^m \leq x < q^{m+1} \text{ かつ } \log_q d \leq \langle \log_q x \rangle < \log_q(d+1)$$

と同値であり, これらをみたす $m \in \mathbb{Z}$, $d \in \{1, \dots, q-1\}$ が一意に存在することは明らかである. ii) i) と同様. iii) 仮定より任意の $0 \leq a < b \leq 1$ に対し

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{\langle x_j \rangle \in [a, b)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b - a.$$

上式で $a = \log_q d$, $a = \log_q(d+1)$ として (ii) に注意すればよい.

問 1.8.1 f は偶関数かつ凸関数であることが容易にわかる. また, $f(0) \leq f(x)$. 実際, $0 = \frac{1}{2}x + \frac{-1}{2}x$ より

$$f(0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) = f(x).$$

そこで, x を固定すると $g(t) = f(tx)$ も凸関数かつ $g(0) \leq g(t)$. いま, $0 \leq s < t$ とすると, $s = (1 - \frac{s}{t})0 + \frac{s}{t}t$ より,

$$g(s) \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right)g(0) + \frac{s}{t}g(t) \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right)g(t) + \frac{s}{t}g(t) = g(t).$$

問 1.8.2 X をノルム空間とする. リースの補題より点列 $\{c_n\}_{n \geq 1} \subset X$ を $\|c_n\| = 2/3$ かつ $\|c_m - c_n\| > 2r$ ($\forall m > \forall n \geq 1$) をみたすようにとれる. そこで $x_n \in B_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X; \|x - c_n\| \leq r\}$ とすると

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \|x_n - c_n\| + \|c_n\| \leq r + 2/3 < 1, \\ \|x_n - x_m\| &= \|(x_n - c_n) + (c_n - c_m) - (x_m - c_m)\| \\ &\geq \|c_n - c_m\| - \|x_n - c_n\| - \|x_m - c_m\| \\ &> 2r - r - r = 0. \end{aligned}$$

以上より $\{B_n\}$ は非交差かつ開単位球に含まれる.

問 1.8.3 i) n についての帰納法による. $n = 1$ なら仮定より結果は正しい. また, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $B^n \neq 0$, $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$ とすると, $AB^{n+1} = AB^nB = (B^nA + nB^{n-1})B = B^nAB + nB^n = B^n(BA + 1) + nB^n = B^{n+1}A + (n+1)B^n$. また上式と $B^n \neq 0$ より $B^{n+1} \neq 0$ もわかる. ii) 線形写像 $\Gamma : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ を $\Gamma T = ABT - TBA$ ($T \in \mathcal{L}(X)$) により定めると i) より $\Gamma B^{n-1} = nB^{n-1}$. いま, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ と仮定する. このとき, $T \in \mathbb{S}(\mathcal{B}(X))$ に対し, $\|\Gamma T\|_{X \rightarrow X} = \|ABT - TBA\|_{X \rightarrow X} \leq \|AB\|_{X \rightarrow X} + \|BA\|_{X \rightarrow X}$. よって, $\|\Gamma\|_{\mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)} \leq \|AB\|_{X \rightarrow X} + \|BA\|_{X \rightarrow X}$. 一方, i) より, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\|\Gamma\|_{\mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)} \geq n$ (不合理).

問 1.8.4 i) 対称性より $(\Rightarrow)$ を言えばよい. 有界線形作用素 $U : X \rightarrow X$ が $U(I_X - BA) = (I_X - BA)U = I_X$ をみたすなら, $V = I_Y + AUB : Y \rightarrow Y$ は有界線形作用素かつ $V(I_Y - AB) = (I_Y - AB)V = I_Y$ をみたすことが容易にわかる. **ii)** 問 1.3.5 i) による. **iii)** $X/\text{Ran}(I_X - BA)$ が n 次元と仮定する. $\text{Ran}(I_X - BA)$ は閉部分空間だから [吉田 5, p.204, 補題 7.5.3 a)] より $\text{Ran}(I_X - BA)^\perp$ も n 次元. 一方, [吉田 5, p.109, 命題 4.2.8 a)] より $\text{Ker}(I_{X^*} - A^*B^*) = \text{Ran}(I_X - BA)^\perp$ も n 次元. これと ii) より $\text{Ker}(I_{Y^*} - B^*A^*) = \text{Ran}(I_Y - AB)^\perp$ も n 次元. すると再び [吉田 5, p.204, 補題 7.5.3 a)] より $Y/\text{Ran}(I_Y - AB)$ は n 次元である. **iv)** iii) の帰結.

参考文献

- [松坂] 松坂和夫 「集合・位相入門」 岩波書店
- [杉浦] 杉浦光夫 「解析入門 I,II」 東京大学出版会
- [吉田 1] 吉田伸生 「新装版 ルベーク積分入門—使うための理論と演習」 日本評論社
- [吉田 2] 吉田伸生 「新装版 確率の基礎から統計へ」 日本評論社
- [吉田 3] 吉田伸生 「微分積分」 共立出版
- [吉田 4] 吉田伸生 「複素関数の基礎」 共立出版
- [吉田 5] 吉田伸生 「関数解析の基礎」 裳華房