「ルベーグ積分入門–使うための理論と演習」中の具体例 (一部)

- (**分割から生じる σ-加法族**) 集合を小さな升目に分け、それらの升目の和で表される集合を「可測」とする例を説明。このような「手に触れられる」例を通じ、σ-加法族の概念に親しむ。また、ここで学んだ考え方はボレル集合体等の、より複雑な σ-加法族の理解にもつながってゆく（例 1.1.6)。

- (**独立試行の数学的構成**) 「さいころを何度も投げる」といった独立試行を $[0,1]$ 上のルベーグ測度を使って簡単に構成する (例 1.4.5). また、この構成によれば「さいころを振り続け、永久に 6 の目が出ない」事象が、実は「連続濃度を持つ零集合」の例であることも分る（例 1.5.4)

- (**大数の法則**) 確率論で有名な大数の法則（の特別な場合）を、確率論の予備知識なしに、ルベーグの収束定理だけを用いて証明する（例 1.5.6. 例 2.4.4.)。また、大数の法則を通じて「零集合」の意味を実感できる。

- ルベーグの収束定理の応用 (問 3.3.9) として、$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x-1}\,dx,\quad p>1.$
$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{y}{y^2+n^2}=\int_0^\infty \frac{\sin xy}{e^x-1}\,dx\quad y\in\mathbb{R}.$

- 等式：$\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,t,\quad t>0$ を次の 3 通りの方法で求める：(i) t についての微分（例 3.3.3.）(ii) フビ二の定理の応用（例 5.3.4）(ii) プランシュレルの定理の応用（問 8.4.1）

- フビニの定理の応用として $B(u,v)=\dfrac{\Gamma(u)\Gamma(u)}{\Gamma(u+v)}$ （例 5.3.4）

- (**バナッハ タルスキの定理**)「全ての集合がルベーグ可測」という間違った仮定を置くと、次のような矛盾に至る：半径 1 の球を粉砕し、出来た破片を拾い集めて並べたら半径 1 の球が二つできる！

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}dx=\pi^{d/2}$ を極座標変換とフビ二の定理を用いて示す (例 5.5.5)。さらにそれを用いて **単位球の表面積・体積** の簡単な計算法を紹介する (例 5.5.5)。

- (**グリーン核に関する計算**) **グリーン核** $g_0:\mathbb{R}^d\to[-\infty,\infty]$ を 次のように定める：

$$g_0(x)=g_0(|x|)=\begin{cases}-|x|, & d=1\\ -(\log|x|)/\pi, & d=2\\ 2|x|^{2-d}/\{(d-2)\omega_d\} & d\geq 3,\end{cases}$$

(ω_d は単位球面 $\subset\mathbb{R}^d$ の表面積)。原点 $0\in\mathbb{R}^d$ に置かれた単位質量 (単位電荷) が発生する重力場（静電場） は点 $x\in\mathbb{R}^d$ で位置エネルギー（電位）$g_0(x)$ を持つ。グリーン核の性質をルベーグの応用例として計算し、物理的な意味も説明する (問 7.1.8 他)。

- (**ポアソン核に関する計算**) 上半空間 $H_+\stackrel{\text{def.}}{=}\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$ に対しその**ポアソン核**を次のように定める：

$$p_y(x)=\frac{2}{\omega_{d+1}}\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(d+1)/2}},\quad (x,y)\in H_+$$

($\omega_{d+1}=$ は単位球面 $\subset \mathbb{R}^{d+1}$ の表面積)。$\mathbb{R}^{d+1}$ の下半空間 $H_-=\mathbb{R}^d\times(-\infty,0)\subset\mathbb{R}^{d+1}$ に静電場が発生しないとする（例えば金属、電解質溶液などの電気を逃がしやすい物質で満たされているとき）。このとき $0\in\partial H_+$ に単位電荷をおくと H_+ にのみ静電場が発生し、$(x,y)\in H_+$ での電位は $p_y(x)$ で与えられる。ポアソン核の性質をルベーグの応用例として計算し、物理的な意味も説明する (問 7.1.9 他)。

- (**ワイルの定理**) 無理数 α に対し $n\alpha$ $(n=1,2,...)$ の小数部分は $[0,1)$ において一様分布する（多項式近似定理の応用として：問 7.5.4)。
- (**ライプニッツの級数・オイラーの級数**) フーリエ級数の応用として、$\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (例 8.2.2).
- フーリエ変換の応用として、$\displaystyle\frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}=\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{y}{n^2+y^2}$, また、これを用い $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を再証明する（問 8.3.7)。